# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Classe

der

## k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

1900. Heft I.

München.
Verlag der k. Akademie.
1900.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

# Zur Theorie der automorphen Functionen II.

Von **F. Lindemann.**

*(Eingelaufen 4. Januar.)*

Bei Abfassung meines Aufsatzes über automorphe Functionen (diese Sitzungsberichte, 1899, Bd. 39, Heft III) war mir eine Stelle in einem Aufsatze von Ritter über automorphe Functionen vom Geschlechte Null (Math. Annalen Bd. 41, p. 56 ff.) entgangen, auf die ich inzwischen in dankenswerther Weise aufmerksam gemacht bin. Hier weist Ritter nach, dass die Summe der Polygonseiten (d. i. die Summe der Umfänge aller Fundamentalbereiche) nicht convergiren kann, wenn die Grenzpunkte sich längs irgend welcher Curven (wie z. B. am Hauptkreise bei Gruppen mit Hauptkreis) häufen; dazu bemerkt er, dass für diese Fälle die Reihen $\sum f_i'(z)$ nicht convergiren können. Herr College Fricke war so gütig, mir einen Beweis für diese Bemerkung mitzutheilen, der mit Hülfe der von Poincaré bei seinem Beweise benutzten Ungleichungen leicht zu führen ist (vgl. unten den Schluss der vorliegenden Arbeit).

Der an der Spitze meiner Untersuchungen stehende Beweis bezieht sich nun nicht auf die Reihe $\sum f_i'(z)$, sondern zunächst auf die Reihe $\sum f_i''(z)$; aus ihr hatte ich die Convergenz der Reihe $\sum (f_i'(z) - f_i'(z_0))$ durch Integration erschlossen, dabei dann allerdings das ergänzende Glied $f_i'(z_0)$ in Folge eines Irrthums weiterhin fortgelassen, indem ich den Werth $\frac{d_i}{c_i}$ mit $\frac{c_i}{d_i}$ verwechselte. Dieses Fortlassen lässt sich aber auf andere Weise rechtfertigen.

Im Folgenden habe ich den früheren Beweis für die Convergenz der Reihen $\sum f_i''(z)$ mit grösserer Ausführlichkeit und unter Hinzufügung mancher Ergänzungen wiederholt, und damit mein früheres Resultat bestätigt gefunden. Am Schlusse habe ich versucht, den hierin liegenden Widerspruch mit der Ritter'schen Bemerkung aufzuklären.

Eine Substitution der gegebenen Gruppe bezeichnen wir mit $f_i(z)$, setzen also

$$f_i(z) = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}, \tag{1}$$

wobei $i$ einen von 0 bis $\infty$ laufenden Index bezeichnet. Es sei $H(z)$ eine rationale Function von $z$, dann sei die Function $\Theta(z)$ durch die Gleichung

$$\Theta(z) = \sum_k H(f_k(z))\,[f_k'(z)]^m \tag{2}$$

definirt, wo nach Poincaré die rechts stehende Reihe für $m > 1$ stets absolut convergirt, allein ausgenommen die Pole der Function $H(z)$ und die Pole der Functionen

$$f_i'(z) = \frac{1}{(c_i z + d_i)^2}. \tag{3}$$

Letztere kommen nicht in Betracht, wenn es sich um eine Gruppe mit Hauptkreis handelt, denn dann liegen sie alle ausserhalb dieses Hauptkreises. Die Poincaré'sche Function $\Theta$ genügt der Gleichung

$$\Theta(f_i(z)) = \Theta(z) \cdot [f_i'(z)]^{-m} = \Theta(z) \cdot (c_i z + d_i)^{2m}. \tag{4}$$

Unsere Hauptaufgabe soll es sein, die Reihe

$$\sum_k f_k''(z) = -2 \sum_k \frac{c_k}{(c_k z + d_k)^3} \tag{5}$$

zu untersuchen. Aus (4) erhalten wir durch logarithmisches Differenziren:

$$\begin{aligned} -f_i''(z) &= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(f_i)} f_i'^2 - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right] \\ &= \frac{1}{m}\left[\frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{m+2} - \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Die Untersuchung der Reihe (5) können wir daher auf die Untersuchung der beiden einzelnen Reihen

$$
\begin{aligned}
U &= \sum_i \frac{1}{m} \frac{\Theta'(f_i)}{\Theta(z)} f_i'^{\,m+2}, \\
V &= \sum_i \frac{1}{m} \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} f_i'
\end{aligned} \tag{7}
$$

zurückführen und haben dann den Vortheil, dass wir sowohl über die Zahl $m$, als über die in $\Theta(z)$ vorkommende rationale (oder transscendente) Function $H(z)$ noch in besonders günstiger Weise verfügen dürfen. Von der Zahl $m$ hängt auch die Function $\Theta$ ab: lassen wir also $m$ vom Summationsindex $i$ abhängen, so können auf den rechten Seiten der Gleichungen (7) keine gemeinsamen Factoren vor das Summenzeichen gesetzt werden. Wir können eine solche Abhängigkeit zwischen den Zahlen $m$ und $i$ unbedenklich einführen, weil die Gleichung (6) eine Identität ist.

