Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1924. Heft II

Juli- bis Dezembersitzung

München 1924

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Kurvennetze und Laplacesche partielle Differentialgleichungen.

Von **A. Voss** in München.

Vorgetragen in der Sitzung am 12. Juli 1924.

Zweiter Teil.

Im Teil I[1]) ist gezeigt, daß bei geeigneter Wahl des Koordinatenwinkels ω der Netzkurven mit Hilfe einer Laplaceschen Gleichung sich übersichtliche, von willkürlichen Funktionen abhängige Ausdrücke für die Koeffizienten A, C des zugehörigen Längenelementes $ds^2 = A^2 du^2 + C^2 dv^2 + 2AC \cos\omega\, du\, dv$ eines Kurvensystems und damit auch die Koordinaten x, y der Netzkurven als Funktionen von u resp. v durch Quadraturen erhalten lassen, deren vollständige Ausführung ich z. B. in diesen Berichten 1923 angegeben habe. Allerdings sind diese Quadraturen nicht immer bequem zu bestimmen, und auch, um den Umfang des ersten Teiles nicht zu weit auszudehnen, nur in einigen einfacheren Fällen vollständig ausgeführt worden. Der Teil II beabsichtigt nun, zu zeigen, wie die x, y sich, auch ohne den scheinbaren Umweg über die A, C mit Hilfe einer Laplaceschen Gleichung in Betrachtung ziehen lassen.

§ I. Die Laplacesche Gleichung und ihre Invarianten für x, y.

Sind $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$ die rechtwinkeligen Koordinaten der Gleichungen eines Kurvensystems, dessen Netzkurven für u = konst, resp. v = konst den Koordinatenwinkel ω haben, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial u} = f_u, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = f_v; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \varphi_u, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \varphi_v.$$

[1]) Diese Berichte von 1924, S. 39.

Setzt man:

$$\text{1)} \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = p \frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = q \frac{\partial x}{\partial v},$$

so sind p resp. q die trigonometrischen Tangenten der Neigungswinkel der Kurven $v =$ konst (resp. $u =$ konst) gegen die X Axe, und für den Winkel ω und q bestehen die Gleichungen

$$\text{2)} \qquad \theta = \operatorname{tg} \omega = \frac{p - q}{1 + pq}, \quad q = \frac{p - \theta}{1 + p\theta}, \quad p - q = \frac{\theta(1 + p^2)}{1 + p\theta}.$$

Aus 1) folgt die Bedingung zur Bestimmung von y

$$\text{3)} \qquad (p - q)\, x_{uv} + p_v x_u - q_u x_v = 0,$$

in der nach 2)

$$\text{4)} \qquad q_u = \Big(p_u (1 + \theta^2) - \theta_u (1 + p^2)\Big) : (1 + p\,\theta)^2$$

ist. Setzt man in 3) aus 2) und 4) die angegebenen Werte für q, q_u ein, so erhält man die Laplacesche Gleichung in der Form

$$\text{5)} \qquad x_{uv} + x_u a + x_v b = 0$$

mit den Koeffizienten

$$\text{5a)} \qquad a = \frac{p_v (1 + p\,\theta)}{\theta\,(1 + p^2)}, \qquad -b = \frac{p_u (1 + \theta^2) - \theta_u (1 + p^2)}{\theta\,(1 + p^2)\,(1 + \theta p)}.$$

Die Gleichung für x ist einfacher, wie die für C oder A im ersten Teile, da der Koeffizient C gleich Null ist, und sie kann in manchen Fällen trotz der Form von b zu einer allgemeineren Lösung für x führen, während zugleich dy nach 1) dann durch das vollständige Differential

$$dy = p x_u\, du + q x_v\, dv$$

gegeben ist.

