BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1964

MÜNCHEN 1965

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Miszellen zur hyperbolischen Geometrie

Von Oskar Perron in München

Mit drei Figuren

Vorgelegt am 6. November 1964

Es gibt ausgezeichnete Bücher über die „Grundlagen der Geometrie", nur ist der Titel falsch. Denn die einzige Grundlage der Geometrie, das heißt das, was aller Geometrie zu Grunde liegt, ist die Anschauung.

Übersicht

§ 1. Anschauung und unendlich ferne Punkte

Mit Geometrie hat man sich in grauer Vorzeit schon befaßt, teils aus praktischen Bedürfnissen, teils aber auch schon im Streben nach Erkenntnis. Vor etwa 2300 Jahren hat Euklid die bis dahin bekannten geometrischen Einzeltatsachen gesammelt, Neues hinzugefügt, Lücken geschlossen und dann aus dem gesamten Material ein wunderbar geordnetes System aufgebaut, bei dem alles Spätere aus dem Früheren logisch folgt. Seitdem gibt es die Wissenschaft „Euklidische Geometrie". Sie hatte schon damals einen reichen Inhalt, der dann im Lauf der Jahrhunderte durch Archimedes, Apollonius, Ptolemäus, Pappus, Pascal, Desargues und viele andere noch gewaltig vermehrt wurde. Aber trotz des immensen Inhalts fehlte der Euklidischen Geometrie bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts eines, nämlich die Existenz. Niemand hatte daran gedacht, ob nicht die Gefahr bestünde, daß man beim logischen Weiterbau der Geometrie einmal zu einem Theorem geführt werden könnte, das das Gegenteil eines früher gefundenen Theorems aussagt. Wäre das der Fall, dann wäre die ganze Arbeit der Jahrhunderte umsonst gewesen. Die Euklidische Geometrie wäre trotz ihres reichen und schönen Inhalts hinfällig, widerspruchsvoll, nicht existent. Niemand hatte an die Möglichkeit einer solchen Gefahr gedacht; jeder hatte es unbewußt für selbstverständlich gehalten, daß sie nicht besteht. Aber erst Hilbert hat um die Jahrhundertwende bewiesen, daß sie wirklich nicht besteht, indem er ein arithmetisches Modell der Euklidischen Geometrie konstruierte, womit ihr die Existenz gesichert war.

Seitdem ist man vorsichtig geworden und bei allen mathematischen Strukturen sichert man zuerst durch ein reales Modell die Existenz, ehe man an den weiteren Aufbau herangeht. Es gibt heute außer der Euklidischen noch zahlreiche andere Geometrien: Die hyperbolische und die elliptische, die beide auch als Nichteuklidisch bezeichnet werden; dann mehrere Geometrien, in denen es nur endlich viele Punkte gibt; ferner die projektive Geometrie. Außerdem kennt man Nicht-Archimedische, Nicht-Pascalsche, Nicht-Desarguessche Geometrien, dann eine Minkowskische Geometrie, eine Finslersche und noch andere. Sie alle werden real konstruiert, sind also widerspruchsfrei, haben Existenz. Aber die meisten haben im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie fast gar keinen Inhalt. Viele dieser Geometrien sind erschaffen worden zu einem ganz bestimmten Zweck: Die hyperbolische Geometrie, um zu beweisen, daß das Euklidische Parallelenaxiom keine logische Folge der übrigen Axiome ist; die Nicht-Desarguessche Geometrie, um zu beweisen, daß der Desarguessche Satz in der Ebene, obwohl ein reiner Lagesatz, doch keine logische Folge aus den Lageaxiomen der Ebene allein ist. Diese Geometrien kann man, nachdem sie das geleistet haben, was man von ihnen wollte, ruhig in die Wüste schicken. Keinem Menschen würde es wohl einfallen, etwa ein Handbuch der Nicht-Desarguesschen Geometrie zu schreiben; der ganze Inhalt würde aus nicht viel mehr bestehen als dem einzigen Lehrsatz, daß der Desarguessche Satz falsch ist.

Andere Geometrien, besonders die hyperbolische, hat man weniger stiefmütterlich behandelt und hat sie mit sehr beachtlichem Inhalt angefüllt, der aber an Reichhaltigkeit doch noch weit hinter dem Inhalt der Euklidischen Geometrie zurückbleibt.