Nach Poincaré ist die Reihe

$$\sum f_i'(\zeta)^2 \tag{8}$$

stets convergent, also sicher $\lim\limits_{i=\infty} f_i'(\zeta) = 0$. Man kann demnach eine Zahl $j$ so bestimmen, dass für alle Werthe von $k$, welche grösser als $j$ oder gleich $j$ sind, die Ungleichheit

$$\operatorname{abs} f_k'(\zeta) < 1 \tag{9}$$

erfüllt ist. Da die Reihe (8) gleichmässig convergirt, ist die so definirte Zahl von $\zeta$ nicht abhängig; sie kann so gewählt werden, dass für alle Punkte $\zeta$ eines endlichen Bereiches dieselbe Zahl $j$ genügt. Der Einfachheit wegen können wir uns hierbei die Substitutionen so geordnet denken, dass dem grösseren absoluten Betrage von $f_i'(z)$ ein kleinerer Index entspricht, ausserdem aber immer $f_0(z) = z$ gesetzt wird. Es ist nur zu beachten, dass es vielleicht unendlich viele Substitutionen geben wird, denen derselbe absolute Betrag von $f_i'(z)$ zukommt. Jede Substitution $f_i$ nemlich hängt von vier Constanten $a_i, b_i, c_i, d_i$ ab, die durch die Bedingung $a_i d_i - b_i c_i = 1$ an einander geknüpft sind, und die ausserdem durch die Bedingungen der Gruppe beschränkt werden; in $f'_i$ kommen aber nur zwei Constanten ($c_i$ und $d_i$) vor. Dem entsprechend können wir jede Substitution $f_i$ auch durch zwei Indices $\lambda$, $\mu$ charakterisiren, von denen sich $\lambda$ auf die Grösse des absoluten Betrages bezieht, $\mu$ aber eine irgendwie festgelegte Ordnung bei gleichem absoluten Betrage andeutet. Es wird also

(10) $$\sum_i [f'_i(z)]^m = \sum_\lambda \sum_\mu [f'_{\lambda\mu}(z)]^m,$$

und hier ist

(11) $$\sum_\mu [f'_{\lambda\mu}(z)]^m = N_\varkappa [f'_\varkappa(z)]^m,$$

wo $\varkappa$ einen bestimmten Index $i$ bezeichnet und $N_\varkappa$ die Anzahl derjenigen Substitutionen angibt, denen dieselben Werthe der Constanten $c_i$ und $d_i$ zukommen. Da die Reihe (8) convergirt, so hat die rechte Seite von (11) für jeden Index $\varkappa$ einen endlichen Werth; es ist also auch $N_\varkappa$ endlich für jeden endlichen Werth von $\varkappa$, und es wird

$$\lim_{\varkappa=\infty} N_\varkappa [f'_\varkappa(z)]^2 = 0.$$

Die von uns verlangte Anordnung der Glieder der Reihe wäre hiernach so herzustellen, dass man zunächst die Doppelreihe der rechten Seite von (10) bildet und dann diese in eine einfache Reihe verwandelt, indem man die auf einander folgenden Substitutionen mit einem einzigen, stets wachsenden Index $i$ numerirt.

Jedenfalls kann man hiernach den Index $j$ so bestimmen, dass

(12) $$\operatorname{abs} f'_{k+1}(\zeta) \leq \operatorname{abs} f'_k(\zeta) < 1 \quad \text{für } k \geq j$$

und

(12ᵃ) $$\operatorname{abs} f'_{j+1}(\zeta) < \operatorname{abs} f'_j(\zeta).$$

Die zur Construction der in (2) gegebenen $\Theta$-Function benöthigte Function $H(z)$ bestimmen wir durch die Gleichung:

(13) $$H(z) = (z - f_1(\zeta))^2 (z - f_2(\zeta))^2 \dots (z - f_j(\zeta))^2 (z - a),$$

wo $j$ den soeben durch (12) definirten Index bedeutet, und mit $a$ eine von $\zeta$ abhängige Grösse bezeichnet wird, die der Bedingung $H'(\zeta) = 0$ entspricht. Sei also

$$g(z) = (z - f_1(\zeta))(z - f_2(\zeta)) \dots (z - f_j(\zeta)),$$

so machen wir:

$$2g'(\zeta) \cdot (\zeta - a) + g(\zeta) = 0. \tag{14}$$

Hierbei muss angenommen werden, dass $g'(\zeta)$ von Null verschieden sei. Wäre aber $g'(\zeta) = 0$, so hätten wir

$$H(z) = [g(z)]^2 \cdot (z - a)(z - \beta)$$

zu setzen, und dann der Bedingung

$$[2g'(\zeta) \cdot (\zeta - \beta) + g(\zeta)](\zeta - a) + (\zeta - \beta) g(\zeta) = 0 \tag{15}$$

zu genügen. Bestimmen wir die Grösse $\beta$ auf irgend eine Weise so, dass die eckige Klammer der linken Seite von Null verschieden ist, so kann auch $a$ aus dieser Gleichung berechnet werden. Ist gleichzeitig $g(\zeta) = 0$ und $g'(\zeta) = 0$, so kann in analoger Weise Abhülfe geschaffen werden. Durch Differentiation der Gleichung (2) erhalten wir

$$\begin{aligned}\Theta'(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} m\, H(f_k(z))\, [f_k'(z)]^{m-1} f_k''(z) \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} H'(f_k(z))\, [f_k'(z)]^{m+1}.\end{aligned} \tag{16}$$

