BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1976

MÜNCHEN 1977

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Kontaktrelationen (4. Mitteilung)

Von Georg Aumann in München

Vorgelegt am 9. Januar 1976

Im folgenden wird versucht, die „statische Vorstufe“ der Katastrophentheorie, d. h. die darin anstehenden Zeit- und Parameter-freien Grundbegriffe und deren Beziehungen in verallgemeinernder Weise mit Hilfe von Kontaktrelationen, oder was dasselbe ist, mittels Hüllenoperatoren zu beschreiben. Wird die „Stetigkeit“ bzw. „Zumutbarkeit“ der Veränderung eines veränderlichen Systems mittels Hüllenoperatoren t bzw. a erklärt, so ergeben sich die stabilen, genauer *t, a-stabilen* Teile des Systems mittels der „*Standardfunktion*“ **S**, einer ganz bestimmten Abbildung, welche allgemein zwei Hüllenoperatoren t, a einen dritten $h = \mathbf{S}(t, a)$ zuordnet:

$$(t, a) \mapsto h = \mathbf{S}(t, a),$$

so daß die t, a-stabilen Teile genau die h-offenen Mengen sind. Es werden einige Eigenschaften von **S** bewiesen; andere weitergehende oder ins Spezielle zielende Fragen betr. **S** werden angesprochen, aber hier nicht zu Ende verfolgt.

1. Der Stabilitätsbegriff der Katastrophentheorie.

Die Beschreibung eines kausal sich verändernden Systems denkt man sich gewöhnlich in der Form, daß der Zustand des Systems durch eine Größe x, etwa eine Abbildung mit Werten aus einem Vektorraum, eindeutig gekennzeichnet ist und dabei der zeitliche Ablauf durch eine Differentialgleichung $\frac{\partial x}{\partial \tau} = f(x)$ und den Anfangszustand x_0, τ_0 determiniert ist. Die Größe x braucht der Beobachtung nicht zugänglich zu sein, hat also mehr theoretischen Charakter; aber man setzt voraus, daß es neben x eine beobachtbare Größe y, etwa wieder als Vektor zusammengefaßt, gibt, die eine Funktion von x ist: $y = g(x)$. Die Problematik besteht nun darin, daß y im allgemeinen keiner autonomen

Differentialgleichung genügt, insbesondere dann nicht, wenn die Abbildung $g: Z \to B$, vom Zustandsraum Z in den Beobachtungsraum B nicht umkehrbar ist.

Zeigen x als Funktion von τ und g als Funktion von x geeignetes stetiges Verhalten, so könnten wir $y(\tau) := g(x(\tau))$ wenigstens als stetige Funktion von τ ansehen. Dies setzt voraus, daß wir in B eine *Topologie* gegeben haben, etwa durch das System $\mathfrak{G}$ der offenen Mengen. Dann existiert zu jeder Umgebung G von $y_0 = y(\tau_0)$ ein Zeitintervall $(\tau_0; \tau_0 + \delta)$, sodaß während dieser Zeitspanne y innerhalb G variiert.

Zur weiteren Beurteilung der Veränderung von y verbleibt in Ermangelung einer deterministischen Beschreibung nur ein Ausweichen in „Ermessensfragen"; hierzu dient z. B. der Begriff der „*Zumutbarkeit*" einer bestimmten Veränderung. Die Katastrophentheoretiker [1] erklären dies mit Hilfe einer in B einzuführenden *Äquivalenzrelation* $\sim$: Eine Veränderung von y von y_0 nach y_1 heißt *zumutbar*, wenn $y_1 \sim y_0$. Damit erhalten wir folgende maßgebliche Definition der Stabilität:

Die Stelle y_0 in B heißt *stabil*, wenn es eine Umgebung G von y_0 gibt, die ganz in der Äquivalenzklasse $[y_0]$ von y_0 enthalten ist:

(0) $$\bigvee_{G \in \mathfrak{G}} y_0 \in G \subset [y_0];$$

kurz gesagt: Die von y_0 aus mögliche Veränderung bleibt innerhalb eines hinreichend kurzen Zeitintervalls im Bereich des von y_0 aus Zumutbaren.