Mir scheint aber aus verschiedenen Gründen, daß die hyperbolische Geometrie viel natürlicher und anschaulicher ist als die Euklidische. In beiden Geometrien hat man zur Vermeidung gewisser Umständlichkeiten als façon de parler sogenannte ideale oder unendlich ferne Punkte eingeführt, die keine eigentlichen Punkte sind. Die hyperbolische Geometrie sagt, wenn man zuerst in einer bestimmten Richtung in die Ferne schweift und dann auch in der entgegengesetzten Richtung, dann kommt man ganz woanders hin; jede gerade Linie hat also zwei verschiedene unendlich ferne Punkte. Das wird einem harmlos in seine Welt blickenden Menschenskind ganz natürlich scheinen und wird gerne akzeptiert werden. In der Euklidischen Geometrie aber hat die Gerade nur einen unendlich fernen Punkt. Zwei Menschen, die sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, sich also immer weiter voneinander entfernen, kommen zum selben unendlich fernen Punkt. Und wer etwa senkrecht zum Himmel auffährt, kommt bei Fortsetzung der Fahrt von unten durch die Hölle wieder heim. Das zu glauben, fällt dem harmlosen Menschenskind schon recht schwer, es widerspricht zu sehr seiner Anschauung, seiner Raumvorstellung. Und das Schlimmste ist, daß sich die Euklidischen Geister dann noch in zwei verschiedene Parteien spalten, die Analytiker und die Projektivisten. Bei den Analytikern gibt es überhaupt nur einen unendlich fernen Punkt, der allen Geraden gemeinsam gehört, was man sich schwer vorstellen kann. Für die Ebene wird empfohlen, man soll denken, sie wäre die Oberfläche einer riesigen Kugel, und die Rolle der Geraden auf ihr spielten die durch einen festen Punkt, sagen wir den Nordpol, gehenden Kreise. Der Nordpol wäre dann der allen Geraden gemeinsame unendlich ferne Punkt. Aber dagegen sträubt sich doch die naive Anschauung. Wenn man in der Nähe des Südpols wohnt, mag es angehen; da sieht man von Kreisen, die durch den Nordpol gehen, nur solche mit sehr großem Radius, die man zur Not als gerade Linien gelten lassen kann. Aber wenn man in der Nähe des Nordpols wohnt, da sind auch Kreise mit sehr kleinem

Radius dabei, die man unmöglich als gerade Linien akzeptieren kann. Aber der Gipfel der Nichtanschaulichkeit und Unvorstellbarkeit wird einem bei der Raumgeometrie zugemutet. Da soll man eine vierdimensionale „Hyperkugel“ zu Hilfe nehmen, die doch kein Mensch anschaulich erfassen kann, und die ganze Geometrie soll sich dann auf der dreidimensionalen „Hyperoberfläche“ oder „Oberhyperfläche“ dieser „Hyperkugel“ abspielen. Da wendet sich der Gast mit Grausen.

Bei den Projektivisten geht es nicht ganz so kommunistisch zu. Da sind die Geraden zu einzelnen Parallelenfamilien zusammengeschlossen und jede Familie hat ihren eigenen privaten unendlich fernen Punkt, in den sich nur die Mitglieder der Familie zu teilen haben, während die anderen Geraden keinen Anteil haben. Das mag manchem sympathischer sein. Aber dafür passiert jetzt ein anderes Unglück, das bei den Analytikern nicht passiert. Wenn nämlich ein Wanderer auf einer Geraden zu ihrem unendlich fernen Punkt wandert und dann bei Fortsetzung der Wanderung von der anderen Seite wieder heimkommt, dann erkennt er jammernd sein Vaterland nicht. Denn alles hat sich verdreht; links ist rechts, oben ist unten, und da mag dem armen Odysseus wohl ein Mühlrad im Kopf herumgehen.

