BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1965

MÜNCHEN 1966

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über lateral konvergente Funktionen. I

Herrn Josef Lense zum 75. Geburtstag gewidmet

Von **Georg Aumann** in München

Vorgelegt am 4. Juni 1965

1. Die einseitig konvergenten Funktionen $f(x)$ einer reellen Veränderlichen x, bei Bourbaki ursprünglich „fonctions reglées", neuerdings „sprungstetige Funktionen"[1] genannt, sind gekennzeichnet durch die Existenz der einseitigen Limiten $f(x+)$ und $f(x-)$. Die nachfolgenden Betrachtungen führen entsprechende Begriffe für Funktionen mehrerer Veränderlicher ein. Ein Hinweis, in welcher Richtung man dabei zu gehen hat, findet sich in einer Arbeit von A. Rosenthal,[2] wo die Stetigkeit einer Funktion von zwei Veränderlichen charakterisiert wird durch die Stetigkeit aller ihrer Einengungen auf differenzierbare konvexe Kurven. Es zeigt sich, daß die diesen Einengungen entsprechenden „lateralen" Limiten als das sinngemäße Analogon zu den einseitigen Limiten im eindimensionalen Fall anzusehen sind. Dies wird vor allem durch den Satz bestätigt, wonach die „lateral konvergenten Funktionen" identisch sind mit den gleichmäßigen Limiten von Folgen simplizialer Treppenfunktionen. Dies wird im folgenden im 2-dimensionalen Fall näher dargelegt.

2. *Die lateralen Limiten einer Funktion von zwei Veränderlichen.*

Es sei G eine offene Punktmenge in einer (x, y)-Ebene; die Punkte in dieser Ebene beschreiben wir durch die Ortsvektoren $\mathfrak{x} = (x, y)$. Unter einem (orientierten) 2-Bein β in G verstehe ich

[1] N. Bourbaki, Élém. de Math., Fonct. d'une variable réelle, Actual. Scient. Industr. 1074, Paris (1949) p. 60; siehe auch: J. Dieudonné, Fondements de l'analyse moderne, Paris 1963, p. 137. Mit „Regelfunktion" übersetzt bei G. Aumann, Reelle Funktionen, Berlin (1954), p. 236, „Sprungstetig" bei P. Lorenzen, Differential und Integral, Frankfurt a. M. (1965), p. 107.

[2] On the Continuity of Functions of Several Variables, Math. Z. 63 (1955), 31–38.

das geordnete Tripel $\beta = (\mathfrak{x}_\beta, \mathfrak{e}_{1\beta}, \mathfrak{e}_{2\beta})$, bestehend aus dem Punkt $\mathfrak{x}_\beta \in G$ und den zwei aufeinander senkrechten Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_{1\beta}, \mathfrak{e}_{2\beta}$. Ein *zu β gehöriger Sektor* σ ist ein Kreissektor, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{x}_\beta$ ist, dessen einer Schenkel ein positives Vielfaches von $\mathfrak{e}_{1\beta}$ und dessen anderer Schenkel eine positive Linearkombination von $\mathfrak{e}_{1\beta}$ und $\mathfrak{e}_{2\beta}$ ist. σ heißt *klein*, wenn sein Radius und sein Öffnungswinkel klein sind. Im folgenden bezeichnen wir der Einfachheit halber das Innere von σ auch kurz mit σ.

Es sei nun $f|G$ eine reelle Funktion, erklärt in G. Wir schreiben

$$\beta\text{-}\lim f = a,$$

wenn sich die Werte von $f(\mathfrak{x})$ beliebig wenig von a unterscheiden, sobald $\mathfrak{x}$ in einem hinreichend kleinen zu β gehörigen Sektor σ liegt.

$f|G$ heißt *lateral konvergent*, wenn (a) jede Einengung von f auf eine in G gelegene Strecke eine Regelfunktion liefert (d. h. einseitig konvergent ist); (b) der β-lim f für jedes β in G existiert.