1.1. Die Bedingung (0) hat nichts Neuartiges an sich; sie besagt nämlich einfach die Stetigkeit der kanonischen Abbildung $y \mapsto [y]$ an der Stelle $y = y_0$, wobei man sich im Raum der Äquivalenzklassen auf die *diskrete* Topologie bezieht. Es ist sinnvoll, die Situation zu verallgemeinern und in die Theorie der Kontaktrelationen einzuordnen, indem man einmal anstelle der Topologie in B einen Hüllenoperator t (mit $\mathfrak{G}_t$ als System der t-offenen Mengen) und anstelle der Äquivalenz einen weiteren Hüllenoperator a treten läßt, und noch einen Schritt weiter gehend, Stabilität nicht nur für einzelne Punkte, sondern auch für Teilmengen von B formuliert. Wir gelangen damit zu folgender *Definition:*

Es seien t und a Hüllenoperatoren in B; dann heißt eine Teilmenge Y von B *t, a-stabil*, wenn

(1) $$\bigvee_{G \in \mathfrak{G}_t} Y \subset G \subset aY.$$

In dieser Formulierung können wir uns noch vom Existenzquantor befreien, wenn wir bedenken, daß $\mathfrak{G}_t$ ein S-System ist, d. h. gegenüber Bildung der Vereinigung von beliebig vielen Mengen des Systems geschlossen ist. Wenn es ein G der verlangten Art gibt, dann auch ein größtes, und das ist dann der t-offene Kern von aY, d. h. $\mathbf{C}t\mathbf{C}aY$ ($\mathbf{C}$ die Komplementbildung). Wir erhalten damit:

(1′) $$Y \in \mathfrak{P}(B) \ t, a\text{-stabil}: \Leftrightarrow \ Y \subset \mathbf{C}t\mathbf{C}aY.$$

(Falls $Y \not\subset \mathbf{C}t\mathbf{C}aY$, so heißt Y *t, a-katastrophisch*).

Das System aller t, a-stabilen Teilmengen von B bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}_{t,a}$. Das Studium von $\mathfrak{S}_{t,a}$ ist gewissermaßen die „statische Vorstufe" der Katastrophentheorie, da hier die Abhängigkeit von Parametern, insbesondere der zeitliche Ablauf außer Acht gelassen wird, und mit der Definition (1′) die Zumutbarkeit nur in Hinblick auf „kurzfristige" Änderungen getestet wird.

1.2. Im Folgenden abstrahieren wir von der speziellen Bedeutung von t und a, wie es die Betrachtungen in 1. verlangen würden, und setzen von nun an t und a als beliebig gegebene Hüllenoperatoren in B voraus, d. h. als extensive, isotone und idempotente Abbildungen der Potenzmenge $\mathfrak{P}(B)$ von B in sich. Es erweist sich, auch unter diesen allgemeineren Voraussetzungen, daß $\mathfrak{S}_{t,a}$ ein S-System ist, d. h. als das System der h-offenen Teilmengen eines gewissen, eindeutig durch t und a bestimmten Hüllenoperators h in B angesehen werden kann, nämlich gemäß $\mathfrak{S}_{t,a} = \mathfrak{G}_h$, womit wir zu einer Abbildung

(2) $$\mathbf{S} : \mathbf{H} \times \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$$

($\mathbf{H}$ der vollständige Verband aller Hüllenoperatoren in B) gelangen, welche wir die *Standardabbildung* nennen, und die jedem Paar (t, a) von Hüllenoperatoren in eindeutiger Weise einen Hüllenoperator

(2′) $$h = \mathbf{S}(t, a) \ \text{mit} \ \mathfrak{G}_h = \mathfrak{S}_{t,a}$$

zuordnet.

2. *Grundeigenschaften von* $\mathfrak{S}_{t,a}$ *und* $\mathbf{S}(t, a)$.

Ist $s \in \mathbf{H}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}_s$ das System der s-abgeschlossenen Mengen $F\,(sF = F)$ und mit $\mathfrak{G}_s$ das System der s-offenen Mengen G ($k_s G = G$, wobei k_s die s zugeordnete „Kernoperation" $\mathbf{C}s\,\mathbf{C}$, welche intensiv ($\bigwedge_Y k_s Y \subset Y$), isoton und idempotent ist).

