BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1978

MÜNCHEN 1979

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der abbildungstheoretische Zugang zur Topologie (2. Mitteilung)

Von Georg Aumann, München.

Professor J. Aczél zum 55. Geburtstag gewidmet

0. *Einleitung.* Ausgangspunkt der 1. Mitteilung [1] war die Methode der Analysis, eine Abbildung $f: X \to Y$ anhand ihrer Einengungen $f \mid X'$, $X' \subset X$, zu studieren; dabei ergab sich bei Annahme natürlicher Forderungen an Systeme solcher Einengungen der Begriff des topologischen Raumes, und zugleich eine „*abbildungstheoretische*" *Kennzeichnung des topologischen Raumes.* In dieser zweiten Mitteilung ist für die Frage nach der Art und Weise eines Studiums von Abbildungen die etwas allgemeinere Vorstellung richtungsweisend, wonach sich nämlich nach Einbettung von f in die Familie $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X, Y)$ aller Abbildungen von X in Y jede Eigenschaft von f deuten läßt als Äquivalenzklasse einer gewissen Äquivalenzrelation $\approx$ in $\mathfrak{F}$, so daß die ursprüngliche Aufgabe, nämlich $f: X \to Y$ hinsichtlich einer Eigenschaft zu studieren, nun erscheint als das Studium einer Äquivalenzrelation $\approx$ in $\mathfrak{F}$. Hierzu dient als Werkzeug ein gewisses System von „Grundäquivalenzrelationen $\sim_x$, $x \in X$; erfüllt dieses zwei naheliegende Eigenschaften, so liegt eine Strukturierung von X als „Abschlußraum" (im Sinne von E. Čech) vor, und umgekehrt. Damit hat man auch eine *abbildungstheoretische Kennzeichnung des Abschlußraumes.* Das gewonnene Ergebnis erlaubt eine gewisse Vereinfachung des in [1] hinsichtlich topologischer Räume erhaltenen Satzes. Abschließend sei hierzu noch bemerkt: Bei beiden Kennzeichnungen handelt es sich, wie man sagen könnte, um „theoretische Motivationen" im Gegensatz zu den „praktischen Motivationen"; diese letzteren sind nichts anderes als die übliche Verallgemeinerung eines praktischen Beispiels, d. h. man gewinnt ausgehend von einer bekannten speziellen Situation durch Abstreichen spezieller Eigenschaften den neuen Begriff, während bei den ersteren der Weg umgekehrt ist: Ausgehend von einer allgemeinen Sachlage

ergibt sich der neue Begriff durch Hinzunahme von, aus der allgemeinen Situation heraus verständlichen, speziellen Eigenschaften.

In einem 2. Abschnitt wird eine Verallgemeinerung behandelt, indem das System $\{\sim_x : x \in X\}$ der Grundäquivalenzen in $\mathfrak{F}$ ersetzt wird durch ein System $\{\leqslant_x : x \in X\}$ schwacher Ordnungen $\leqslant_x$ in $\mathfrak{F}$ und Y durch eine schwach geordnete Menge (mit wenigstens 3 Elementen).

1. *Kennzeichnung des Abschlußraumes*

1.1. Die viele Antworten zulassende Frage: Wie soll man eine Abbildung $f: X \to Y$ studieren? kann nur durch Konkretisierung eine bestimmte Antwort erhalten. In Richtung einer solchen engeren Fassung der Frage machen wir folgende Annahmen:

(A) Anstelle einer einzelnen Abbildung $f: X \to Y$ betrachten wir gleich die ganze Familie $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(X, Y)$ aller $f: X \to Y$ bei festem $X \neq \varnothing$ und Y mit einer Mächtigkeit $\geqslant 2$. Anstelle einer Eigenschaft von f tritt dann eine Äquivalenzklasse einer gewissen Äquivalenzrelation $\approx$ in $\mathfrak{F}$.

(B) Nicht jedes beliebige $\approx$ in $\mathfrak{F}$ wird interessieren, sondern nur ein solches, welches bezüglich einer oder mehrerer von gegebenen „Grundäquivalenzrelationen" $\sim_c$ konsistent ist, d. h. der Bedingung

$$\bigwedge_{f, g \in \mathfrak{F}} (f \sim_c g \succ f \approx g)$$

genügt. Wir betrachten gleich ein ganzes System $\{\sim_c : c \in C\}$ solcher Grundäquivalenzrelationen $\sim_c$ in $\mathfrak{F}$. Ein solches System heißt *distinktiv*, wenn

$$\bigwedge_{f, g \in \mathfrak{F}} (\bigwedge_{c \in C} f \sim_c g) \succ f = g.$$