Setzen wir nun $z = \zeta$, so ist sowohl $H(f_k(\zeta))$ als auch $H'(f_k(\zeta))$ gleich Null für $k \leq j$, ausgenommen den Werth $k = 0$. Es wird also

$$\begin{aligned}\Theta(\zeta) &= H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\, [f_k'(\zeta)]^m \\ \Theta'(\zeta) &= \sum_{k=j+1}^{\infty} m\, H(f_k(\zeta))\, [f_k'(\zeta)]^{m-1} f_k''(\zeta) \\ &+ \sum_{k=j+1}^{\infty} H'(f_k(\zeta))\, [f_k'(\zeta)]^{m+1}.\end{aligned} \tag{17}$$

Wie gesagt, denken wir uns die Zahl $m$ von der Zahl $i$ abhängig, und zwar so, dass $m$ mit $i$ in's Unendliche wächst. Wir wählen $m = i$, und setzen dem entsprechend den Index $i$ an das Zeichen $\Theta$; es ist also:

(18) $$\Theta_i(\zeta) = H(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H(f_k(\zeta))\,[f'_k(\zeta)]^i.$$

Diese Function $\Theta(\zeta)$ ist keine Poincaré'sche $\Theta$-Function, denn das Argument $\zeta$ kommt in dem Factor $H(f_k(\zeta))$ des allgemeinen Gliedes nicht nur im Argumente $f_k(\zeta)$, sondern nach (15) auch ausserdem explicite vor. Die Function $\Theta_i(z)$ wird nach Poincaré für eine gewisse endliche Anzahl von Punkten (die mit $i$ wächst) in jedem Bereiche gleich Null; unter diesen Punkten ist aber $\zeta$ nicht enthalten, denn wäre $\zeta$ für alle Werthe von $i$ ein Nullpunkt von $\Theta(z)$, so müsste $\Theta_i(\zeta)$ auch für $i = \infty$ gleich Null sein; es ist aber nach (9) und (18)

(19) $$\lim_{i=\infty} \Theta_i(\zeta) = H(\zeta),$$

und $H(\zeta)$ ist im Allgemeinen von Null verschieden. Der Fall $H(\zeta) = 0$ soll weiterhin besprochen werden.

Vielleicht könnte es für ganz specielle Lagen von $\zeta$ vorkommen, dass $\Theta_i(z)$ für $z = \zeta$ verschwindet; aber jedenfalls kann die Zahl solcher Stellen in jedem Bereiche nur eine endliche sein, denn wäre sie für alle Werthe unendlich gross, so müsste sie auch für $i = \infty$ unendlich gross bleiben, was nach (19) offenbar nicht der Fall ist. Diese Darlegung hatte ich in meiner früheren Arbeit in sehr knapper Form angedeutet, den entsprechenden Satz dann später bei der Correctur geändert, in der Meinung, ihn zu verbessern; thatsächlich war aber dadurch die irrige Bemerkung hineingekommen, dass die Anzahl der Nullpunkte der Function $\Theta_i(\zeta)$ mit wachsendem $i$ unendlich gross werde.

Der absolute Betrag der Function $\dfrac{1}{\Theta_i(\zeta)}$ bleibt hiernach für alle Werthe von $i$ stets unterhalb einer endlichen Grenze $M$:

(20) $$\operatorname{abs} \frac{1}{\Theta_i(\zeta)} < M.$$

Wir machen nun auch in der durch (7) definirten Reihe $V$ die Substitution $m = i$, $z = \zeta$; dann wird

$$(\text{abs } V)_{z=\zeta} < M \sum_i \frac{1}{i} \text{ abs } (\Theta_i' (\zeta) \cdot f_i' (\zeta)).$$

Setzen wir noch

$$P_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H (f_k(\zeta)) \left[\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right]^{i-1} f_k''(\zeta),$$

$$Q_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H' (f_k(\zeta)) \left[\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right]^{i+1},$$

so sind die Reihen $P_i$ und $Q_i$, welche in die Gleichungen (17) einzuführen sind, nach den Poincaré'schen Sätzen für alle Werthe von $i$ convergent; da ferner nach der oben getroffenen Festsetzung über die Anordnung der Functionen $f_i(z)$ stets

$$\text{abs } f_k' (\zeta) < \text{abs } f_j' (\zeta) \text{ für } k > j$$

ist, so haben die beiden Zahlenreihen

$$P_i, \quad P_{i+1}, \quad P_{i+2}, \ldots\ldots$$
$$Q_i, \quad Q_{i+1}, \quad Q_{i+2}, \ldots\ldots$$

die Eigenschaft, dass ihre absoluten Beträge mit wachsendem $i$ stets abnehmen, sich also für $i = \infty$ endlichen Grenzen nähern. Sei

$$P_i' = \text{abs } P_i, \quad Q_i' = \text{abs } Q_i,$$

so wird

$$(21) \quad (\text{abs } V)_{z=\zeta} < M \sum_i \left[ P_i' \text{ abs } (f_j' (\zeta))^{i-1} + \frac{1}{i} Q_i' \text{ abs } (f_j' (\zeta))^{i+1} \right] \text{abs } f_i' (\zeta).$$

Da die Reihe $\sum_i (f_j' (\zeta))^{i+1}$ in Folge der Forderung (9) sicher convergirt, so folgt, dass auch die Reihe $V$ für $z = \zeta$ sicher convergent, und zwar absolut convergent ist. Ausgenommen sind die Punkte $\zeta = -\frac{d_i}{c_i}$, für welche die Functionen $f_i' (\zeta)$ unendlich gross werden, welche indessen für Functionen mit Hauptkreis (weil ausserhalb desselben liegend) nicht in Betracht kommen. Ausgenommen sind auch zunächst noch die Nullpunkte der Function $H(\zeta)$.

