BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1966

MÜNCHEN 1967

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über lateral konvergente Funktionen. II

Von Georg Aumann in München

Vorgelegt am 14. Januar 1966

Die in der vorausgehenden Note I[1] eingeführte Definition der lateralen Konvergenz wird hier durch eine gleichwertige, aber etwas bequemere Fassung ersetzt (1.). In 2. entwickle ich die Integrationstheorie der lateral konvergenten Funktionen auf der Grundlage des elementar-geometrischen Inhalts j. Für das unbestimmte Elementarintegral $\int_E f$ einer lateral konvergenten Funktion f läßt sich eine vollständige Kennzeichnung angeben; neben der Additivität in E ist dabei die „Zerlegungsstetigkeit" der „mittleren Dichte" $(\int_E f)/j(E)$ von f maßgebend. Das unbestimmte Integral $\int_E f$ ist in „fast allen" Punkten $\mathfrak{x}$ bezüglich j differenzierbar mit $f(\mathfrak{x})$ als Ableitungswert. Die Nützlichkeit des Begriffs der lateralen Konvergenz wird besonders deutlich bei Behandlung der Stetigkeit und Differenzierbarkeit (im Stolzschen Sinne) von Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher (3.) In 4. behandeln wir die „äußere Differentiation" einer Funktion von zwei Veränderlichen im einfachsten Fall der „gebundenen" äußeren Ableitung $\mathfrak{D}_1$ und stellen die Verbindung mit der Differentiation im Stolzschen Sinne her. Zum Schluß (5.) weisen wir auf die Übertragung des Begriffs der lateralen Konvergenz auf Räume unendlicher Dimensionen hin; z. B. erweist sich die zur lateralen Konvergenz gehörige Topologie – im Gegensatz zum Fall endlicher Dimension – im unendlich-dimensionalen Hilbertraum als nicht äviqualent mit der zur Norm gehörigen Topologie, sondern feiner als diese.

1. Die nachfolgend gegebene Definition der lateralen Konvergenz ist mit der in der vorausgehenden Note eingeführten Definition äquivalent. Es sei $f|G$ eine in einer offenen Teilmenge

[1] G. Aumann, Über lateral konvergente Funktionen. I, Sitz.-Ber. Bay. Ak. d. Wiss., Math.-Nat. Klasse 1965, 31–36.

des R^n erklärte Funktion, ferner sei $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ mit $1 \leq k \leq n$ eine geordnete Folge von orthonormalen Vektoren im R^n und $\mathfrak{x}_0$ ein Punkt des R^n. Dem *k-Bein* $(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)$ ordnen wir zu eine Filterbasis $B(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)$, bestehend aus allen k-Simplexen Δ_k mit den Ecken

$$\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{x}_0, \quad \mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{y}_2 = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{e}_1 + \lambda_2 \mathfrak{e}_2, \ldots,$$
$$\mathfrak{y}_k = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{e}_1 + \cdots + \lambda_k \mathfrak{e}_k$$

mit beliebigen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0$, d. h. $\Delta_k = \Delta_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ ist die Menge aller Punkte

$$\mathfrak{x} = \varrho_0 \mathfrak{y}_0 + \varrho_1 \mathfrak{y}_1 + \cdots + \varrho_k \mathfrak{y}_k$$

mit beliebigen $\varrho_i > 0$ und $\varrho_0 + \cdots + \varrho_k = 1$. Wir schreiben

$$(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)\text{-}\lim f = a$$

und sagen „f sei *bzgl. des k-Beins* $(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1 \ldots, \mathfrak{e}_k)$ *lateral konvergent*, wenn

$$\bigwedge \varepsilon > 0 \ \bigvee \Delta_k \in B(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k) \ \bigwedge_{\mathfrak{x} \in \Delta_k \cap G} |f(\mathfrak{x}) - a| < \varepsilon.$$

Entsprechend definiert man die laterale Limesmenge bzgl. $(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)$ den oberen Limes usw., nämlich

$$(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)\text{-}L(f) = \bigcap \{\overline{f(\Delta_k \cap G)} : \Delta_k \in B(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)\},$$

$$(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)\text{-}\overline{\lim} f = \sup\, (\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)\text{-}L(f), \text{ usw.}$$

Bemerkung. Die Verwendung orthonormaler k-Beine ist nur eine *Normierungssache*: Man könnte ebensogut anstelle von $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k$ ein geordnetes k-tupel von linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ verwenden. Nur müßte man dann die „Äquivalenz von k-Beinen" in sinngemäßer Weise einführen, d. h. so, daß die entsprechenden Filterbasen im topologischen Sinne äquivalent sind.

Die Funktion $f|G$ heißt *lateral konvergent* schlechthin, wenn für jede Dimension k und jedes k-Bein $(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)$ mit $\mathfrak{x}_0 \in G$

$$(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k)\text{-}\lim f$$

existiert.