Z. B. ist $\mathfrak{S}_0 := \{=_x : x \in X\}$ mit $f =_x g :\leftrightarrows f(x) = g(x)$ distinktiv.

(C) Das System $\mathfrak{S}_0$ ist zwar trivialer Art, aber es legt den Gedanken nahe, das Grundäquivalenzsystem in der Form

$$\text{(Ae)} \qquad \mathfrak{S} := \{\sim_x : x \in X\}$$

vorzugeben, wobei also jedem $x \in X$ eine *Äquivalenzrelation* $\sim_x$ *in* $\mathfrak{F}$ zugeordnet ist; die Vorgabe von $\mathfrak{S}$ in dieser Form geht in

Richtung einer topologischen Betrachtungsweise. Zu vorgegebenem $\mathfrak{S}$ können wir die folgenden Mengen bilden: Für $f, g \in \mathfrak{F}$ sei

(1) $\quad [f \sim g] := \{x : x \in X \wedge f \sim_x g\}$,

(2) $\quad [f = g] := \{x : x \in X \wedge f(x) = g(x)\}$,

und erhalten als eine erste Beziehung zwischen diesen Mengen:

(I) $\quad \bigwedge_{f, g \in \mathfrak{F}} [f \sim g] \subset [f = g]$

hat die Disjunktivität von $\mathfrak{S}$ zur Folge; denn (I) ist äquivalent mit

(I′) $\quad \bigwedge_{f, g \in \mathfrak{F}; x \in X} f \sim_x g > f(x) = g(x)$.

1.2. Um zu einer reicheren Struktur in $\mathfrak{F}$ zu gelangen, muß man von $\mathfrak{S}$ noch mehr fordern; naheliegend ist die folgende *Monotonieeigenschaft*:

(M) $\quad \bigwedge_{f, g, f', g' \in \mathfrak{F}} [f = g] \subset [f' = g'] > [f \sim g] \subset [f' \sim g']$

(Wenn ein Paar von Abbildungen in mehr Punkten übereinstimmt als ein anderes, so ist es auch bezüglich mehr Punkte äquivalent.) Die Voraussetzung der Bedingung (M) hat erhebliche Konsequenzen. Wir sagen, das System $\mathfrak{S}$ erfülle die *Bedingung* (D), wenn gilt: Es gibt eine Abbildung $k: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$, so daß für alle $f, g \in \mathfrak{F}$ und alle $x \in X$

(3) $\quad f \sim_x g \mathrel{>\!\!<} x \in k([f = g])$,

oder was dasselbe ist, $f \sim g = k([f = g])$ für alle $f, g \in \mathfrak{F}$, und ferner $k(A \cap B) = k(A) \cap k(B)$ für alle $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ und $k(X) = X$.

Nun gilt der

Satz. $\quad$ (Ae) $\wedge$ (M) $\mathrel{>\!\!<}$ (D).

Beweis. (α) *Zu* $>$. Aus (M) folgt speziell

$$[f = g] = [f' = g'] > [f \sim g] = [f' \sim g']$$

für beliebige f, g, f', g' aus $\mathfrak{F}$, was gleich bedeutend ist mit der Existenz einer Abbildung

$$k : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X) \text{ mit } [f \sim g] = k([f = g]);$$

denn wegen $\# Y \geqslant 2$ kann $[f = g]$ jede beliebige Teilmenge von X sein. Dabei ist k isoton. Zum Nachweis der $\cap$-Distributivität von k bemerken wir, daß die (vorausgesetzte) Transitivität aller $\sim_x$ gleichbedeutend ist mit

(4) $\quad \bigwedge_{f,g,h \in \mathfrak{F}} [f \sim g] \frown [g \sim h] \subset [f \sim h],$

so daß mit $A := [f = g]$, $B := [g = h]$ und $C := [f = h]$ gilt $k(A) \frown k(B) \subset k(C)$. Nun ist aber allgemein $C \subset \mathbf{C}(A \dotplus B)$. Zusammen mit der Isotonie von k erhalten wir damit

(5) $\quad k(A) \frown k(B) \subset k\left(\mathbf{C}(A \dotplus B)\right)$ für alle $A, B \in \mathfrak{P}(X)$.