Etwas umständlicher gestalten sich die entsprechenden Ueberlegungen für die Reihe $U$, welche durch die erste Gleichung (7) definirt war. Damit die Gleichung (6) erfüllt, d. h.

$$\sum_i f_i'(\zeta) = V(\zeta) - U(\zeta)$$

sei, muss die Function $\Theta$ in $U$ ebenso, wie in $V$ definirt sein; es muss also auch jetzt $m = i$ gesetzt werden. Wir haben für $z = \zeta$

$$U(\zeta) = \sum_i \frac{1}{i}\,\frac{\Theta_i'(f_i(\zeta))}{\Theta_i(\zeta)}\, f_i'(\zeta)^{i+2}. \tag{22}$$

Die in $\Theta_i(z)$ eingehende Function $H(z)$ müsste wieder gemäss Gleichung (13) und der Index $j$ durch die Ungleichung (9) bestimmt werden. Diese Forderung bereitet hier einige Schwierigkeiten, denn in $\Theta_i'(f_i(\zeta))$ treten die Grössen $f_k'(f_i(\zeta))$ an Stelle der Grössen $f_k'(\zeta)$ auf. Es müsste also $j$ so gewählt werden, dass für $k \geqq j$, die Ungleichung

$$\text{abs}\, f_k'(f_i(\zeta)) < 1 \tag{23}$$

erfüllt ist, und dadurch wird $j$ vom Index $i$ abhängig. Es besteht nemlich die Gleichung

$$f_k'(f_i(\zeta)) = \frac{f_{ki}'(\zeta)}{f_i'(\zeta)}, \tag{24}$$

wenn $f_{ki}(\zeta) = f_k(f_i(\zeta))$ gesetzt wird. Um die Ungleichung (23) zu befriedigen, muss also $j$ so gross gewählt werden, dass für $k \geqq j$

$$\text{abs}\, f_{ki}'(\zeta) < \text{abs}\, f_i'(\zeta) \text{ und abs}\, f_{j+1,i}'(\zeta) < \text{abs}\, f_{j,i}'(\zeta) \tag{25}$$

wird. Für endliche Werthe von $i$ wird man dieser Forderung durch einen endlichen Werth von $j$ stets genügen können; mit unendlich wachsendem $i$ wird aber auch der zugehörige Werth von $j$ unbegrenzt zunehmen. In Folge dessen wächst mit $j$ auch die Anzahl der Factoren von $H(z)$ in's Unendliche; und $H(z)$ wird für $j = \infty$ durch ein unendliches Product dargestellt, das nicht nothwendig convergent ist. Nach den bekannten Sätzen von Weierstrass und Mittag-

Leffler über eindeutige analytische Functionen können wir indessen dies Product durch Hinzufügen von Exponentialfunctionen zu den einzelnen Factoren stets convergent machen. Wir ersetzen daher die Gleichung (13) durch die folgende

$$(26) \qquad H_i(z) = [G_i(z)]^2 \cdot (z - a_i),$$

wo durch Beisetzen des Index $i$ daran erinnert werden soll, dass für jede Function $\Theta_i(z)$ eine andere Function $H_i(z)$ zu benutzen ist. Hierbei sei

$$(27) \quad G_i(z) = \left(1 - \frac{z}{f_1(\zeta)}\right) e^{g_1(z)} \cdot \left(1 - \frac{z}{f_2(\zeta)}\right) e^{g_2(z)} \cdots \left(1 - \frac{z}{f_j(\zeta)}\right) e^{g_j(z)},$$

wo die ganzen Functionen $g_k(z)$ in bekannter Weise zu bilden sind; und zur Bestimmung von $a$ diene die Gleichung:

$$(28) \qquad 2\, G_i'(\zeta) \cdot (\zeta - a_i) + G_i(\zeta) = 0.$$

Ist zufällig $G_i'(\zeta) = 0$, so sind entsprechende Ueberlegungen anzustellen, wie oben im Anschlusse an die Gleichung (15). Nach diesen Festsetzungen behält $H_i(\zeta)$ auch für $i = \infty$ einen endlichen Werth.

Von den beiden Zahlen $j$, welche einerseits durch die Forderung (9), andererseits durch die Forderung (23) bestimmt werden, ist jedesmal die grössere auszuwählen, welche dann beiden Ungleichungen genügt. Es ist sodann auch in $V$ die frühere Function $H(z)$ durch die jetzige $H_i(z)$ zu ersetzen; im übrigen sind die obigen Ueberlegungen zu wiederholen, wodurch wieder die Convergenz der Reihe (21) erwiesen wird; denn die Grössen $P_i$ und $Q_i$ bleiben auch jetzt stets endlich, wie wir sogleich noch sehen werden.