So grausige Abenteuer erlebt man in der hyperbolischen Geometrie nicht. Da hat, wie gesagt, jede Gerade zwei verschiedene unendlich ferne Punkte, die der naive harmlose Weltbetrachter wirklich anschaulich erfassen kann; und da ich schon immer für die harmlosen Menschen und Sachen eingetreten bin, so möchte ich auch hier wieder eine Lanze für die hyperbolische Geometrie brechen. Man soll sie eifrig pflegen und hat dann noch den Vorteil, daß man die Euklidische gratis mitbekommt. Jede metrische Formel der hyperbolischen Geometrie geht nämlich, wenn man alle vorkommenden Strecken x durch $\frac{x}{R}$ ersetzt und die Formel mit einer passenden Potenz von R multipliziert, für $R \to \infty$ in eine Formel der Euklidischen Geometrie über. Wir wollen das kurz den HE-Prozeß nennen. Umgekehrt haben viele, ja sogar alle metrischen Formeln der Euklidischen Geometrie einen hyperbolischen Bruder oder sogar mehrere Brüder, aus denen sie durch den HE-Prozeß hervorgehen. Das ergibt sich schon daraus, daß in der hyperbolischen Geometrie gewisse krumme Flächen, die Grenzkugeln, existieren, auf denen die Gesetze der ebenen Euklidischen Geometrie gelten. Da hat man schon hyperbolische Brüder, aber wünschenswert sind für Sätze in der Euklidischen Ebene auch Brüder in der hyperbolischen Ebene. Zu vielen Sätzen der Euklidischen Geometrie kennt man hyperbolische Brüder der gleichen Dimension, zu anderen noch nicht; aber wer sucht, der findet. Ein Wort wäre noch zu sagen über die Ähnlichkeitslehre in der Euklidischen Geometrie. Diese gipfelt in dem Satz, daß es zu jeder geradlinigen Figur eine andere gibt mit denselben Winkeln und beliebig proportional vergrößerten oder verkleinerten Strecken. In der hyperbolischen Geometrie gibt es keine Ähnlichkeitslehre, aber der gerade erwähnte Satz der Euklidischen Geometrie ergibt sich trotzdem, nämlich einfach dadurch, daß der Grenzprozeß $R \to \infty$ gleichbedeutend ist mit dem Prozeß $aR \to \infty$ für ein beliebiges positives a.

Die Losung ist also: Man muß die hyperbolische Geometrie entwickeln, dann hat man die Euklidische auch. Für diese nicht leichte Aufgabe dürfte das Aufsuchen hyperbolischer Brüder zu bekannten Euklidischen Sätzen eine gute Vorübung sein. Dazu soll im folgenden ein kleiner Beitrag geleistet werden.

§ 2. Hyperbolische Brüder des Peripheriewinkelsatzes

In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ ist nach Satz XV.6 meines Buches[1] der Ausdruck

$$(1) \qquad \frac{\tanh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \tanh^2\left(\frac{c}{2}\right) - 2\tanh\frac{b}{2}\tanh\frac{c}{2}\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$$

gleich $\tanh^2 r$ oder $\coth^2 s$ oder 1, je nachdem die dem Dreieck umbeschriebene Kreisform ein gewöhnlicher Kreis vom Radius r oder eine Abstandslinie im Abstand s von ihrer Null-Linie oder ein Grenzkreis ist. Im Buch ist allerdings vorausgesetzt, daß a

[1] O. Perron, Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart 1962 (wird im folgenden einfach als „Buch" zitiert).

die größte Seite, also α der größte Winkel des Dreiecks ist. Wir werden aber gleich sehen, daß diese Voraussetzung nicht nötig ist. Nach dem ersten Cosinussatz (Buch § 30) ist nämlich

$$\cos\alpha = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c},$$

und wenn man hier alle $\cosh x$ durch $1 + 2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right)$ und alle $\sinh x$ durch $2\sinh\frac{x}{2}\cosh\frac{x}{2}$ ersetzt, ergibt sich:

(2)
$$\cos\alpha = \frac{\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) + 2\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right)\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{2\sinh\frac{b}{2}\cosh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\cosh\frac{c}{2}}.$$

Setzt man das im Zähler des Bruches (1) ein, so reduziert sich dieser Bruch durch ganz leichte Rechnung auf

(3)
$$\frac{\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{\cosh^2\left(\frac{b}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{c}{2}\right)\sin^2\alpha} = \frac{1}{4\cosh^2\left(\frac{a}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{b}{2}\right)\cosh^2\left(\frac{c}{2}\right)}\left(\frac{\sinh a}{\sin\alpha}\right)^2.$$

Dieser Ausdruck bleibt aber wegen des Sinussatzes (Buch § 30) bei Vertauschung der Seiten a, b, c unverändert, so daß die Voraussetzung, a sei die größte Seite, unnötig ist.

Man kann jetzt die Wurzel ziehen und erhält, wenn man zum reziproken Wert übergeht, den Satz, daß der Bruch

$$\frac{\cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\sin\alpha}{\sinh\frac{a}{2}} \tag{4}$$

gleich $\coth r$ bezw. $\tanh s$ bezw. 1 ist. Das ergibt den

Satz 1. *Wenn man über einer Strecke BC als Sehne einen Kreis- oder Grenzkreis- oder Abstandslinienbogen zeichnet, so hat für alle Punkte A des Bogens der Ausdruck*

$$\cosh\left(\frac{AB}{2}\right)\cosh\left(\frac{AC}{2}\right)\sin(\sphericalangle BAC)$$

einen konstanten Wert.