Wenden wir (5) an auf eine beliebige disjunkte Dreiteilung von X, $A_0 \smile A_1 \smile A_2 = X$, so folgt $k(A_0 \smile A_1) \frown k(A_0 \smile A_2) \subset k(A_0)$, und da wegen der Isotonie von k auch die umgekehrte Inklusion gilt, als dann

(6) $\quad k(A_0 \smile A_1) \frown k(A_0 \smile A_2) = k(A_0).$

Betrachten wir nun eine Zerlegung von X in vier beliebige disjunkte Teile, $P \smile Q \smile R \smile S = X$, so folgt aus den Tritomien $Q \smile P \smile (R \smile S)$ und $Q \smile R \smile (P \smile S)$ gemäß (6)

$$k(Q \smile P) \frown k(Q \smile S \smile R) = k(Q),$$
$$k(Q \smile R) \frown k(Q \smile S \smile P) = k(Q).$$

$\frown$-Multiplikation der letzten beiden Gleichungen ergibt mit (6)

$$k(Q \smile P) \frown k(Q \smile R) \frown k(Q \smile S) = k(Q),$$

was wegen $k(Q \smile P) \frown k(Q \smile R) \subset k\left(\mathbf{C}(P \dotplus R)\right) = k(Q \smile S)$ sich (gemäß (5)) schließlich auf

$$k(Q \smile P) \frown k(Q \smile R) = k(Q)$$

reduziert. – Außerdem ist $k(X) = k([f = f]) = [f \sim f] = X$ wegen der Reflexivität der $\sim_x$.*)

* Dafür, daß aus dem Bestehen von (5) und der Isotonie von k die $\frown$-Distributivität von k folgt, hat W. Benz [3] auf dem Internationalen Symposium über Funktionalgleichungen in Graz 1978 einen von den obigen Überlegungen unabhängigen Beweis gegeben. Hierzu sei noch bemerkt, daß sich die obige Beweismethode *für den Fall* $\# Y \geqslant 3$ auch durch eine kombinatorische Betrachtung ersetzen läßt, wie sie nachfolgend in 2.2., Beweisteil "*Zu* (II)", *Fall* (ii), verwendet ist.

(β) *Zu* $\prec$. Aus der $\frown$-Distributivität von k folgt sofort die Isotonie, d. h. (M). Ferner erweisen sich die durch

$$f \sim_x g : \Leftrightarrow x \in k([f = g])$$

definierten Relationen $\sim_x$ in $\mathfrak{F}$ für jedes $x \in X$ als Äquivalenzrelationen. Denn $x \in X \succ x \in k(X) = k([f = f]) \succ f \sim_x f$, d. h. $\sim_x$ ist reflexiv. Die Symmetrie von $\sim_x$ ist evident. Und schließlich folgt aus der allgemein gültigen Inklusion

$$[f = g] \frown [g = h] \subset [f = h]$$
$$[f \sim g] \frown [g \sim h] = k([f = g]) \frown k([g = h]) =$$
$$k([f = g] \frown [g = h]) \subset k([f = h]) = [f \sim h],$$

d. h. die Transitivität der $\sim_x$.

1.3. Das Ergebnis von **1.2.** liefert nun die „abbildungstheoretische" Kennzeichnung des sogenannten „Abschlußraumes". Nach E. Čech [2] heißt die Menge X ein *Abschlußraum* (X, h) mit den „Abschlußoperator" h, wenn $h : \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$ und für alle $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ gilt: (1.) $h(A) \subset A$, (2.) $h(A \smile B) = h(A) \smile h(B)$, und (3.) $h(\varnothing) = \varnothing$.

Jedes k gemäß (D) von **1.2.** liefert in

(7) $\qquad h := \mathbf{C} \circ k \circ \mathbf{C}$

eine Abbildung h mit den Eigenschaften (2.) und (3.). Um die Situation in **1.2.** der eines Abschlußraumes anzugleichen, haben wir von k noch die zu (1.) duale Eigenschaft

(I″) $\qquad k(A) \subset A$ für alle $A \in \mathfrak{P}(X)$

zu fordern, was gemäß (3) mit (I′) äquivalent ist. Damit gilt der

Satz. X ist genau dann Abschlußraum, wenn $\mathfrak{S} := \{\sim_x : x \in X\}$ (Ae), (M) und (I) erfüllt.

Bemerkung. Durch die Zunahme von (I) kommt die Distinktivität von $\mathfrak{S}$ herein. Es genügt aber nicht, anstelle von (I) nur die Distinktivität von $\mathfrak{S}$ zu fordern; denn die Distinktivität von $\mathfrak{S}$ ist äquivalent mit

(I_0) $\qquad \curlywedge_{T \in \mathfrak{P}(X)}\, k(T) = X \succ T = X,$

was nur eine *Folge* von (I″) ist.