Dieselben Ueberlegungen genügen jetzt aber auch für die Function $U(\zeta)$. Wir definiren eine Zahl $j$ (die von $i$ abhängt und mit $i$ in's Unendliche wächst) durch die Ungleichung (23) bezw. (25), (12) und (12ª), dann die Function $H_i(z)$ durch (26), (27) und (28); ferner setzen wir

$$\Theta_i(z) = \sum_k H_i(f_k(z))\, [f_k'(z)]^t,$$

und diese Gleichung soll jetzt sowohl für die Reihe $U$, als für die Reihe $V$ gelten. Lassen wir $z$ mit $\zeta$ zusammenfallen, so wird

$$(29) \qquad \Theta_i(\zeta) = H_i(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i(f_k(\zeta))\,[f'_k(\zeta)]^i$$

und in Folge von (28)

$$(30) \quad \Theta'_i(\zeta) = \sum_{k=j+1}^{\infty} i H_i(f_k(\zeta))[f'_k(\zeta)]^{i-1} f''_k(\zeta) + \sum_{k=j+1}^{\infty} H'_i(f_k(\zeta))[f'_k(\zeta)]^{i+1}.$$

Die Function $\Theta_i(\zeta)$ ist im Allgemeinen von Null verschieden, und die Anzahl der Nullpunkte ist eine endliche, so lange $i$ endlich bleibt; sie wächst vielleicht in's Unendliche mit wachsendem $i$, bleibt aber discret; denn wir haben hier

$$\lim_{i=\infty} \Theta_i(\zeta) = H_\infty(\zeta),$$

wo nun rechts nach (27) ein convergentes unendliches Product steht. Es lassen sich hieran dieselben Ueberlegungen anknüpfen, wie oben an Gleichung (19). Es gilt somit auch hier die Ungleichung (20), wenn auch für $M$ jetzt vielleicht ein anderer Werth gewählt werden muss. Ferner ist

$$(31) \qquad \text{abs}\, U(\zeta) \leq M \sum_i \frac{1}{i}\, \text{abs}\, [\Theta'_i(f_i(\zeta))\, f'_i(\zeta)^{i+2}].$$

Setzen wir

$$R_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H_i\big(f_k(f_i(\zeta))\big) \left[\frac{f'_k(f_i(\zeta))}{f'_j(f_i(\zeta))}\right]^{i-1} f''_k(f_i(\zeta)),$$

$$S_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} H'_i\big(f_k(f_i(\zeta))\big) \left[\frac{f'_k(f_i(\zeta))}{f'_j(f_i(\zeta))}\right]^{i+1}$$

so sind die Reihen $R_i$ und $S_i$ für alle Werthe von $i$ convergent. Da nemlich die Functionen $H_i(f_k(f_i(\zeta)))$ und $H'_i(f_k(f_i(\zeta)))$ gewisse endliche Werthe nicht überschreiten, so genügt es, die Reihe

$$A_i = \sum_{k=j+1} \left[\frac{f'_k(f_i(\zeta))}{f'_j(f_i(\zeta))}\right]^{i-1}$$

zu untersuchen. Wir betrachten zunächst die Reihe

$$L_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left[\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right]^{i-1},$$

welche zu obiger Function $P_i$ in derselben Beziehung steht, wie $A_i$ zu $R_i$.

Da $i > 2$ ist, so steht rechts eine stets absolut convergente Reihe. Ersetzen wir $i$ durch $i+1$, so ist es möglich, dass $j$ denselben Werth behält; und dann wäre, wenn $\varepsilon_j$ den absoluten Betrag von $f_j'(\zeta)$ bezeichnet:

$$(32) \qquad \text{abs}\, L_i < \sum \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)^{i-1}, \quad \text{abs}\, L_{i+1} \leq \sum \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_j}\right)^{i}$$

also auch, da $\varepsilon_k < \varepsilon_j$ ist:

$$(33) \qquad \lambda_{i+1} < \lambda_i,$$

wenn die rechte Seite der ersten Ungleichung (32) kurz mit $\lambda_i$ bezeichnet wird.

Wächst aber $j$ gleichzeitig mit $i$ (wie es im Allgemeinen zu erwarten ist), so müssen wir einen andern Weg einschlagen.

Es ist

$$\text{abs}\, L_i < \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs} \left(\frac{f_k'(\zeta)}{f_j'(\zeta)}\right)^{i-1},$$

und die rechte Seite ist gleich

$$\frac{1}{\text{abs}\, f_j'(\zeta)^{i-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \text{abs}\, (f_k'(\zeta))^{i-1} = \frac{1}{\text{abs}\, f_j'(\zeta)^{i-1}} \sum_{l=0}^{\infty} \text{abs}\, f_{lj}'(\zeta)^{i-1},$$

denn die links stehende Reihe ist absolut und unbedingt convergent, also unabhängig von der Anordnung der Glieder, und die jetzt rechts stehende Reihe unterscheidet sich von ihr nur durch eine Umstellung der einzelnen Glieder. Nach Gleichung (24) ist aber diese rechte Seite auch

$$(34) \qquad = \sum_{l=0}^{\infty} [\text{abs}\, f_l'(f_j(\zeta))]^{i-1}.$$

Da nun die Reihe

$$\sum_l f_l'(z)^m$$

für $m > 1$ stets convergirt, wenn $z$ einen Punkt im Innern des Hauptkreises bedeutet, so ist auch die Reihe (34) für jeden endlichen Werth von $j$ convergent, und somit bleiben die Grössen $L_i$ endlich bei wachsendem $i$, so lange $j$ endlich bleibt.