2. *Elementare Integration der lateral konvergenten Funktionen.*

Wir führen die Betrachtungen in R^2 durch. Es sei G eine offene Teilmenge des R^2. Unter einer *Elementarfigur* E verstehen wir jede Vereinigung von endlich vielen paarweise fremden 0-, 1- oder 2-dimensionalen Simplexen $\sigma_i \subset G$

$$E = \bigcup_i \sigma_i; \tag{0}$$

die Menge aller dieser Elementarfiguren bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}$. Indem wir jedem 0- oder 1-dimensionalen Simplex σ den *Inhalt* $j(\sigma) = 0$, jedem 2-dimensionalen Simplex σ (d. h. echtem Dreieck) den elementar-geometrischen Flächeninhalt $j(\sigma) > 0$ zuordnen, ergibt sich in

$$j(E) = \sum_i j(\sigma_i)$$

eine eindeutige, d. h. von der Darstellung (0) von E unabhängige, und additive Funktion $j \,|\, \mathfrak{E}$.

Wir definieren nun in gewohnter Weise das *Ober-* bzw. *Unterintegral* $\overline{\int}_E f$ bzw. $\underline{\int}_E f$ von f auf E – *f eine auf jedem E' von $\mathfrak{E}$ beschränkte reelle Funktion $f \,|\, G$* – als Infimum bzw. Supremum der Summen

$$\sum_i (\sup f \,|\, \sigma_i)\, j(\sigma_i) \quad \text{bzw.} \quad \sum_i (\inf f \,|\, \sigma_i)\, j(\sigma_i),$$

wobei $\bigcup_i \sigma_i = E$ alle möglichen Darstellungen von E durchläuft. Wenn $\underline{\int}_E f = \overline{\int}_E f$, so heißt f *elementarer integrierbar auf E* und der gemeinsame Wert dieser Integrale das *$\mathfrak{E}$-Integral von f auf E*, $\int_E f$.

In durchaus üblicher Weise ergeben sich die Sätze:

1. Unter- und Oberintegral sind monoton in f (aus $f_1 \leq f_2$ folgt beispielsweise $\underline{\int}_E f_1 \leq \underline{\int}_E f_2$);
2. Ist f über E integrierbar, so auch über jedes $E' \subset E$.
3. Unter- und Oberintegral sind additiv in E (z. B. aus $E' \cup E'' = E$, $E' \cap E'' = \emptyset$ folgt $\underline{\int}_{E'} f + \underline{\int}_{E''} f = \underline{\int}_E f$).
4. Die auf E integrierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum, auf welchem $\int_E f$ ein lineares Funktional ist.

5. Jede simpliziale Treppenfunktion $\varphi | G$ ist auf jedem E integrierbar; ist dabei $E = \bigcup_i \sigma_i$, so gibt es eine Darstellung $E = \bigcup_k \sigma'_k$, so daß $\varphi | \sigma'_k$ gleich einer Konstanten c_k für jedes k und

$$\int_E \varphi = \sum_k c_k j(\sigma'_k).$$

6. Ist f_n eine auf E gleichmäßig konvergente Folge von elementar integrierbaren Funktionen mit dem Limes f, so ist auch f elementar integrierbar und es gilt $\lim\limits_n \int_E f_n = \int_E f$.

2.1. *Jede lateral konvergente Funktion ist elementar integrierbar auf jedem E.*

Beweis. Nach einem früheren Satz ist die lateral konvergente Funktion $f | G$ gleichmäßig und beliebig genau durch simpliziale Treppenfunktionen φ approximierbar. Es sei etwa mit $\varepsilon > 0$

$$\varphi(\mathfrak{x}) - \varepsilon \leq f(\mathfrak{x}) \leq \varphi(\mathfrak{x}) + \varepsilon \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \in G.$$

Dann erhalten wir nach obigen Sätzen für $E \in \mathfrak{E}$

$$\int_E \varphi - \varepsilon j(E) \leq \underline{\int}_E f \leq \overline{\int}_E f \leq \int_E \varphi + \varepsilon j(E),$$

woraus z. B. die Endlichkeit von $\underline{\int}_E f$ und für $\varepsilon \to 0$ die behauptete Gleichheit von Ober- und Unterintegral folgt.

2.2. Wir betrachten $\int_E f$ bei festem, lateral konvergentem f als Funktion von E, schreiben dann $J(E)$ dafür und nennen $J | \mathfrak{E}$ das *unbestimmte Elementarintegral von f. Es besitzt die folgenden typischen Eigenschaften*:

(1) *$J | \mathfrak{E}$ ist endlich und additiv*;

(2) *$J(\sigma) = 0$ für jedes* 0- *oder* 1-*dimensionale Simplex σ*;

(3) *Die mittlere Dichte von J bezüglich j ist „zerlegungsstetig"*, womit folgendes gemeint ist:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine (lokal endliche) simpliziale Zerlegung $\bigcup_i \sigma_i$ von G mit der Eigenschaft, daß für jedes 2-dimensionale σ_i dieser Zerlegung und jedes beliebige 2-dimensionale Simplex $\sigma^* \subset \sigma_i$

$$(*)\qquad \left|\frac{J(\sigma_i)}{j(\sigma_i)} - \frac{J(\sigma^*)}{j(\sigma^*)}\right| < \varepsilon.$$ [2]