Die lateral konvergenten Funktionen nennen wir kurz *LC-Funktionen.*

Satz 1. *$f|G$ ist dann und nur dann eine LC-Funktion, wenn jede Einengung $f|B$ von f auf einen (in G gelegenen) differenzierbaren konvexen Kurvenbogen B eine Regelfunktion (als Funktion der Bogenlänge) ergibt.*

Beweis. 1. Es sei f eine LC-Funktion und B ein differenzierbarer konvexer Bogen, etwa mit dem Endpunkt $\mathfrak{x}_0$.

Fall 1. Ein an $\mathfrak{x}_0$ angrenzender Teilbogen B' von B sei geradlinig. Da wegen Eigenschaft (a) $f|B'$ eine Regelfunktion, so existiert $\lim f(\mathfrak{x})$ für $B \ni \mathfrak{x} \to \mathfrak{x}_0$.

Fall 2. B liegt, abgesehen von $\mathfrak{x}_0$, nicht auf der Halbtangente s_0 von B in x_0, und, weil konvex, dann auf einer Seite von s_0; wir bilden dazu das 2-Bein $\beta = (\mathfrak{x}_0, \mathfrak{e}_{10}, \mathfrak{e}_{20})$, wo $\mathfrak{e}_{10}$ den Einheitsvektor in Richtung von s_0 und $\mathfrak{e}_{20}$ den Einheitsvektor senkrecht zu $\mathfrak{e}_{10}$ mit Richtung nach der Seite von s_0, in der B liegt. Ist σ ein zu β gehöriger Sektor, in dem die Funktionswerte von f um weniger als ε schwanken, so gilt dasselbe auch auf jenem, an $\mathfrak{x}_0$ angrenzenden Teilbogen von B, der in σ enthalten ist. Daher ist auch in diesem Falle $\lim f(\mathfrak{x})$ für $B \ni \mathfrak{x} \to \mathfrak{x}_0$ vorhanden, also $f|B$ eine Regelfunktion.

2. Es sei die Funktion $f|B$ für jeden differenzierbaren konvexen Bogen B eine Regelfunktion. Dann ist offensichtlich die Eigenschaft (a) erfüllt. Angenommen (b) wäre nicht erfüllt. Dann gibt es ein 2-Bein $\beta = (\mathfrak{x}^*, \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2)$ in G, für das β-$\lim f$ nicht existiert. Es gibt also weiter ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß in jedem noch so kleinen zu β gehörigen Sektor σ zwei Stellen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ liegen mit $|f(\mathfrak{x}_1) - f(\mathfrak{x}_2)| \geq \varepsilon_0$. Wir betrachten eine Folge $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ von solchen Sektoren mit monoton nach Null strebenden Radien und Öffnungswinkeln; die zwei Stellen mit obiger Eigenschaft in σ_n bezeichnen wir mit $\mathfrak{x}_{1n}, \mathfrak{x}_{2n}$. Ohne Beschränkung können wir es so einrichten, daß die durch die Paare $\mathfrak{x}_{\nu i}, \mathfrak{x}_{\nu+1\, j}$, $i = 1, 2$ und $j = 1, 2$, bestimmten vier Verbindungsgeraden den Halbstrahl $(\mathfrak{x}^*, \mathfrak{e}_1)$ schneiden, und zwar mit Winkeln, die sämtlich kleiner sind als die entsprechenden Schnittwinkel der vier Verbindungsgeraden, die zum ν vorausgehenden Index $\nu' = \nu - 1$ gehören. Es gibt dann ein j_ν, so daß mit $\mathfrak{y}_\nu = \mathfrak{x}_{\nu j_\nu}$ gilt:

$$|f(\mathfrak{y}_\nu) - f(\mathfrak{y}_{\nu+1})| < \varepsilon_0/2 \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Die $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \ldots$ bilden die Ecken eines konvexen Polygons, durch die man einen differenzierbaren konvexen Bogen B legen kann mit dem Endpunkt $\mathfrak{x}^*$ (Vgl. Rosenthal, l. c. S. 33). Da $\lim f(x)$ mit $B \ni x \to \mathfrak{x}^*$ nicht existiert, ist der gewünschte Widerspruch hergestellt. f erfüllt also auch die Bedingung (b).