Wird aber $j$ mit $i$ unendlich gross, so rückt der Punkt $f_j(\zeta)$ dem Rande des Hauptkreises bei wachsendem $i$ beliebig nahe. Demselben Rande nähern sich von aussen die Punkte $-\frac{d_i}{c_i}$ bei wachsendem Index $i$. In der Reihe (34) kommen daher Terme vor, die über alle Grenzen hinaus wachsen; und dadurch wird die Convergenz der Reihe (34) für Punkte des Randes gestört (vgl. Poincaré a. a. O. 198). Nun ist aber nach der Definition

$$L_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} \left(\frac{f'_k(\zeta)}{f'_j(\zeta)}\right)^{i-1} = \sum_{l} [f'_l(f_i(\zeta))]^{i-1}$$

eine Summe, in der alle Terme wegen der Bedingung (23) kleiner als Eins sind; die Summe enthält in Folge der über $j$ getroffenen Festsetzungen von selbst diejenigen Terme der Reihe (34) nicht, welche die Convergenz der letztern stören. Folglich behält auch in diesem Falle die Reihe $L_i$ einen endlichen Werth auch bei unbegrenzt wachsendem Index $i$; und dasselbe gilt für die in (21) vorkommende Function $P_i$; auch letztere bleibt für alle Werthe von $i$ stets endlich.

Was nun die Grössen $A_i$ anbetrifft, so ist nach Analogie zu (34)

$$A_i = \sum_{k=j+1}^{\infty} [f'_l(f_j(f_i(\zeta)))]^{i-1}, \tag{35}$$

wenn der Index $l$ bei der Summation so gewählt wird, dass die Gesammtheit der vorkommenden Functionen $f_l(f_j(\zeta))$ identisch ist mit der Gesammtheit der Functionen $f_k(\zeta)$, die ursprünglich in $A_i$ auftreten. Die Grösse $A_i$ entsteht also aus $L_i$, indem man $\zeta$ durch $f_i(\zeta)$ ersetzt; auf $A_i$ lassen sich daher dieselben Ueberlegungen anwenden, wie sie soeben für $L_i$ durchgeführt wurden, denn nach (23) ist der Index $j$ so bestimmt, dass auch hier die absoluten Beträge aller Glieder auf der rechten Seite von (35) kleiner als Eins sind, so dass die Convergenz nicht gestört wird, wenn der Punkt $f_j(f_i(\zeta))$ mit wachsendem $i$ der Peripherie des Hauptkreises beliebig nahe kommt. Auch die Zahlen $A_i$, und damit die absoluten Beträge $R'_i$ und $S'_i$ der Grössen $R_i$ und $S_i$ bleiben daher stets unterhalb endlicher Grenzen.

Somit folgt aus (30) und (31):

$$\text{abs}\ U(\zeta) \leq M \sum_i \Big[ R'_i \text{ abs } \{f'_j(f_i(\zeta))\}^{i-1}$$

$$+ \frac{1}{i} S'_i \text{ abs } \{f'_j(f_i(\zeta))\}^{i+1} \Big] \text{abs } f'_i(\zeta)^{i+2}.$$

Da $\lim f_i(\zeta) = 0$ ist für $i = \infty$, und da wegen der Ungleichung (23)

$$\text{abs } f'_j(f_i(\zeta)) < 1$$

ist, so steht auf der rechten Seite eine convergente Reihe, denn wenn $\varphi$ den grössten Werth bezeichnet, der unter allen Werthen $f'_j(f_i(\zeta))$ vorkommt, so ist auch $\varphi < 1$ und die Reihen

(36) $$\sum_i \varphi^{i-1} \text{ und } \sum \varphi^{i+1}$$

sind einzeln convergent.

Um diese Schlüsse in ihrer Reihenfolge genauer klar zu legen, verfahre man in folgender Weise:

Man wähle eine positive Grösse $\varphi$ aus, welche kleiner als 1 ist, und wähle $\nu$ so gross, dass die Reihe

(37) $$\sum_{i=\nu}^{\infty} \varphi^{i-1}$$

dem absoluten Betrage nach kleiner als $\varepsilon$ werde. Man bestimme ferner eine Zahl $\mu$ so gross, dass

(38) $$\text{abs } f'_i(\zeta) < \varphi$$

wird für $i > \mu$. Die grösste dieser beiden Zahlen $\nu$ und $\mu$ werde mit $n$ bezeichnet. Sodann werde ein Index $j$ (der von $i$ abhängt) so bestimmt, dass nach (23) und (25)

$$\text{abs}\, f'_k(f_i(\zeta)) < 1 \quad \text{für} \quad k \geq j,$$

und gleichzeitig $\quad \text{abs}\, f'_k(\zeta) \quad < \varphi \quad „ \quad k > j.$

Mit Hülfe dieses Werthes von $j$ werde die Function $H_i(\zeta)$ und darauf $\Theta_i(\zeta)$ definirt. Es ist dann zunächst:

$$\text{abs} \sum_{i=n}^{\infty} [\{f'_j(f_i(\zeta))\}^{i-1} + \{f'_j(f_i(\zeta))\}^{i+1}]\, f'_i(\zeta)^{i+2}$$

$$< 2 \sum_{n}^{\infty} \varphi^{i-1} < 2 \cdot \varepsilon.$$

Die Factoren $R'_i$ und $S'_i \frac{1}{i}$ bleiben nach Obigem stets endlich, sagen wir kleiner als $S''$; es ist also:

$$\text{abs}\, U(\zeta) < 2\, S''\, M \cdot \varepsilon,$$

und ebenso:

$$\text{abs}\, V(\zeta) < M \cdot P'' \cdot \sum_{n}^{\infty} \varphi^{i-1}$$

$$< M\, P'' \cdot \varepsilon,$$

wenn $P''$ den grössten Werth bezeichnet, den die Ausdrücke

$$\text{abs}\, (P_i + i^{-1}\, \varphi \cdot Q_i)$$

annehmen können. Es ist demnach

$$\text{abs}\, (V_n(\zeta) - U_n(\zeta)) < M \varepsilon\, (P'' + 2\, S''),$$

also kleiner, als eine mit $\varepsilon$ unendlich klein werdende Grösse, wobei $U_n(\zeta)$ und $V_n(\zeta)$ die Reste der Reihen $U(\zeta)$ und $V(\zeta)$ bedeuten.