Beweis. 1. Es sei f lateral konvergent und $\varepsilon > 0$. Es gibt dann eine simpliziale Treppenfunktion φ und dazu die (lokal endliche) simpliziale Zerlegung $\bigcup_i \sigma_i = G$, wobei $\varphi | \sigma_i = \varphi_i$ (konstant) und

$$\varphi_i - \varepsilon \leq f(\mathfrak{x}) \leq \varphi_i + \varepsilon \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \in \sigma_i.$$

Wenn daneben σ_i 2-dimensional ist und $\sigma^* \subset \sigma_i$ ebenfalls 2-dimensional ist, so folgt daraus

$$\varphi_i - \varepsilon \leq \frac{\int_{\sigma^*} f}{j(\sigma^*)} \leq \varphi_i + \varepsilon.$$

Da dies auch für $\sigma^* = \sigma_i$ gilt, erhalten wir

$$\left|\frac{\int_{\sigma^*} f}{j(\sigma^*)} - \frac{\int_{\sigma_i} f}{j(\sigma_i)}\right| \leq 2\varepsilon,$$

womit (3) (und da (1) und (2) offensichtlich gelten) allgemein der erste Teil der Behauptung bewiesen ist.

2. Es sei jetzt $J | \mathfrak{E}$ eine Funktion mit den Eigenschaften (1)–(3). Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ und bestimmen auf Grund von (3) eine simpliziale Zerlegung $\mathfrak{z}'_n$, welche (*) erfüllt. Wir setzen $\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{z}'_1$ und $\mathfrak{z}_n$ sei eine gemeinsame Unterteilung von $\mathfrak{z}_{n-1}$ und $\mathfrak{z}'_n$. Für $\mathfrak{z}_n$ gilt dann (*) mit 2ε anstatt ε. Weiter bilden wir die Folge $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ von simplizialen Treppenfunktionen, erklärt durch $\varphi_0 = 0$, und für $n \geq 1$ durch

$$\varphi_n(\mathfrak{x}) = \frac{J(\sigma)}{j(\sigma)}, \text{ wenn } \mathfrak{x} \text{ einem 2-Simplex } \sigma \text{ von } \mathfrak{z}_n \text{ angehört,}$$

$$\varphi_n(\mathfrak{x}) = \varphi_{n-1}(\mathfrak{x}) \quad \text{sonst.}$$

Bei dieser Konstruktion ist $\varphi_n | G$ gleichmäßig konvergent; wi zeigen hierzu, daß für $m > n$

$$|\varphi_m(\mathfrak{x}) - \varphi_n(\mathfrak{x})| \leq \frac{2}{n} \quad \text{für } \mathfrak{x} \in G,$$

[2] Diese Eigenschaft entspricht der „Ableitungsstetigkeit" der allgemeinen Integrationstheorie, s. G. Aumann, Reelle Funktionen, Berlin 1954, S. 345.

durch vollständige Induktion. Für $m = n + 1$ ist nämlich $|\varphi_{n+1}(\mathfrak{x}) - \varphi_n(\mathfrak{x})| \leq \frac{2}{n}$, wenn $\mathfrak{x}$ in einem 2-Simplex von $\mathfrak{z}_{n+1}$ liegt, und sonst ist $|\varphi_{n+1}(\mathfrak{x}) - \varphi_n(\mathfrak{x})| = 0$. Wenn weiter die Behauptung für ein $m > n$ richtig ist, so folgt wieder $|\varphi_{m+1}(\mathfrak{x}) - \varphi_n(\mathfrak{x})| \leq \frac{2}{n}$, soferne $\mathfrak{x}$ auf einem 2-Simplex von $\mathfrak{z}_{m+1}$ liegt, da ja auch $\mathfrak{z}_{m+1}$ eine Unterteilung von $\mathfrak{z}_n$ ist. Für alle anderen $\mathfrak{x}$ aber gilt $\varphi_{m+1}(\mathfrak{x}) = \varphi_m(\mathfrak{x})$, so daß auch für diese $\mathfrak{x}$ die Behauptung bzgl. φ_{m+1} zutrifft. Mit $\lim_n \varphi_n = f$ haben wir somit

$$|\varphi_n(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{x})| \leq \frac{2}{n} \quad \text{für } \mathfrak{x} \in G, \quad \text{also}$$

$$\left|\int_E \varphi_n - \int_E f\right| \leq \frac{2}{n} j(E) \quad \text{für} \quad E \in \mathfrak{E}.$$