2.1. Satz. *Das System* $\mathfrak{S}_{t,a} := \{Y : Y \in \mathfrak{P}(B) \wedge Y \subset \mathbf{C}t\mathbf{C}aY\}$ *ist ein S-System; auf* $\mathfrak{S}_{t,a}$ *ist die Abbildung* $\sigma := \mathbf{C}t\mathbf{C}a$ *eine Hüllenoperation.*

Beweis. 1. Es sei $X_i \in \mathfrak{S}_{t,a}$ für $i \in I$. Dann folgt $X_i \subset \subset \mathbf{C}t\mathbf{C}aX_i \subset aX_i$, also $\bigcup_i X_i \subset \bigcup_i \mathbf{C}t\mathbf{C}aX_i = \mathbf{C} \bigcap_i t\mathbf{C}aX_i \subset \subset \bigcup_i aX_i \subset a \bigcup_i X_i$. Nun ist aber $F := \bigcap_i t\mathbf{C}aX_i = tF$, also mit $G := \mathbf{C}F \in \mathfrak{G}_t$

$$\bigcup_i X_i \subset G \subset a(\bigcup_i X_i), \text{ woraus für } S := \bigcup_i X_i$$
$$S \subset \mathbf{C}t\mathbf{C}aS$$

folgt. 2. σ ist extensiv auf $\mathfrak{S}_{t,a}$ (Definition von $\mathfrak{S}_{t,a}$). $\sigma = k_t a$ ist als Zusammensetzung von isotonen Abbildungen isoton. Somit erhalten wir $\bigwedge_X \sigma X \subset \sigma\sigma X$. Schließlich ist $\sigma X = k_t aX \subset aX$, also $a\sigma X \subset aaX = aX$, und damit $\sigma\sigma X \subset k_t aX = \sigma X$, also $\sigma\sigma = \sigma$ auf $\mathfrak{S}_{t,a}$.

2.2. Die zum S-System $\mathfrak{S}_{t,a}$ gehörige Hüllenoperation h auf $\mathfrak{P}(B)$ bezeichnen wir mit $\mathbf{S}(t,a) := h$; dabei ist $h(Y) := \{\mathbf{C}S : : S \in \mathfrak{S}_{t,a} \wedge \mathbf{C}S \subset Y\}$ (übliche Definition des zum D-System aller $\mathbf{C}S$, $S \in \mathfrak{S}_{t,a}$ gehörigen Hüllenoperators); j bezeichne die identische Abbildung von $\mathfrak{P}(B)$ (kleinster Hüllenoperator) mit $\mathfrak{G}_j = \mathfrak{F}_j = \mathfrak{P}(B)$. Es gilt der

Satz 1. *Für jedes* $h \in \mathbf{H}$ *ist* $\mathbf{S}(j, h) = j$ *und* $\mathbf{S}(h, j) = h$. – 2. *Zu jedem S-System* $\mathfrak{S}$ *in* $\mathfrak{P}(B)$ *gibt es (mindestens) ein Paar* t, a *mit* $\mathfrak{S}_{t,a} = \mathfrak{S}$.

Beweis. 1. $Y \subset \mathbf{C}j\mathbf{C}hY \leftrightarrows Y \subset hY \leftrightarrows Y \in \mathfrak{P}(B) \leftrightarrows Y \in \mathfrak{G}_j$; ferner ist $Y \subset \mathbf{C}h\mathbf{C}jY \leftrightarrows Y \subset k_h Y \leftrightarrows Y = k_h Y \leftrightarrows Y \in \mathfrak{G}_h$. – 2. Wählt man bei gegebenem $\mathfrak{S}$ den Hüllenoperator h so, daß $\mathfrak{G}_h = \mathfrak{S}$, dann ist, wie in 1. gezeigt, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_{h,j}$.

2.3. Satz 2.2. löst die *Aufgabe*, zu gegebenem $h \in \mathbf{H}$ ein Paar t, a zu ermitteln mit

(3) $$h = \mathbf{S}(t, a).$$

Allgemein ist hierzu zu bemerken:

h, t, a erfüllen (3) *genau dann, wenn*

(3') $$\curlyvee_Y Y \subset \mathbf{C}t\mathbf{C}aY \succ Y \in \mathfrak{G}_h.$$

Die Lösung von (3) ist i. a. nicht eindeutig; hierzu ein *Beispiel:*

Es sei h der Hüllenoperator der gewöhnlichen Topologie auf der reellen Zahlgeraden, und a^+ der Hüllenoperator mit $a^+ Y := Y \cup \{x_0\}$, worin x_0 eine festgewählte Zahl bezeichnet. Es gilt sowohl

$$h = \mathbf{S}(h, j) \text{ als auch } h = \mathbf{S}(h, a^+) \text{ und } a^+ \neq j,$$

wie leicht zu bestätigen ist.