Damit haben wir einen Bruder des Peripheriewinkelsatzes der Euklidischen Schulgeometrie. Denn durch den HE-Prozeß gehen die cosh in cosh (0) = 1 über, und es ergibt sich die Konstanz von sin ($\sphericalangle BAC$), also von $\sphericalangle BAC$.

Wir wollen noch einen zweiten Bruder des Peripheriewinkelsatzes herleiten. Es ist identisch

$$\left(\cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\cos\alpha - \sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\right)^2$$

$$= \cosh^2\frac{b}{2}\cosh^2\frac{c}{2}(1-\sin^2\alpha) + \sinh^2\frac{b}{2}\sinh^2\frac{c}{2} - \frac{1}{2}\sinh b\sinh c\cos\alpha$$

$$= \frac{(\cosh b+1)(\cosh c+1)}{4} - \left(\cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\sin\alpha\right)^2 + \frac{(\cosh b-1)(\cosh c-1)}{4}$$

$$-\frac{1}{2}(\cosh b\cosh c - \cosh a)$$

$$= \frac{1+\cosh a}{2} - \left(\cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\sin\alpha\right)^2 = 1+\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) - \left(\cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\sin\alpha\right)^2.$$

Die hier rechts ins Quadrat erhobene Klammergröße ist aber nach (4) gleich $\sinh\frac{a}{2}$ multipliziert mit $\coth r$ oder $\tanh s$ oder 1. Die rechte Seite der vorigen Formel ist daher gleich

$$1+\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)(1-\coth^2 r) = 1-\left(\frac{\sinh\frac{a}{2}}{\sinh r}\right)^2$$

$$\text{oder}\quad 1+\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)(1-\tanh^2 s) = 1+\left(\frac{\sinh\frac{a}{2}}{\cosh s}\right)^2 \quad\text{oder}\quad 1.$$

Durch Wurzelziehen kommt also

$$\cosh\frac{b}{2}\cosh\frac{c}{2}\cos\alpha - \sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2} \tag{5}$$

$$= \pm\sqrt{1-\left(\frac{\sinh\frac{a}{2}}{\sinh r}\right)^2} \quad\text{oder}\quad \pm\sqrt{1+\left(\frac{\sinh\frac{a}{2}}{\cosh s}\right)^2} \quad\text{oder}\quad \pm 1.$$

Daraus folgt dann

Satz 2. *Wenn man über einer Strecke BC als Sehne einen Kreis- oder Grenzkreis- oder Abstandslinienbogen zeichnet, so hat für alle Punkte A des Bogens der Ausdruck*

$$\cosh\left(\frac{AB}{2}\right)\cosh\left(\frac{AC}{2}\right)\cos(\sphericalangle BAC)-\sinh\left(\frac{AB}{2}\right)\sinh\left(\frac{AC}{2}\right)$$

einen konstanten Wert.

Das ist der angekündigte zweite Bruder des Peripheriewinkelsatzes. Durch den HE-Prozeß gehen ja die cosh in 1 und die sinh in 0 über, und es ergibt sich die Konstanz von $\cos(\sphericalangle BAC)$, also von $\sphericalangle BAC$.

§ 3. Über das Kreisformensehnenviereck

Die Formel (5) geht, wenn man links für $\cos\alpha$ den Wert aus (2) einsetzt, über in

$$\frac{\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)}{2\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}} \tag{6}$$
$$=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\sinh\frac{a}{2}}{\sinh r}\right)^2}\quad\text{oder}\quad\pm\sqrt{1+\left(\frac{\sinh\frac{a}{2}}{\cosh s}\right)^2}\quad\text{oder}\quad\pm 1.$$

In dieser Formel wollen wir das Vorzeichen der Quadratwurzel untersuchen. Die Formel lehrt, daß der Ausdruck

$$\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) \tag{7}$$

dann und nur dann verschwindet, wenn $\sinh r=\sinh\frac{a}{2}$, also $r=\frac{a}{2}$ ist, das heißt, wenn die Ecke A auf dem Kreis K mit dem Durchmesser $BC=a$ liegt. Wenn daher A im Innern dieses Kreises liegt, muß der Ausdruck (7) ein festes Vorzeichen haben und ebenso, wenn A im Äußern von K liegt. Wenn wir nun A auf dem Mittellot des Durchmessers BC vom Innern ins Äußere wandern lassen, so nehmen b und c zu, also wächst auch der Ausdruck (7). Das feste Vorzeichen muß also im Innern von K das negative, im Äußern das positive sein.