Bei festem n und $E \in \mathfrak{E}$ sei

$$E = \bigcup_i \sigma_i^* \tag{4}$$

eine Zerlegung von E, so daß jedes σ_i^* Teil eines Simplex von $\mathfrak{z}_n$ ist. Damit ergibt sich

$$\int_E \varphi_n = \sum_i \int_{\sigma_i^*} \varphi_n = \sum{}' \int_{\sigma_i^*} \varphi_n,$$

worin die Summation $\sum'$ auf die 2-dimensionalen Simplexe von (4) beschränkt ist. Auf diesen ist φ_n jeweils konstant, nämlich

$$\varphi_n | \sigma_i^* = \frac{J(\sigma)}{j(\sigma)} = \frac{J(\sigma_i^*)}{j(\sigma_i^*)} + q_i,$$

wobei $|q_i| \leq \frac{2}{n}$ und σ jenes 2-Simplex von $\mathfrak{z}_n$ bezeichnet, in welchem das 2-Simplex σ_i^* enthalten ist. Hieraus folgt nun

$$\int_E \varphi_u = J(E) + q \text{ mit } |q| \leq \frac{2}{n} \sum{}' j(\sigma_i^*) = \frac{2}{n} j(E)$$

und mit dem obigen Resultat zusammen dann

$$\left|\int_E f - J(E)\right| \leq \frac{4}{n} j(E);$$

daraus ergibt sich schließlich für $n \to \infty$ die Behauptung $J(E) = \int_E f$ mit lateral konvergentem f.

2.3. *Differenzierbarkeit des unbestimmten Integrals* $\int_E f$ einer lateral konvergenten Funktion f:

Ist $f|G$ lateral konvergent, so gibt es eine „Ausnahmemenge" $A \subset G$, darstellbar als die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen 0- und 1-Simplexen derart, daß $\int_E f$ bzgl. j überall in G mit Ausnahme der Punkte von A differenzierbar ist, d. h.

$$\lim_{\sigma \to \mathfrak{x}} \frac{\int_\sigma f}{j(\sigma)} = f(\mathfrak{x}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{x} \in G - A,$$

genauer: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein* 2-Simplex $\sigma^* \ni \mathfrak{x}$ *mit*

$$\left| \frac{\int_\sigma f}{j(\sigma)} - f(\mathfrak{x}) \right| < \varepsilon \tag{5}$$

für jedes 2-Simplex σ mit $\mathfrak{x} \in \sigma \subset \sigma^*$.

Beweis. Es sei φ_n eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge von simplizialen Treppenfunktionen; A sei die Menge aller (abzählbar vielen) 0- und 1-Simplexe, die in den zu einer Darstellung der φ_n gehörigen Zerlegungen $G = \bigcup_i \sigma_{ni}$ auftreten. Ist $|\varphi_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}$, so folgt für $\mathfrak{x} \in G - A$ sofort (5), wenn man für σ^* jenes 2-Simplex σ_{ni} nimmt, welches $\mathfrak{x}$ enthält.

3. Die laterale Konvergenz ist für die feinere Untersuchung von Funktionen von mehreren Veränderlichen besonders geeignet. Dies ergibt sich aus den folgenden Sätzen über die *Stetigkeit einer Funktion* und ihrer *Differenzierbarkeit im Stolzschen Sinne.* Wieder beschränken wir uns auf zwei reelle Veränderliche.

3.1. *$f|G$ ist im Punkt $\mathfrak{x}_0$ der offenen Punktmenge $G \subset R^2$ dann und nur dann stetig, wenn*

1. $(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1)$-$\lim f = f(\mathfrak{x}_0)$ für alle $\mathfrak{e}_1$;
2. $(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$-$\lim f = f(\mathfrak{x}_0)$ für alle (orthonormalen) $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$.

Beweis. Daß die Bedingungen notwendig sind, ist klar. Daß sie auch hinreichend sind, ergibt sich daraus, daß man unter Verwendung der Konvergenz bzgl. $(\mathfrak{x}_0;\ \mathfrak{e}_1)$, $(\mathfrak{x}_0;\ \mathfrak{e}_1,\ \mathfrak{e}_2)$ und $(\mathfrak{x}_0;\ \mathfrak{e}_1,\ -\mathfrak{e}_2)$ bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ einen Kreissektor mit der Spitze $\mathfrak{x}_0$ und einen zu $\mathfrak{e}_1$ parallelen Mittelradius angeben kann, auf welchem sich $f(\mathfrak{x})$ von $f(\mathfrak{x}_0)$ um weniger als ε unterscheidet. Anwendung des Borelschen Überdeckungssatzes führt auf die Behauptung.

Bemerkung. Die im Satz genannten Bedingungen sind „absolut minimal" in dem Sinne, daß der Verzicht auf eine einzige dieser (unendlich vielen) Bedingungen die 2-dimensionale Stetigkeit von f in $\mathfrak{x}_0$ hinfällig macht. Dies zeigen einfachste Beispiele.