Die Invariante J_1 ist im einfachsten Falle gleich Null, wenn $q_u = 0$, also $q = V$ (V als willkürliche Funktion von v) ist. Dann folgt aus 3)

$$x_{uv} + x_u p_v \frac{(1 + p\,\theta)}{\theta\,(1 + p^2)} = 0$$

oder, da nach 2)

$$\text{6)} \qquad \frac{\partial}{\partial v} L(x_u) + \frac{p_v}{p - V} = 0.$$

Setzt man jetzt
$$W = \frac{p_v}{p - V},$$
so erhält man

$$x_u = U_2 e^{-\int W dv},$$

7) $$x = \int U_2 e^{-\int W dv} du + V_2,$$

$$x_v = -\int U_2 W e^{-\int W dv} du + V_2'.$$

Für y folgt nach der gewöhnlichen Methode
$$y = \int p x_u du + \zeta,$$
wobei sich, da dy ein vollständiges Differential sein muß,
$$\zeta_v = V V_2'$$
ergibt, so daß
$$y = \int p x_u du + \int V V_2' dv$$
wird. p kann dabei noch eine willkürliche Funktion von u und v sein. Im allgemeineren Fall ist $J_1 = 0$, wenn
$$\frac{\partial}{\partial v} L(b) + a = 0.$$

Diese Gleichung ist allerdings auch dann noch unmittelbar zu integrieren, wenn θ eine willkürlich gegebene Funktion von u und v ist, da es sich nur um eine partielle Differentialgleichung in Bezug auf v handelt, aber die weitere Rechnung wird wegen des Wertes 4) von q_u nicht mehr einfach. Beschränkt man sich indessen auf isogonale Netze, und dies soll im folgenden geschehen, so hat man
$$\frac{p_u}{(1 + p\theta)\sqrt{1 + p^2}} = U_2' e^{-\frac{\operatorname{arctg} p}{\theta}}.$$

Dies ist wieder eine Quadratur für p. Bei geeigneter Festsetzung der absoluten Werte von p, damit alle Konvergenzbedingungen erfüllt sind, und der auf die linke Seite gebrachten Exponentialfunktion erhält man eine Gleichung von der Form
$$p_u P = U_2',$$
in der P eine Potenzreihe nach p ist, deren gliedweise nach den angegebenen Voraussetzungen gestattete Integration eine Gleichung für p liefert, dessen Wert nun als abhängig von θ, noch zwei

willkürliche Funktionen U_2, V_2 enthält. Die Koordinate x ergibt sich dann aus der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial v}(x_u + b x) - x \frac{\partial b}{\partial v} + a x_u = 0$$

oder
$$\frac{\partial}{\partial u}\left(x e^{\int b\,du}\right) = U_3 e^{-\int a\,dv + \int b\,du}.$$

Da nun

$$\int a\,dv = \frac{\operatorname{arctg} p}{\theta} + L(\sqrt{1+p^2}),$$

$$\int b\,du = -\frac{\operatorname{arctg} p}{\theta} + L(\sqrt{1+p^2}) - L(1+p\theta),$$

so hat man schließlich

$$x \cdot e^{-\frac{\operatorname{arctg} p}{\theta}} \frac{\sqrt{1+p^2}}{1+\theta p} = \int U_3 e^{-2\frac{\operatorname{arctg} p}{\theta}} \frac{du}{1+\theta p} + V_3$$

und damit auch y.

Die Invariantenbedingung $J_2 = 0$ gibt

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(L p_v \frac{(1+p\theta)}{(1+p^2)}\right) - p_u \frac{1+\theta^2}{\theta(1+p\theta)(1+p^2)} = 0$$

und man hat jetzt

$$\frac{p_v}{\sqrt{1+p^2}} = U_2 e^{\frac{\operatorname{arctg} p}{\theta}},$$

so daß schließlich

$$x e^{\frac{\operatorname{arctg} p}{\theta}} \sqrt{1+p^2} = \int V_3 e^{2\frac{\operatorname{arctg} p}{\theta}} (1+p\theta)\,dv + U_3,$$

wobei p aus der vorausgehenden Gleichung zu entnehmen ist.