1.4. Das Ergebnis von **1.3.** erlaubt den Satz von der abbildungstheoretischen Kennzeichnung des topologischen Raumes ([1], S. 69) zu verschärfen, d. h. von der damaligen Bedingung $\# Y \geqslant 3$ zu befreien, und diese durch die schwächere $\# Y \geqslant 2$ zu ersetzen. Indem wir noch die damaligen Bedingungen (a) und (b) ([1], S. 69) in eine zusammenfassen, nämlich in

$$\text{(T)} \qquad \bigwedge\nolimits_{f,g,f',g' \in \mathfrak{F}} [f \sim g] \subset [f' = g'] \succ\!\!\prec [f \sim g] \subset [f' \sim g'],$$

erhalten wir den

Satz. X ist genau dann topologischer Raum, wenn (Ae) und (T) gelten.

Bemerkung. Den Zusammenhang der obigen Betrachtungen mit bekannten Begriffen ersieht man im Falle des topologischen Raumes aus dem Umstand, daß die Mengen $[f \sim g]$ mit den offenen Mengen des topologischen Raumes identisch sind. Die Aussage $f \sim_x g \succ\!\!\prec x \in [f \sim g] \subset [f = g]$ interpretiert sich daher wie folgt: f und g liegen in derselben Äquivalenzklasse von $\sim_x$ genau dann, wenn x enthalten ist in einer Umgebung von x, auf der f und g identisch gleich sind. Die Äquivalenzklassen von $\sim_x$ sind also genau diejenigen, wie sie bei der Definition des „Abbildungskeimes“ bzgl. des Punktes x auftreten.

2. *Geordnete Systeme von Abbildungen*

2.1. Zu einer gewissen Verallgemeinerung der vorausgehenden Betrachtungen gelangt man, wenn man anstelle der punktbezogenen Äquivalenzrelationen $\sim_x$ in $\mathfrak{F}$ punktbezogene schwache Ordnungen $\leqslant_x$ in $\mathfrak{F}$ treten läßt und die Bildmenge Y als schwach geordnet voraussetzt. (Die binäre Relation $\leqslant$ in der Menge Y heißt eine *schwache Ordnung* (in Y), wenn für alle $x, y, z \in Y$ gilt

$$y \leqslant y \text{ und } (x \leqslant y \wedge y \leqslant z) \succ x \leqslant z.$$

Insbesondere ist jede Äquivalenzrelation eine schwache Ordnung).

2.2. Satz. *Voraussetzung:* X und Y seien beliebige Mengen mit $X \neq \varnothing$ und $\# Y \geqslant 2$, $k: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$, $(Y, \leqslant)$ sei schwach geordnet, $\mathfrak{F}$ der System aller Abbildungen $f: X \to Y$,

$[f \leqslant g] := \{x : x \in X \wedge f(x) \leqslant g(x)\}$ und für jedes $x \in X$ sei durch

(8) $f \leqslant_x g :\Leftrightarrow x \in k([f \leqslant g])$ für $f, g, \in \mathfrak{F}$ eine binäre Relation $\leqslant_x$ in $\mathfrak{F}$ erklärt. *Behauptung:* (I) Dafür, daß gilt:

(9) „$\leqslant_x$ gemäß (8) ist für jedes $x \in X$ eine schwache Ordnung in $\mathfrak{F}$",

ist hinreichend, daß gilt:

(10) „k ist $\frown$-distributiv und $k(X) = X$".

(II). Wenn Y drei verschiedene Äquivalenzklassen bzgl. der Äquivalenzrelation „$\leqslant$ und $\geqslant$" in Y enthält, so ist (10) für (9) auch notwendig.

Beweis. 1. Notwendig und hinreichend für die *Reflexivität* aller $\leqslant_x$ ist, daß $x \in k([f \leqslant f]) = k(X)$ für alle $x \in X$ gilt, also $k(X) = X$. – 2. *Zu* (I). Notwendig und hinreichend für die *Transitivität* aller $\leqslant_x$ ist

(12) $k([f \leqslant g]) \frown k([g \leqslant h]) \subset k([f \leqslant h])$ für alle $f, g, h \in \mathfrak{F}$.

Zu (I). Setzt man

(13) $A := [f \leqslant g], \quad B := [g \leqslant h], \quad C := [f \leqslant h],$

so folgt (aus der Transitivität von $\leqslant$ in Y) $A \frown B \subset C$ und mit der $\frown$-Distributivität (und Isotonie) von k alsdann $k(A) \frown k(B) = k(A \frown B) \subset k(C)$, d. h. (12).