3.2. Man sagt, die Funktion $f\,|\,G$ ist im Punkt $\mathfrak{x}_0$ *im Stolzschen Sinne differenzierbar*, wenn es einen Vektor $\mathfrak{g}$ gibt, so daß für $|d\mathfrak{x}| \to 0$

$$f(\mathfrak{x}_0 + d\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{x}_0) = \mathfrak{g}\, d\mathfrak{x} + o(|d\mathfrak{x}|). \tag{6}$$

(Mit $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ werde das skalare Produkt der Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bezeichnet.) $\mathfrak{g}\, d\mathfrak{x}$ heißt das *totale Differential von f in $\mathfrak{x}_0$*.

Satz: *f besitzt im Punkt $\mathfrak{x}_0$ dann und nur dann das totale Differential $\mathfrak{g}\, d\mathfrak{x}$, wenn mit der Bezeichnung $\Delta f = f(\mathfrak{x}) - f(\mathfrak{x}_0)$* und *$\Delta\mathfrak{x} = \mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0$*

1. $(\mathfrak{x}_0;\ \mathfrak{e}_1)\text{-}\lim \dfrac{\Delta f}{|\Delta\mathfrak{x}|} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{e}_1$ *für alle* $\mathfrak{e}_1$;
2. $(\mathfrak{x}_0;\ \mathfrak{e}_1,\ \mathfrak{e}_2)\text{-}\lim \dfrac{\Delta f}{|\Delta\mathfrak{x}|} = \mathfrak{g}\,\mathfrak{e}_1$ *für alle orthonormalen* $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$.

Beweis. (a) Aus (6) folgt

$$\frac{\Delta f}{|\Delta\mathfrak{x}|} - \mathfrak{g}\,\frac{\Delta\mathfrak{x}}{|\Delta\mathfrak{x}|} \to 0 \quad \text{für} \quad |\Delta\mathfrak{x}| \to 0. \tag{7}$$

Setzt man hierin $\Delta\mathfrak{x} = r\,\mathfrak{e}_1$ mit $0 < r \to 0$, so folgt 1. Bezeichnet $\Delta_2(\lambda_1, \lambda_2)$ ein Dreieck aus der Filterbasis zu $(\mathfrak{x}_0;\ \mathfrak{e}_1,\ \mathfrak{e}_2)$, so gilt $|\Delta\mathfrak{x} - |\Delta\mathfrak{x}|\,\mathfrak{e}_1| < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,|\Delta\mathfrak{x}|$ für $\mathfrak{x} \in \Delta_2$, also

$$\left|\mathfrak{g}\,\frac{\Delta\mathfrak{x}}{|\Delta\mathfrak{x}|} - \mathfrak{g}\,\mathfrak{e}_1\right| < \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,|\mathfrak{g}|. \tag{8}$$

Die rechte Seite von (8) kann man, ebenso wie $|\varDelta\mathfrak{x}|$, durch geeignete Wahl von λ_1 und λ_2 beliebig klein machen. Mit (7) folgt daraus 2.

(b) Es seien jetzt umgekehrt die Eigenschaften 1. und 2. erfüllt. Mit geeigneten λ_1, λ_2 ist bei vorgegebenen $\varepsilon > 0$ und $\mathfrak{e}_1$

$$(9) \qquad \left|\frac{\varDelta f}{|\varDelta\mathfrak{x}|} - \mathfrak{g}\,\mathfrak{e}_1\right| < \varepsilon$$

für alle $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \varDelta\mathfrak{x} \in S(\lambda_1, \lambda_2) := \varDelta_1 \cup \varDelta_{2(+)} \cup \varDelta_{2(-)}$, wobei $\varDelta_1$ die Ecken $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1\mathfrak{e}_1$, $\varDelta_{2(\pm)}$ die Ecken $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_{2(\pm)} = \mathfrak{x}_1 \pm \lambda_2\mathfrak{e}_2$ hat. Wählt man dabei λ_2 so klein, daß $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}|\mathfrak{g}| < \varepsilon$, so folgt aus (8) und (9) für jedes $\mathfrak{x} \in S(\lambda_1, \lambda_2)$

$$(10) \qquad |\varDelta f - \mathfrak{g}\varDelta\mathfrak{x}| < 2\varepsilon|\varDelta\mathfrak{x}|.$$

Anwendung des Borelschen Überdeckungssatzes ergibt die Gültigkeit von (10) für alle $\mathfrak{x}$ aus einer vollen Kreisscheibe um $\mathfrak{x}_0$, was (6) bedeutet.

Bemerkung. Wiederum sind die Bedingungen des Satzes absolut minimal (auch sogar bei Hinzunahme der Stetigkeit von f in $\mathfrak{x}_0$).