Da diese Quadraturen nicht mehr einfach ausfallen, sei erwähnt, daß die Gleichung 5) auch partikulär durch den Ansatz

$$x = F(u+v) + a v, \quad p = f(u+v), \quad u + v = s$$

mit a als einer Konstanten gelöst werden kann. Man hat dann sofort

$$F'' + F' f' \left(\frac{2f}{1+f^2} - \frac{\theta}{1+f\theta}\right) = a f' \frac{(1+\theta^2)}{\theta(1+f^2)(1+f\theta)}$$

oder
$$\frac{\partial}{\partial s}\left(F' \frac{1+f^2}{1+f\theta}\right) = \frac{a}{\theta} f' \frac{(1+\theta^2)}{(1+f\theta)^2},$$

so daß $$F' = -\frac{\alpha}{\sin^2\omega\,(1+f^2)} + \beta\frac{(1+f\theta)}{(1+f^2)},$$

$$x = -\frac{\alpha}{\sin^2\omega}\int\frac{ds}{1+f^2} + \beta\int\frac{1+f\theta}{1+f^2}\,ds + \alpha v$$

mit zwei Konstanten α, β wird, während f eine willkürliche Funktion von $(u+v)$ bleibt.

Noch spezieller ist der Ansatz $x = F(u-v)$, $p = f(u+v)$. Man hat dann nach 5)

$$-\frac{F''}{F'} + f'\left(\frac{1+\theta f}{\theta(1+f^2)} + \frac{1+\theta^2}{\theta(1+f^2)(1+\theta f)}\right) = 0.$$

Dies erfordert aber

$$F = \frac{1}{c_1}e^{c_1(u-v)} + \alpha = x,$$

während f aus der Gleichung

$$2\frac{\operatorname{arctg} f}{\theta} + L(1+f\theta) = c_1(u+v) + c_2$$

zu bestimmen ist.

§ II. Orthogonale Netze.

Aus § I kann man für den Fall $\omega = \pi/2$, $\theta = \infty$ die speziellen Folgerungen entnehmen. Indessen ist der Fall orthogonaler Netzkurven durch seine Einfachheit so ausgezeichnet, daß es angemessen erscheint, ihn hier noch direkt zu behandeln.

Die Gleichung 5) des § I wird

1) $$x_{uv} + \frac{pp_v x_u}{1+p^2} - \frac{p_u x_v}{p(1+p^2)} = 0; \quad a = \frac{pp_v}{1+p^2}, \quad b = -\frac{p_u}{p(1+p^2)}.$$

Ist nun $b = 0$, also $p = V$, so wird

2) $$x_u\sqrt{1+p^2} = U_2',$$

daher $$x = \frac{U_2}{\sqrt{1+V^2}} + V_2,$$

$$x_V = -U_2\frac{VV'}{\sqrt{1+V^2}^{\,3}} + V_2',$$

und hieraus folgt

$$3) \quad \begin{cases} x = \dfrac{U_2}{\sqrt{1+V^2}} + V_2, \\ y = \dfrac{U_2 V}{\sqrt{1+V^2}} - \displaystyle\int \frac{V_2'}{V} dv, \end{cases}$$

so daß nun

$$xV - VV_2 - y - \int \frac{V_2'}{V} dv = 0$$

wird. Die Kurven $v =$ konst. sind daher gerade Linien, was übrigens aus der Wahl von p unmittelbar folgt; die Kurven u $=$ konst. können nur durch Elimination von v aus den Gleichungen 3) gefunden werden.

Im allgemeinen liefert aber die Bedingung $J_1 = 0$ die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial v} L \frac{(p_u)}{p(1+p^2)} = -\frac{p_v}{1+p^2},$$

also

$$4) \quad \frac{p u}{p^2 \sqrt{1 + \dfrac{f}{p^2}}} = -U_2',$$

aus der

$$5) \quad \frac{2}{p} = e^{U_2+V_2} - e^{-(U_2+V_2)},$$

$$2\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} = e^{U_2+V_2} + e^{-(U_2+V_2)}$$

folgt. Aus der Gleichung 1) wird jetzt

$$x\frac{\sqrt{1+p^2}}{p} = +\int \frac{U}{p} du + V,$$

wo noch p aus 5) einzusetzen ist, und damit ist auch y bestimmt. Zu ähnlichem Resultat führt die Bedindung $J_2 = 0$.