2.3.*1*. *Satz. Gilt für die Hüllenoperatoren* a, a', t, t'

$$t \geqslant t' \text{ und } a \leqslant a', \text{ so folgt daraus}$$

$$\mathfrak{S}_{t,a} \subset \mathfrak{S}_{t',a'} \text{ und } \mathbf{S}(t, a) \geqslant \mathbf{S}(t', a').$$

Beweis. Aus $Y \subset k_t a Y$ schließt man auf $Y \subset k_t a' Y \subset k_{t'} a' Y$, weil $t \geqslant t' \succ \mathbf{C}t' \geqslant \mathbf{C}t \succ k_{t'} = \mathbf{C}t'\mathbf{C} \geqslant \mathbf{C}t\mathbf{C} = k_t$.

2.3.2. Satz 2.3.1. gestattet unmittelbar eine Aussage über die Mannigfaltigkeit der Lösungen (t, a) der Aufgabe (3) von 2.2.1. *Satz. Sind* (t', a') *und* (t'', a'') *Lösungen von* (3) *mit* $t' \geqslant t''$ *und* $a' \leqslant a''$, *so ist auch jedes Paar* (t, a) *mit* $t' \geqslant t \geqslant t''$ *und* $a' \leqslant a \leqslant a''$ *eine Lösung von* (3) („*Intervallkonvexität*" *der Lösungsmannigfaltigkeit*).

2.2.3. Aus (3') läßt sich ein hinreichendes Kriterium für die Gültigkeit von (3) ableiten. Zu diesem Zweck erweitern wir das System $\mathfrak{G}_t := \{\mathbf{C}tY : Y \in \mathfrak{P}(B)\}$ zum kleinsten umfassenden D-System

$$\mathbf{D}\mathfrak{G}_t := \{\textstyle\bigcap \mathfrak{G}' : \mathfrak{G}' \subset \mathfrak{G}_t\}$$

und bezeichnen die zu $\mathbf{D}\mathfrak{G}_t$ gehörige Hüllenoperation mit $\underline{t}$. (Zu dieser Bezeichnung sei bemerkt: Ist t eine *reguläre* Hüllenoperation, d. h. ist jede t-abgeschlossene Menge als Durchschnitt von t-offenen Mengen darstellbar, so gilt $\underline{t} \leqslant t$). Dann impliziert $Y \subset \mathbf{C}t\mathbf{C}aY \subset aY$ die Inklusion $\underline{t}Y \subset aY$, und wir erhalten den *Satz. Wenn* $\curlywedge_Y \underline{t}Y \subset aY \succ Y \in \mathfrak{G}_h$, *dann gilt* (3).

3. Die Einsicht in die durch (3) gegebene Beziehung zwischen drei Hüllenoperationen h, t, a kann mit den hier aufgedeckten Eigenschaften von **S** als noch nicht genügend geklärt angesehen werden; auch Fragen, wie sich der Zusammenhang (3) gestaltet, wenn man h, t, a gewisse zusätzliche Eigenschaften zubilligt, z. B. wenn alle drei Hüllenoperatoren topologisch sind (wobei die sogenannten „minimal begrenzten" Mengen [2] eine Rolle spielen dürften), fordern zu weiteren Untersuchungen auf.

Literatur

[1] H. J. Sussmann, Catastrophe Theory, Synthese *31* (1975), 229–270;

[2] G. Aumann, Reelle Funktionen, Berlin 1969.

Zusatz bei der Korrektur. Die hier unter Bezugnahme auf den Verband $\mathfrak{P}(B)$ dargelegten Grundbegriffe der Katastrophentheorie lassen sich in natürlicher Weise in jedem vollständigen Verband entwickeln, was der Gegenstand einer in Vorbereitung befindlichen Note sein wird.