4. *Äußere Differentiation.*

1. Wir betrachten den Graph $\left\{\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ f(\mathfrak{x})\end{pmatrix} : \mathfrak{x} \in G\right\}$ der Funktion $f|G$ im $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$-Raum, wobei $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \mathfrak{x}$ und $z = f(x, y)$ gesetzt wird. Für den Vektor $\begin{pmatrix}\mathfrak{x}\\ f(\mathfrak{x})\end{pmatrix}$ schreiben wir auch $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Zur Bildung der äußeren Ableitung dient der Quotient

$$\mathfrak{N}_f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3) := \frac{(\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1) - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_2)) \times (\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_2) - \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_3))}{\det(\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_3)}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & x_2 - x_3, & \mathfrak{i} \\ y_1 - y_2, & y_2 - y_3, & \mathfrak{j} \\ f(\mathfrak{x}_1) - f(\mathfrak{x}_2), & f(\mathfrak{x}_2) - f(\mathfrak{x}_3), & \mathfrak{k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_2, & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_2, & y_2 - y_3 \end{vmatrix}},$$

wobei $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die drei Grundeinheitsvektoren bezeichnen und die Vektoren $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ als nicht kollinear vorausgesetzt werden. Die dritte Komponente des Vektors $\mathfrak{N}_f$ ist stets 1; wir lassen sie aus dem Spiel; $\mathfrak{N}'_f$ bezeichne die Projektion von $\mathfrak{N}_f$ in den $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$-Raum, d. h. den um die dritte Komponente verkürzten Vektor $\mathfrak{N}_f$. Z. B. ist $\mathfrak{N}_f$ für $f(x, y) = ax + by$ unabhängig von $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$ und

$$\mathfrak{N}'_f = \begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix} = -\operatorname{grad} f.$$

2. Wir betrachten im folgenden nur die *gebundene äußere laterale Ableitung* D_1, die wie folgt erklärt ist: Es gilt

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{D}_1(\mathfrak{x}_0;\, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$$

dann und nur dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\Delta_1(\mathfrak{e}_1)$ und ein $\Delta_2(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ gilt, so daß für alle $x_1 \in \Delta_1(\mathfrak{e}_1)$ und alle $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 + \lambda \mathfrak{e}_2 \in \Delta_2(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$

$$|\mathfrak{N}'_f(\mathfrak{x}_0;\, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) - \mathfrak{g}'| < \varepsilon.$$

Offensichtlich kann man die Bedingung dahin spezialisieren, daß man, wenn Δ_2 durch die Eckpunkte $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{e}_1 + \lambda_2 \mathfrak{e}_2$ gegeben ist, man für Δ_1 das Simplex mit den Ecken $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{e}_1$ (mit demselben λ_1) nehmen kann.

Bemerkung. Eine Bindung von $\mathfrak{x}_2$ an $\mathfrak{x}_1$, etwa wie oben gemäß $\mathfrak{x}_2 = \mathfrak{x}_1 + \lambda \mathfrak{e}_2$, – wir wollen sie eine *Schwarz*sche Bedingung nennen – ist unerläßlich, um allgemeineren Funktionen als den linearen eine äußere laterale Ableitung zuordnen zu können.

Satz. Es sei für jedes orthonormale $(\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$

$$\mathfrak{D}_1(\mathfrak{x}_0;\, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2) = -\mathfrak{g}.$$

Dann besitzt f im Punkt $\mathfrak{x}_0$ das Stolzsche Differential

$$df = \mathfrak{g}\, d\mathfrak{x}.$$

Beweis. Wir zeigen, daß die Bedingungen des Satzes 3.2. erfüllt sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir

$\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$ und $f(\mathfrak{x}_0) = 0$ und $\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ setzen ($y_1 = 0$). Dann ist (wegen $x_2 = x_1$)

$$\mathfrak{N}'_f(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{-f_1}{x_1} \\ \dfrac{f_1 - f_2}{-y_2} \end{pmatrix};$$

dabei deutet ein Index i auf das Argument $\mathfrak{x}_i$ hin. Wegen $\mathfrak{N}'_f \to \begin{pmatrix}-g_1\\-g_2\end{pmatrix}$ bei (der im obigen Sinne gebundenen) Konvergenz von $\mathfrak{x}_1$ und $\mathfrak{x}_2$ bzgl. $\left(\mathfrak{x}_0; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ folgt $-\mathfrak{N}'_f \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{f_1}{x_1} \to g_1$, d. h. aber $(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{e}_1)$-$\lim \frac{\Delta f}{|\Delta \mathfrak{x}|} = \mathfrak{g} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Ferner ist mit $l = \left(1 + \left(\frac{y_2}{x_2}\right)^2\right)^{1/2}$

$$-\mathfrak{N}'_f \begin{pmatrix} \dfrac{1}{l} \\ \dfrac{y_2}{x_2\, l} \end{pmatrix} = \frac{f_2}{(x_2^2 + y_2^2)^{1/2}} \to \begin{pmatrix}g_1\\g_2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = g_1,$$

d. h. $\left(\mathfrak{x}_0; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$-$\lim \frac{\Delta f}{|\Delta \mathfrak{x}|} = \mathfrak{g} \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Damit ist die Gültigkeit der zwei Bedingungen von 3.2. für $\mathfrak{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ nachgewiesen. Dasselbe gilt für jedes andere Paar orthonormaler Vektoren.