Man erhält übrigens auch partikuläre Lösungen für 1). Setzt man, wie schon in § I, $x = F(u+v) + av$, $p = f(u+v)$, $u + v = s$, so wird

$$F' = -\frac{a}{1+f^2} + \frac{kf}{1+f^2},$$

und man hat sofort

$$x = -a \int \frac{ds}{1+f^2} + k \int \frac{f\,ds}{1+f^2} + av,$$

$$y = -a \int \frac{f\,ds}{1+f^2} + k \int \frac{f^2\,ds}{1+f^2} - kv.$$

Bei dem spezielleren Ansatze $x = F(u-v)$ folgt in derselben Weise $\frac{F''}{F'} = \frac{f'}{f}$, also $\frac{F''}{F'} = k$, $\frac{f'}{f} = k$,

wo wieder k eine Konstante sein muß. Es wird also

$$F' = e^{k(u-v)}, \quad f = e^{k(u+v)},$$

demnach

$$x = \frac{1}{k} e^{k(u-v)}, \quad y = \frac{1}{2k}(e^{2ku} - e^{-2kv}).$$

Dieser allerdings sehr spezielle Fall führt auf das von konfokalen Parabeln mit derselben Axe gebildete Orthogonalsystem.

§ III. Die Krümmungsradien ϱ_u, ϱ_v.

Aus den bekannten Formeln

$$\varrho_u = \frac{(x_v^2 + y_v^2)^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{\partial y}{\partial v}}, \quad \varrho_v = \frac{(x_u^2 + y_u^2)^{3/2}}{\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial u}}$$

oder

$$\varrho_u = x_v \frac{(1+q^2)^{3/2}}{\frac{\partial q}{\partial v}}, \quad \varrho_v = x_u \frac{(1+p^2)^{3/2}}{\frac{\partial p}{\partial u}}$$

und der aus § I, 2) folgenden Gleichung

$$(1+q^2) = \frac{(1+p^2)(1+\theta^2)}{(1+p\theta)^2}, \quad \frac{\partial q}{\partial v} = p_v \frac{(1+\theta^2) - \theta_v(1+p^2)}{(1+p\theta)^2}$$

folgt jetzt, wenn man θ als Funktion von u voraussetzt,

1) $$\frac{\varrho_v}{\varrho_u} = \frac{x_u p_v}{x_v p_u} \cos\omega\,(1+p\theta).$$

Da aber $p = \operatorname{tang}\alpha$ den Winkel der Tangente der Kurve $v =$ konst. mit der x Axe bedeutet, hat man

$$\frac{\varrho_v}{\varrho_u} = \frac{x_u p_v}{x_v p_u} \frac{\cos(\alpha - \omega)}{\cos\alpha},$$

in der ω eine Funktion von u allein ist. Wenn die Funktionaldeterminante von x und p gleich Null ist, hat man also

$$\frac{\varrho_v}{\varrho_u} = \frac{\cos(\alpha - \omega)}{\cos \alpha}$$

und diese Gleichung liefert das Verhältnis der Krümmungen der Netzkurven an jeder Stelle auf sehr einfache Art. Aber das ist ein sehr spezieller Fall. Denn da p jetzt eine Funktion von x ist, werden die Neigungen der Kurven $v =$ konst. gegen die x Axe bei konstantem x immer dieselben sein, und bei konstantem θ oder ω würde dasselbe auch für die Kurven $u =$ konst. gelten. Man wird dadurch aber zur Betrachtung der Gleichung

$$x_u p_v - \Omega x_v p_u = 0$$

geführt, in der Ω im allgemeinsten Falle eine Funktion von u und v ist.

Ich beschränke mich indessen auf den Fall, wo Ω gleich einer Konstanten k ist, da allgemeinere Voraussetzungen sich nicht bequem den bisherigen Betrachtungen einordnen lassen. Es ist also die partielle Differentialgleichung für $\Omega = k$ zu lösen. Aus den Gleichungen $dv : du : dp = x_u : -k x_v : 0$

folgt immer die Integralgleichung $p = c_1$.