Da nun $f''_i(\zeta) = V(\zeta) - U(\zeta)$ ist, so convergirt auch die Reihe $\sum f''_i(\zeta)$ absolut.

Bei dem eingeschlagenen Beweisgange mussten allerdings gewisse Punkte $\zeta$ vorläufig noch ausgenommen werden, nemlich die Nullpunkte der Functionen $\Theta_i(\zeta)$. Diese Nullpunkte können in zwei Klassen getheilt werden: solche, die allen Functionen $\Theta_i(\zeta)$ gemeinsam sind, und solche, für die nur einzelne dieser Functionen verschwinden. Die ersteren müssen auch als Nullpunkte der Function $\Theta_\infty(\zeta) = H_x(\zeta)$ auftreten.

Letztere kann man durch Aenderung der Definition der Function $H_i(\zeta)$ an andere Stellen bringen; in der That ist diese Definition noch in hohem Grade willkürlich: man kann auf der rechten Seite von (26) noch eine beliebige rationale Function von $z$ als Factor hinzufügen, ohne etwas wesentliches an der ganzen Betrachtung zu ändern. Es entspricht dies Verfahren ganz demjenigen, welches oben im Anschlusse an die Gleichungen (16), (17) und (18) zur Anwendung kam. Die Nullpunkte einzelner Functionen $\Theta_i(\zeta)$ sind daher für die Convergenz der Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ nicht von wesentlicher Bedeutung.

Was nun die Nullpunkte und Unendlichkeitspunkte der Function $H_x(\zeta)$ betrifft, d. h. die Nullpunkte der Function $\zeta - f_k(\zeta)$ oder $f_k(\zeta)$, so können sie ebenfalls nicht ein wesentliches Hinderniss der Convergenz bilden. Wäre nemlich $\zeta$ z. B. zufällig ein Nullpunkt der Gleichung

$$\zeta - f_\nu(\zeta) = 0 \quad \text{oder} \quad f_\nu(\zeta) = 0,$$

so lassen wir bei der Definition $\mathrm{H}_i(z)$ den Factor $\left(1 - \frac{z}{f_\nu(\zeta)}\right)$ fort. Es sind dann für das Glied $f_\nu''(\zeta)$ der Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ die obigen Werthe für $\Theta_i(\zeta)$ und $\Theta_i'(\zeta)$ nicht anwendbar; es sind vielmehr auf den rechten Seiten der Gleichungen (17), (29) und (30) für $i = \nu$ die Summen von $k = 1$ (nicht $j + 1$) bis $k = \infty$ zu erstrecken. Für dies eine Glied $f_\nu''(\zeta)$ sind also die benutzten Umformungen nicht anwendbar, sie bleiben es aber für alle anderen Glieder der Reihe. Diese anderen Glieder bilden auch jetzt eine convergente Reihe, und folglich convergirt auch hier die Reihe $\sum f_i''(\zeta)$.

Diese Ausnahmepunkte stören die Definition der Hülfs-Function $H_i(z)$ und der Zahl $j$, sie stören aber nicht die Bestimmung der Zahl $n$ gemäss den im Anschlusse an die Ungleichungen (37) und (38) getroffenen Bestimmungen.

Die Reihe $\sum f_i''(\zeta)$ ist daher gleichmässig convergent.

Sie kann demnach gliedweise integrirt werden; folglich ist auch die Reihe

$$\Phi(\zeta, \zeta_0) = \sum_i [f_i'(\zeta) - f_i'(\zeta_0)] \tag{38}$$

absolut convergent. Ersetzen wir hier $\zeta$ durch $f_\nu(\zeta)$, $\zeta_0$ durch $f_\nu(\zeta_0)$, so folgt:

$$\Phi(f_\nu(\zeta), f_\nu(\zeta_0)) = \sum_i \left(\frac{f_{i\nu}'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta)} - \frac{f_{i\nu}'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right),$$

andererseits aus (38):

$$\frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)} \Phi(\zeta, \zeta_0) = \sum_k \left(\frac{f_k'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta_0)} - \frac{f_k'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right)$$

oder nach Umordnung der Glieder auf der rechten Seite:

$$= \sum_i \left(\frac{f_{i\nu}'(\zeta)}{f_\nu'(\zeta_0)} - \frac{f_{i\nu}'(\zeta_0)}{f_\nu'(\zeta_0)}\right), \tag{39}$$

also auch

$$\Phi(f_\nu(\zeta), f_\nu(\zeta_0)) - \frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)} \Phi(\zeta, \zeta_0) = \left(\frac{1}{f_\nu'(\zeta)} - \frac{1}{f_\nu'(\zeta_0)}\right) \sum_i f_{i\nu}'(\zeta).$$

Hieraus folgt, dass auch die Reihe

$$\sum_i f_{i\nu}'(\zeta) = \sum_k f_k'(\zeta)$$

absolut convergirt. Und damit ist dasjenige Resultat gewonnen, welches meiner früheren Arbeit zu Grunde lag.