Bemerkung: Der Satz ist nicht umkehrbar, wie aus dem folgenden *Beispiel* hervorgeht:

r, φ seien Polarkoordinaten $\left(\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}\right)$. Wir setzen

$$f(\mathfrak{x}) = r^2 \sin\frac{1}{r} \sin n_r \varphi$$

mit $n_r = m$, wenn $m\pi < \frac{1}{r} < (m+1)\pi$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ und $f(\mathfrak{o}) = 0$. Offensichtlich ist $\mathfrak{o} \cdot d\mathfrak{x}$ das Stolzsche Differential von f in $\mathfrak{o}$. Aber z. B. $\mathfrak{D}_1\left(\mathfrak{o}; \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ existiert nicht. Es ist nämlich für $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$, $\mathfrak{x}_1 = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{x}_2 = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ mit $\frac{1}{r} = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi$, $f(\mathfrak{x}_1) = 0$, $f(\mathfrak{x}_2) = r^2 \sin 2n\varphi$ und somit die zweite Komponente von $\mathfrak{N}'_f(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)$ gleich $-\frac{f(\mathfrak{x}_2)}{y_2} = -\frac{2\sin 2n\varphi}{\pi(4n+1)\sin\varphi}$, was in jedem hier zulässigen Δ_2 den Wert 0 annimmt und andererseits dem Wert $\frac{1}{\pi}$ beliebig nahe kommt. Es liegt also keine laterale Konvergenz vor.

5. Zu jedem festen orthonormalen System $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k\}$ im R^n gehört eine Topologie $T_{\mathfrak{A}}$, nämlich jene, welche dem Punkt $\mathfrak{x}_0$ die Mengen

$$\{\mathfrak{x}_0\} \cup \Delta_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_k), \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_k > 0,$$

als Umgebungsbasis zuordnet. Das Ergebnis von Satz 3.1. kann nun auch so interpretiert werden: Die feinste gemeinsam gröbere Topologie T^* aller $T_{\mathfrak{A}}$ ist gleichwertig mit der euklidischen (Norm-)Topologie; denn die Mengen

$$\bigcup_{\mathfrak{A}} U_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{x}_0), \tag{11}$$

worin $U_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{x}_0)$ eine Umgebung von $\mathfrak{x}_0$ in der Topologie $T_{\mathfrak{A}}$ bezeichnet, bilden eine Umgebungsbasis in T^* und auf Grund des Borelschen Überdeckungssatzes enthält jede der Mengen (11) eine volle Kugel um $\mathfrak{x}_0$, und umgekehrt.

Bemerkenswerterweise geht diese Gleichwertigkeit bei der *Übertragung der lateralen Konvergenz auf Räume unendlicher Dimension* verloren: *Die zur lateralen Konvergenz gehörige Topologie*, z. B. *im unendlich-dimensionalen Hilbertraum, ist wesentlich feiner als die zur Norm gehörige Topologie.* Hierzu ein *Beispiel*:

Es sei $\mathfrak{H}$ der Hilbertraum der reellen Zahlenfolgen

$$\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots) \text{ mit } \sum_\nu x_\nu^2 < +\infty;$$

dabei ist mittels des Skalarprodukts $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_\nu x_\nu y_\nu$ die Norm $\|\mathfrak{x}\| = (\mathfrak{x}, \mathfrak{x})^{1/2}$ erklärt.

Es bezeichne $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots)$ eine endliche oder unendliche Folge (auf die Reihenfolge kommt es an!) von paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_i$. Dazu bilden wir die Vektoren $\mathfrak{y}_0 = \mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_1 = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{y}_n = \mathfrak{x}_0 + \lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_n \mathfrak{a}_n, \ldots$ mit positiven λ_i und $\sum_i \lambda_i^2 < +\infty$, ferner die offene konvexe Menge Δ aller Punkte $\mathfrak{x}$, welche sich darstellen als positive konvexe Linearkombination der $\mathfrak{y}_n$:

$$\mathfrak{x} = \sum_{i \geq 0} r_i \mathfrak{y}_i \quad \text{mit} \quad r_i > 0 \ \text{und} \ \sum_{i \geq 0} r_i = 1.$$

Die Mengen $\Delta = \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ bilden eine Filterbasis

$$B(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{A}),$$

bezüglich welcher wir in der üblichen Weise den *lateralen Limes*

$$(\mathfrak{x}_0; \mathfrak{A})\text{-}\lim f$$

zu einer Funktion $f|\mathfrak{H}$ erklären können.