Für $k = 1$ folgt als zweite Integralgleichung $x = c_2$, und die Lösung ist daher $x = F(p)$. Dies ist der Satz von der Funktionaldeterminante, der sich hier auf eine etwas andere Art als gewöhnlich ergibt. Ist aber $k \neq 1$, so kann man die zweite Integralgleichung aus $x_u\, du + k x_v\, dv = 0$ nicht unmittelbar finden. In der Tat führt dieser Fall auf eine Laplacesche Differentialgleichung, wenn man, unter $\lambda = e^z$ eine nun unbekannte Funktion von u, v verstehend,

$$p_u = \lambda x_u, \quad p_v = \lambda k x_v$$

setzt. Man hat dann die Gleichung

$$1) \qquad x_{uv} + \frac{z_v x_u}{1-k} - \frac{z_u k x_v}{1-k} = 0$$

mit den Koeffizienten

$$a = \frac{z_v}{1-k}, \quad b = -\frac{k z_u}{1-k}.$$

Die Invariante $J_2 = 0$ erfordert jetzt

2) $$e^{\frac{kz}{k-1}} = V' \frac{k-1}{k}, \quad \text{oder} \quad e^{\frac{kz}{k-1}} = V + U;$$

für x erhält man den Wert

3) $$x e^{\frac{z}{1-k}} = \int V_2 e^{\frac{k+1}{k-1} z} dv + U_2,$$

worin noch $e^z = \lambda$ aus 2) einzusetzen ist, und endlich wird

$$p = \int \lambda x_u \, du + \int \lambda x_v \, dv.$$

Eine speziellere Lösung von 1) erhält man natürlich auch durch den Ansatz $x = F(u + v) + \beta v$, wenn zugleich $p = f(u + v)$, $u + v = s$ genommen wird, in der Gestalt

$$x = \frac{k s}{1 - k} + a \int e^{-\int f ds} + \beta v,$$

wobei f eine willkürliche Funktion von $u + v = s$ bleibt.

§ IV. Lösung der Gleichung $x_u p_v - k x_v p_u = 0$.

Die Lösung für x und p in § III ist wegen ihres nicht symmetrischen Baues für diesen Fall weniger geeignet, denn es muß auch y bestimmt werden. Durch Einführung von $\lambda = e^z$ erhält man das folgende System von Gleichungen

1) $$\begin{aligned} x_u &= k \lambda p_u, & x_v &= \lambda p_v, \\ y_u &= \lambda p p_u k, & y_v &= \lambda q p_v \end{aligned}$$

und hieraus die Bedingungungen der Integrabilität:

$$\begin{aligned} z_v k p_u - z_u p_v &= p_{uv}(1 - k), \\ z_v k p p_u - z_u p_v q &= p_{uv}(q - p k) + q_u p_v - k p_u p_v. \end{aligned}$$

Durch Auflösung nach z_u, z_v findet man

$$\begin{aligned} - z_v k p_u (p - q) &= p_{uv} k (p - q) - (q_u p_v - k p_u p_v), \\ - z_u p_v (p - q) &= p_{uv} (p - q) - q_u p_v + k p_u p_v. \end{aligned}$$

Durch Einsetzung der Werte

$$p - q = \frac{(1 + p^2)\theta}{1 + p\theta}, \quad q_u = p_u \frac{(1 + \theta^2)}{(1 + p\theta)^2}$$

erhält man

$$2)\quad \begin{aligned} -z_v &= \frac{p_{uv}}{p_u} + p_v \frac{(k(1+p\theta)^2 - (1+\theta^2))}{(1+p^2)(1+p\theta)} \frac{1}{k\theta}, \\ -z_u &= \frac{p_{uv}}{p_v} + p_u \frac{(k(1+p\theta)^2 - (1+\theta^2))}{(1+p^2)(1+p\theta)} \frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

so daß nur noch die Bedingung der Integrabilität für z zu erfüllen bleibt. Um diese in eine geeignetere Form zu bringen, muß man die rechte Seite von 2) in Partialbrüche zerlegen. Man erhält so

$$\frac{k(1+p\theta)^2 - (1+\theta^2)}{(1+p^2)(1+p\theta)} = \frac{\alpha + \beta p}{1+p^2} + \frac{\gamma}{1+p\theta}$$

und es wird $\alpha = k - 1$, $\gamma = -\theta^2$, $\beta = \theta(k+1)$.