Zu (II). Sei jetzt (12) erfüllt und in Y seien 3 verschiedene Äquivalenzklassen bzgl. „$\leqslant$ und $\geqslant$" vorhanden, etwa Y_1, Y_2, Y_3.

Bei geeigneter Numerierung gibt es $y_i \in Y_i$, $i = 1, 2, 3$, so daß

(14) $\neg\, y_1 \leqslant y_2, \neg\, y_2 \leqslant y_3$ und $\neg\, y_1 \leqslant y_3$.

Anderenfalls müßte nämlich gelten:

$(Y_1 < Y_2 \vee Y_1 < Y_3) \wedge (Y_2 < Y_1 \vee Y_2 < Y_3) \wedge (Y_3 < Y_1 \vee Y_3 < Y_2)$,

was der Äquivalenzklasseneigenschaft der Y_i bzgl. „$\leqslant$ und $\geqslant$" widerspricht. Wir zeigen nachfolgend (in 3.), daß man mittels

(14) durch geeignete Wahl von $f, g, h \in \mathfrak{F}$ in (13) folgende Mengentripel ralisieren kann:

(i) A, C beliebig mit $A \subset C$ und $B := A$ oder $B := X$;

(ii) A, B beliebig und $C := A \cap B$.

Alsdann folgt nämlich zunächst aus (12) und (i) (in beiden Fällen) $k(A) \cap k(B) \subset k(C)$, d. h. $k(A) \subset k(C)$, also die Isotonie von k, und damit $k(A) \cap k(B) \supset k(A \cap B)$ für beliebige $A, B \in \mathfrak{P}(X)$. Schließlich liefert (ii) und (12) für beliebige $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ auch $k(A) \cap k(B) \subset k(A \cap B)$, und damit die Gleichheit in dieser Inklusion.

3. *Für* (i) wählen wir f, g, h gemäß folgender Konstanzmengentabelle, wobei wir zu unterscheiden haben

Fall 1. y_1, y_2, y_3 sind nicht alle miteinander vergleichbar; dann gilt neben (14) etwa noch $\neg\, y_2 \leqslant y_1$, und wir können hier $B = A$ setzen. – *Fall* 2. y_1, y_2, y_3 sind alle miteinander vergleichbar, also $y_1 > y_2 > y_3$, und wir haben hier $B = X$ zu setzen (in der Tabelle sind für den Fall 2 die Werte von f, g, h in Klammern gesetzt):

	A	$C \setminus A$	$X \setminus C$
f	$y_1\ (y_3)$	$y_1\ (y_2)$	$y_1\ (y_1)$
g	$y_1\ (y_3)$	$y_2\ (y_3)$	$y_2\ (y_3)$
h	$y_1\ (y_1)$	$y_1\ (y_1)$	$y_3\ (y_2)$

Für (ii) lautet die Tabelle

	$A \setminus C$	$A \cap B$	$B \setminus C$	$X \setminus (A \cup B)$
f	y_2	y_1	y_1	y_1
g	y_2	y_1	y_2	y_2
h	y_3	y_1	y_2	y_3

2.3. Ein *Gegenbeispiel*, welches zeigt, daß k nicht notwendig $\cap$-distributiv zu sein braucht, wenn Y nur zwei Äquivalenzklassen enthält.

$X := \{1, 2, 3, 4\}$, $Y := \{1, 2\}$ mit $=$ für $\leqslant$, weiter $k(A) := X$ bzw. $\varnothing$, je nachdem die Teilmenge A von X von gerader bzw.

ungerader Mächtigkeit ist. k ist nicht isoton, also auch nicht $\cap$-distributiv; aber (12), das sich hier auf $k(A) \cap k(B) \subset k(\mathbf{C}(A \dotplus B)$ reduziert, ist erfüllt, ebenso auch $k(X) = X$.

Literatur

[1] Georg Aumann, der abbildungstheoretische Zugang zur Topologie, Sitz. Ber. Math.-nat. Kl. d. Bayer. Ak. d. Wiss. 1977, S. 63–71. – [2] E. Čech, Topological Spaces, Prag 1966. – [3] W. Benz, Über eine Funktionalgleichung von G. Aumann (wird veröffentlicht). Es handelt sich um die Gleichung $f(x)f(y)f(1 + x + y) = f(x)f(y)$ für eine Abbildung $f: R \to R$, wobei R ein Boolescher Ring. Falls R der Ring der charakteristischen Funktionen x auf einem Raum T ist, so entspricht diese Gleichung der Aussage (5) in 1.2. für k.

München, im Oktober 1978.