Satz 2. *Jeder gleichmäßige Limes von LC-Funktionen ist wieder eine LC-Funktion.*

Bemerkung. Gleichmäßige Konvergenz bedeutet hier und im folgenden, wie üblich, „gleichmäßige Konvergenz auf jedem abgeschlossenen beschränkten Teilbereich des (gemeinsamen) Definitionsbereichs der Funktionen".

Beweis. Ist $(f_n)_n$ eine gleichmäßig gegen f konvergente Folge von LC-Funktionen, und ist B ein differenzierbarer konvexer

Bogen, so ist nach dem vorausgehenden Satz $(f_n | B)_n$ eine gleichmäßig gegen $f | B$ konvergente Folge von Regelfunktionen, nach einem bekannten Satz[3] dann auch $f | B$ eine Regelfunktion und somit nach dem vorausgehenden Satz f eine LC-Funktion.

3. Ist $f | G$ eine reelle, auf der offenen Punktmenge G erklärte Funktion, so heißt $f | G$ eine *simpliziale Treppenfunktion*, wenn eine simpliziale und lokal endliche Zerlegung von G vorliegt

$$G = \bigcup_i \Delta_i ,$$

worin die Δ_i paarweise fremde („offene") Simplexe der Dimensionen 0, 1, 2 (d. h. also im 2-dimensionalen Fall Punkte, Strecken ohne Endpunkte und offene Dreiecksflächen) bezeichnen derart, daß in einer hinreichend kleinen Umgebung eines jeden Punktes von G nur endlich viele Δ_i einschneiden, und wenn ferner jedem Δ_i eine Zahl a_i zugeordnet ist, so daß

$$f(x) = a_i \quad \text{für} \quad x \in \Delta_i .$$

Satz 3. *Jede simpliziale Treppenfunktion ist eine LC-Funktion.*

Beweis. Die Eigenschaft (a) ist trivial nachweisbar; die Eigenschaft (b) gilt, weil auf jedem hinreichend kleinen Sektor σ der fraglichen Art die Treppenfunktion identisch konstant ist.

Satz 4. *Der gleichmäßige Limes einer Folge von simplizialen Treppenfunktionen ist eine LC-Funktion.*

(Folgt unmittelbar aus Satz 2 und 3).

Es gilt aber auch das Umgekehrte:

Satz 5. *Jede LC-Funktion $f | G$ ist gleichmäßiger Limes einer Folge von simplizialen Treppenfunktionen.*

Beweis. Ist $\mathfrak{x}_0 \in G$, so gibt es auf jedem Halbstrahl $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{e})$ durch $\mathfrak{x}_0$ mit der Richtung $\mathfrak{e}$ eine Anfangsstrecke, auf der die Schwankung von f kleiner ist als die vorgegebene Zahl $\varepsilon > 0$, ferner Sektoren σ bzw. σ', zum 2-Bein $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{e}, \mathfrak{e}_\perp)$ bzw. $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{e}, -\mathfrak{e}_\perp)$ gehörig, worauf jeweils die Schwankung von f kleiner ist als ε.

[3] Siehe etwa G. Aumann, l. c. Fußnote 1, S. 237.