Andererseits hat Ritter gezeigt, dass die Reihe

$$\sum U_i$$

divergirt, wenn man mit $U_i$ den Umfang desjenigen Polygons bezeichnet, das aus dem Fundamental-Polygon mit dem Umfange $U_0$ durch die Substitution $f_i(z)$ hervorgeht. Nun ist für $z_i = f_i(z)$

$$\sum_i U_i = \sum_i \int \operatorname{abs}(d z_i) < U_0 \sum_i M_i,$$

wenn $M_i$ den grössten Werth von $\operatorname{abs} f_i'(z)$ auf dem Umfange $U_i$ bedeutet, ferner nach Poincaré

$$M_i < K m_i,$$

wenn $K$ eine bestimmte, von $i$ unabhängige Zahl, $m_i$ den kleinsten Werth von abs $f_i'(z)$ bezeichnet, also

$$\sum U_i < U_0 \cdot K \cdot \sum m_i < U_0 \cdot K \sum \operatorname{abs} f_i'(z).$$

Auch die Reihe $\sum m_i$ divergirt daher, und um so mehr die Summe $\sum$ abs $f_i'(z)$, was mit obigem Resultate in Widerspruch zu stehen scheint.

Indessen ist zu beachten, dass Ritters Beweis für die Divergenz der Reihe $\sum U_i$ auf der Annahme einer bestimmten Anordnung der Polygone (concentrisch um das erste Polygon) beruht, und ebenso unser Beweis auf der Annahme einer bestimmten anderen Anordnung (nach den Grössen der absoluten Beträge von $f_i'(\zeta)$), die mit der Ritter'schen Anordnung nicht nothwendig übereinstimmt.

In beiden Fällen haben wir es mit einer einfach unendlichen Reihe zu thun; bei der Anordnung nach concentrischen Ringen erscheinen immer gewisse Gruppen von Gliedern mit einander verbunden, so dass die Reihe der absoluten Beträge in der Form

$$\begin{array}{l} v_{11} + v_{12} + \dots + v_{1a} \\ + v_{21} + v_{22} + \dots + v_{2b} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + v_{\mu 1} + v_{\mu 2} + \dots + v_{\mu m} + \dots \end{array}$$

erscheint. Bei der von uns gewählten Anordnung seien die Glieder mit $u_\nu$ bezeichnet. Bei dem Beweise für die Gleichwerthigkeit der beiden Reihen $\sum u_\nu$ und $\sum v_{\mu n}$ wird vorausgesetzt, dass sich für jeden endlichen Index $\nu = n$, auch ein endlicher Werth $v_{\mu m}$ so angeben lasse, dass in der Summe $v_{11} + v_{12} + \dots + v_{\mu m}$ alle Glieder $u_0, u_1, \dots u_n$ vorkommen. Wenn nun die eine Reihe divergiren, die andere convergiren soll, so kann diese Bedingung nicht erfüllt sein. Unsere Reihe $\sum u_\nu$ ist nach der Grösse der Glieder geordnet; es müsste also nicht möglich sein, durch eine endliche Anzahl concentrischer Polygonringe, welche das erste Polygon successive umgeben, alle Polygone zu umfassen, in denen der absolute

Werth $u_n$ des Differentialquotienten $f'_n(z)$ erreicht wird. Diese Unmöglichkeit würde z. B. eintreten, wenn es in beliebiger Nähe des umschliessenden Hauptkreises Punkte gibt, in denen der Werth von $f'_n(z)$ oberhalb einer angebbaren Grösse bleibt; dann aber würde auch die Reihe (8) nicht convergiren können.

Dieselbe Unmöglichkeit bietet sich aber auch, wenn an $N$ Punkten $z_m$, die dem Rande beliebig nahe liegen, die Functionen $f'_n(z_m)$ sich mit wachsendem $n$ verhalten wie $N^{-1}$, wo $N$ eine mit $n$ in's Unendliche wachsende Zahl bezeichnet; dann behält nemlich die Summe dieser Glieder einen endlichen Werth, und wenn diese Glieder in dem Reste der Reihe $\sum v_{\mu m}$ auftreten, so ist natürlich die Convergenz gestört, während die Convergenz der Reihe $\sum v^2_{\mu m}$ darunter nicht leidet.

Etwas derartiges scheint bei unseren Reihen in der That vorzukommen. Sei nemlich wieder $f_{i\nu}(z) = f_i(f_\nu(z))$, so ist

$$f'_{i\nu}(z) = f'_i(f_\nu(z)) \cdot f'_\nu(z) = \frac{1}{(z-\delta_\nu)^2 (f_\nu(z) - \delta_i)^2 c_\nu^2 c_i^2},$$

wo mit $\delta_\nu$ der Punkt $-\dfrac{c_\nu}{d_\nu}$ bezeichnet ist. Es kann $i$ so gewählt werden, dass der Punkt $\delta_i$ von aussen dem Hauptkreise beliebig nahe rückt; dann kann $\nu$ so bestimmt werden, dass sich der Punkt $f_\nu(z)$ derselben Stelle des Hauptkreises von innen beliebig nähert. In $f'_{i\nu}(z)$ wird so mit passend wachsendem $i$ und $\nu$, der zweite Factor des Nenners beliebig klein, während der erste endlich bleibt und die Factoren $c_i^2$ und $c_\nu^2$ über alle Grenzen wachsen. Der Nenner wird also von der Form $0 \cdot \infty$ und bleibt jedenfalls sehr gross im Verhältniss zu den Werthen von $f'_{i\nu}(z)$ an anderen dem Hauptkreise benachbarten Stellen. Hierdurch dürfte sich der scheinbar vorhandene Widerspruch lösen.