Aus 2) folgt jetzt

$$3)\quad \begin{aligned} -z_v &= \frac{\partial}{\partial v} L(p_u) + \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial v}(\operatorname{arctg} p) + \beta \frac{\partial}{\partial v} L\sqrt{1+p^2} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\gamma}{\theta}\frac{\partial}{\partial v} L(1+p\theta) \right\} \frac{1}{k\theta}, \\ -z_u &= \frac{\partial}{\partial u} L(p_v) + \left\{ \alpha \frac{\partial}{\partial u}(\operatorname{arctg} p) + \beta \frac{\partial}{\partial u} L\sqrt{1+p^2} \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\gamma}{\theta}\frac{\partial}{\partial u} L(1+p\theta) \right\} \frac{1}{\theta}, \end{aligned}$$

also schließlich

$$4)\quad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} L\left(\frac{p_u}{p_v}\right) + \left\{ \alpha \operatorname{arctg} p + \beta L\sqrt{1+p^2} + \frac{\gamma}{\theta} L\, 1 + p\theta \right\} \frac{1-k}{k\theta} = 0,$$

woraus für $\sigma = \frac{1-k}{k\theta}$, $\alpha' = \alpha\sigma$, $\beta' = \beta\sigma$, $\gamma' = \gamma\sigma$,

$$5)\quad L\left(\frac{p_u}{p_v}\right) + \alpha' \operatorname{arctg} p + \beta' L(1+p^2) + \frac{\gamma'}{\theta} L(1+p\theta) = F(u+v) + \Phi(u-v)$$

mit den beiden willkürlichen Funktionen F, Φ folgt. Im Falle $k = 1$ hat man aus 3) $z_v = z_u$, es muß also z selbst nur von $u + v$ abhängen. Diese Bedingung ist aber immer erfüllt, wenn p eine willkürliche Funktion von $u + v$ und $\Phi =$ konst ist. Dies ist der bereits früher ausgeschiedene Fall. Ist dagegen $k \neq 1$, so hat man in 5) eine lineare partielle Differentialgleichung für p, von der eine Integralgleichung $p = c_1$ ist. Um zu einer zweiten zu gelangen, setze man $u + v = u_1$, $u - v = v_1$, man erhält dann

$$p_{u_1} + p_{v_1} = e^{-\alpha' \operatorname{arctg} p}\, e^{F(u_1)}\, e^{\Phi(v_1)} (p_{u_1} - p_{v_1})\, (1 + p^2)^{-\beta'}\, (1 + p\,\theta^{-\frac{\gamma'}{\theta}}$$

oder in vereinfachter Form

$$6) \quad p_{u_1}[1 - f(u_1)\,\varphi(v_1)\,\Omega(p)] + p_{v_1}[1 + f(u_1)\,\varphi(v_1)\,\Omega(p)] = 0.$$

Diese Gleichung liefert die zweite Integralgleichung, wenn man $\varphi(v_1)$ als konstant $= \varkappa$ ansieht, in der Form

$$d u_1 : d v_1 = 1 - \varkappa\,\Omega(c_1) f(u_1) : 1 + \varkappa\,\Omega(c_1) f u_1$$

oder

$$\int d u_1 \frac{(1 + \varkappa\,\Omega(c_1) f(u_1)}{1 - \varkappa\,\Omega(c_1) f(u_1)} = v_1 + c_2$$

und das allgemeine Integral ist daher

$$7) \qquad \int d u_1 \frac{(1 + \varkappa\,\Omega(p) f(u))}{1 - \varkappa\,\Omega(p) f(u_1)} - v_1 = A(p),$$

wo A eine willkürliche Funktion bedeutet. Aus der Gleichung 7) ergibt sich jetzt p als Funktion von u_1, v_1; daraus dann durch Quadratur z, endlich auch x und y. Die lineare Differentialgleichung 6) läßt sich aber auch noch in anderen Fällen integrieren, so z. B., wenn $f(u_1) \cdot \varphi(v_1)$ sich als Quotient zweier homogener ganzer Funktionen derselben Ordnung schreiben läßt.

Hiermit ist aber die Aufgabe des § IV über die Konstruktion einer merkwürdigen Gruppe von Netzkurven gelöst, allerdings nicht in voller Allgemeinheit, da die Lösung von 5) die vollständige Integration dieser Gleichung erfordert.