Ohne Beschränkung können wir die Radien der beiden Sektoren und die Länge der genannten Anfangsstrecke gleich (etwa als die kleinste der drei Größen) wählen. Die Anfangsstrecke und die beiden Sektoren zusammen bilden einen Kreissektor $\sum(\varepsilon)$, der ein Anfangsstück des Halbstrahls $(\mathfrak{x}_0, \mathfrak{e})$ überdeckt. Daher überdecken bereits endlich viele dieser Sektoren $\sum(\varepsilon)$ eine Umgebung von $\mathfrak{x}_0$. Wir können daher um $\mathfrak{x}_0$ eine Kreisscheibe legen, welche in endlich viele offene Sektoren und Radien zerlegt ist, und auf jedem dieser Sektoren und Radien ist die Schwankung von $f < \varepsilon$. Wir ersetzen diese Kreisscheibe durch einen Kreispolygon, den „Stern" $S_{\mathfrak{x}_0}$, dessen Mittelpunkt $\mathfrak{x}_0$ ist und dessen Außenecken die Endpunkte der genannten Radien sind. Auf jedem Simplex von $S_{\mathfrak{x}_0}$ ist die Schwankung von $f < \varepsilon$. Eine eventuelle Verkleinerung erzwingt, daß die abgeschlossene Hülle $S_{\mathfrak{x}_0}$ in G enthalten ist.

Nun betrachten wir eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge F von G. Bereits endlich viele der $S_{\mathfrak{x}}$ überdecken F, etwa für $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n$. Die Vereinigung $T = \bigcup_i S_{\mathfrak{x}_i}$ kann durch Übergang zu einer Verfeinerung der durch die $S_{\mathfrak{x}_i}$ erzeugten polygonalen Zerlegung von T als simpliziale Zerlegung $T = \bigcup_j \Delta_j$ geschrieben werden. Auf jeden Δ_j ist f erst recht von einer Schwankung kleiner als ε. Definiert man die Funktion g gemäß

$$g(x) = f(y_j) \text{ für alle } x \in \Delta_j,$$

wobei y_j in Δ_j gewählt ist, so hat man das gewünschte Resultat

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad x \in T.$$

Die restliche Behauptung des Satzes ergibt sich durch simpliziale Ausschöpfung von G.

4. Die Ausdehnung der Resultate auf den n-dimensionalen Fall bereitet keine besonderen Schwierigkeiten. An Stelle der differenzierbaren konvexen Kurve tritt der bereits von A. Rosenthal (l. c.) eingeführte Begriff der „*primitiven*" Kurve im n-dimensionalen Raum R^n. Die zu einem n-Bein $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n)$, wo $\mathfrak{x}$ ein Punkt im R^n und $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ n paarweise aufeinander senkrechte Einheitsvektoren bezeichnen, gehörigen Sektoren σ sind analog zu definieren: σ ist der Durchschnitt einer (kugelförmigen) Umgebung von $\mathfrak{x}$ mit einem von $\mathfrak{x}$ ausgehenden Kegel, erzeugt durch die positiven Linearkombinationen von n in $\mathfrak{x}$ angesetzten Vektoren der Gestalt

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_1 &= \mathfrak{e}_1 \\ \mathfrak{f}_2 &= \mathfrak{e}_1 + p_2 \mathfrak{e}_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{f}_n &= \mathfrak{e}_1 + p_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + p_n \mathfrak{e}_n , \end{aligned}$$

mit positiven $p_2, \ldots\ldots, p_n$.

5. Da die Regelfunktionen einer Veränderlichen bemerkenswerte Integrabilitätseigenschaften haben,[4] wird die nächste Aufgabe sein, die entsprechenden Eigenschaften bei den *LC*-Funktionen zu untersuchen. Die Frage konzentriert sich dabei auf das Problem, die gleichmäßigen Limiten integrierbarer (d. h. hier tangential stetiger) simplizialer Treppen-Vektorfelder in geometrischer Weise zu kennzeichnen. Darüber soll in einer folgenden Arbeit berichtet werden.

---

[4] Jede Regelfunktion einer Veränderlichen besitzt eine stetige „Stammfunktion", siehe Fußnote 3.