Für diesen Begriff gilt z. B. nicht der Satz 3.1., wenn man die Stetigkeit mittels der Norm erklärt. Dies zeigt das folgende Beispiel einer Funktion $f|\mathfrak{H}$, welche im Punkt $\mathfrak{o}$ bzgl. der Norm unstetig ist, obwohl für alle $\mathfrak{A}$

$$(\mathfrak{o}; \mathfrak{A})\text{-}\lim f = f(\mathfrak{o}). \tag{12}$$

Es bezeichne $\mathfrak{e}_n$ den n-ten Einheitsvektor $(0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ und $m_1, m_2, \ldots$ eine positive Nullfolge mit $m_n < 1$; $f|\mathfrak{H}$ wird erklärt durch $f(m_n \mathfrak{e}_n) = 1$ für $n = 1, 2, \ldots$, und $f(\mathfrak{x}) = 0$ sonst. Offensichtlich ist f im Punkt $\mathfrak{o}$ bzgl. der Norm unstetig; wir zeigen nun noch, daß für f die Limesbeziehung (12) für alle $\mathfrak{A}$ besteht.

Es sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots)$ ein beliebig vorgegebenes geordnetes Orthonormalsystem, und $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{o}$.

Wegen $(\mathfrak{e}_n, \mathfrak{a}_1) \to 0$ für $n \to +\infty$ gibt es ein n_0, so daß

$$(\mathfrak{e}_n, \mathfrak{a}_1) < 1/\sqrt{2} \quad \text{für} \quad n > n_0.$$

Wir betrachten dazu ein $\Delta = \Delta(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ mit

$$\lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \ldots < \lambda_1^2.$$

Wenn $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{y} \in \Delta$, wobei $\mathfrak{y} = \sum_{j \geq 1} r_j (\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_j \mathfrak{a}_j)$, so erhalten wir $\mathfrak{y} = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 s_1 + \lambda_2 \mathfrak{a}_2 s_2 + \ldots = \lambda_1 \mathfrak{a}_1 s_1 + \mathfrak{b}$, wobei $s_j = \sum_{i \geq j} r_i$, also $s_1 > s_2 > \ldots$, weiter

$$\|\mathfrak{b}\|^2 = s_2^2 \lambda_2^2 + s_3^2 \lambda_3^2 + \ldots \leq s_2^2 (\lambda_2^2 + \ldots) \leq s_1^2 \lambda_1^2,$$

$$\|\mathfrak{y}\| = (\lambda_1^2 s_1^2 + \|\mathfrak{b}\|^2)^{1/2} \qquad \leq \sqrt{2}\, \lambda_1 s_1, \quad \text{also}$$

$$\left(\frac{\mathfrak{y}}{\|\mathfrak{y}\|}, \mathfrak{a}_1\right) = \frac{\lambda_1 s_1}{\|\mathfrak{y}\|} \geq 1/\sqrt{2}.$$

Also ist $m_n \mathfrak{e}_n \notin \Delta$ für $n > n_0$.

Wir können daher Δ zu einem Δ^* verkleinern, so daß

$$m_n \mathfrak{e}_n \notin \Delta^* \text{ für alle } n.$$

Daher gilt (12) mit $f(\mathfrak{o}) = 0$ für alle $\mathfrak{A}$.

Die Topologie T^* in $\mathfrak{H}$ erklären wir, wie oben gemäß (11). Jetzt kann man wohl noch sagen, daß jede „Kugel" $\{\mathfrak{x} : \|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_0\| < \varepsilon\}$ in einer Menge (11) enthalten ist, aber nicht umgekehrt; dies lehrt das oben konstruierte System der Δ^*.

Es wäre interessant zu untersuchen, in welcher Weise die im Vergleich zur Normtopologie feinere Topologie T^* in der Funktionalanalysis nutzbar gemacht werden kann.

Nachtrag (16. 1. 1966). Die hier behandelte äußere Differentiation kann als „2-dimensionale Differentiation" betrachtet werden. In analoger Weise lassen sich in höherdimensionalen Räumen für jede Zwischendimension laterale äußere Ableitungen erklären. Das Studium der Beziehungen solcher Ableitungen verschiedener Dimensionen untereinander erfolgt am besten mit den Hilfsmitteln der Theorie der alternierenden Differentiale und der Tensoranalysis; entsprechende Untersuchungen sind im Gange. – Versuche, mehrdimensionale Differentiationen in die Analysis der Funktionen mehrerer Veränderlichen einzuführen, sind schon früher unternommen worden; siehe dazu „Über die mehrdimensionale Differentiation", K. Bögel, Jahr.Ber. Deutsch. Math. Ver. 65 (1962), 45–71. Jedoch sind diese Begriffsbildungen koordinatensystemgebunden und laufen darauf hinaus, partielle Ableitungen höherer Ordnungen als Limiten von mehrdimensionalen Differenzenquotienten darzustellen, z. B. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ als Limes von $(f(x+h, y+k) - f(x, y+k) + f(x, y) - f(x+h, y))/hk$ für h und k gegen Null, usw. Demgegenüber ist das hier verfolgte Ziel, in einer koordinatenfreien Infinitesimalrechnung in linearen Räumen, wie sie z. B. in „Absolute Analysis" von F. und R. Nevanlinna, Berlin 1959, dargestellt wird, eine (koordinatenfreie) verfeinerte Grenzwertanalysis bereitzustellen.