Wir betrachten jetzt eine der drei Kreisformen und darauf vier Punkte 1, 2, 3, 4 in ihrer natürlichen Anordnung. Sie bilden ein Viereck (Fig. 1) mit den Seiten

$$a = \overline{12}, \quad b = \overline{23}, \quad c = \overline{34}, \quad d = \overline{41} \tag{8}$$

und den Diagonalen

$$e = \overline{24}, \quad f = \overline{13}. \tag{9}$$

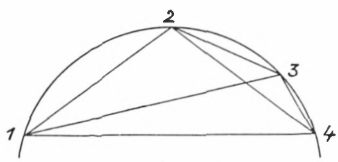

Fig. 1

Da die gegebene Kreisform dem Dreieck $\triangle$ 124 umbeschrieben ist, so ist nach (6)

$$\left(\frac{\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{d}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)}{2\sinh\frac{a}{2}\ \sinh\frac{d}{2}}\right)^2$$

$$= 1 - \left(\frac{\sinh\frac{e}{2}}{\sinh r}\right)^2 \quad \text{oder} \quad 1 + \left(\frac{\sinh\frac{e}{2}}{\cosh s}\right)^2 \quad \text{oder} \quad 1.$$

Da die Kreisform aber auch dem Dreieck $\triangle$ 234 umbeschrieben ist, ergibt sich für den Ausdruck

$$\left(\frac{\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)}{2\sinh\frac{b}{2}\ \sinh\frac{c}{2}}\right)^2$$

dasselbe, und durch Wurzelziehung erhält man

(10)

$$\frac{\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{d}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)}{\sinh\frac{a}{2}\ \sinh\frac{d}{2}} = \pm\frac{\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{c}{2}\right) - \sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)}{\sinh\frac{b}{2}\ \sinh\frac{c}{2}}.$$

Wenn nun die Kreisform zufällig der Kreis K mit dem Durchmesser $e = \overline{24}$ ist, so folgt aus dem Bewiesenen, daß diese Brüche gleich 0 sind. Wenn dagegen die Kreisform zwar ein gewöhnlicher Kreis ist, aber nicht der Kreis K mit dem Durchmesser $\overline{24}$, so ist klar, daß von den beiden Bogen 2 1 4 und 2 3 4 der kürzere im Innern, der längere im Äußern von K verläuft. Von den Ecken 1 und 3 liegt daher die eine im Innern, die andere im Äußeren von K, so daß nach dem Bewiesenen die Brüche in (10) entgegengesetztes Vorzeichen haben. Wenn schließlich die Kreisform ein Grenzkreis oder eine Abstandslinie ist, so liegt der Bogen 234, also insbesondere die Ecke 3, im Innern von K, die restlichen Teile der Kreisform, also insbesondere die Ecke 1 aber im Äußern von K, so daß die Brüche in (10) wiederum entgegengesetztes Vorzeichen haben. Hiernach können wir die Formel (10) präzisieren zu

(11)
$$\frac{\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{d}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)}{\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{d}{2}}=-\frac{\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right)-\sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)}{\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}}.$$

Löst man diese Gleichung nach $\sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)$ auf, so kommt

$$\sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)\left(\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{d}{2}+\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\right)$$
$$=\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{d}{2}\left[\sinh^2\left(\frac{b}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{c}{2}\right)\right]+\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}\left[\sinh^2\left(\frac{a}{2}\right)+\sinh^2\left(\frac{d}{2}\right)\right]$$
$$=\left(\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{c}{2}+\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{d}{2}\right)\left(\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{b}{2}+\sinh\frac{c}{2}\sinh\frac{d}{2}\right)$$

und wir gewinnen den

Satz 3. *In einem Kreisformensehnenviereck mit den Seiten (8) und den Diagonalen (9) kann man die Diagonale e durch die vier Seiten ausdrücken, und zwar ist* $\sinh^2\left(\frac{e}{2}\right)=$

$$\frac{\left(\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{c}{2}+\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{d}{2}\right)\left(\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{b}{2}+\sinh\frac{c}{2}\sinh\frac{d}{2}\right)}{\sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{d}{2}+\sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{c}{2}}.$$

Das ist der hyperbolische Bruder zu der bekannten Formel der Euklidischen Geometrie

$$e^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)}{ad + bc}.$$

Durch Rollentauschung bekommt man natürlich eine entsprechende Formel für die andere Diagonale f, und wenn man beide Formeln miteinander multipliziert und dann die Wurzel zieht, ergibt sich

$$\sinh\frac{e}{2}\sinh\frac{f}{2} = \sinh\frac{a}{2}\sinh\frac{c}{2} + \sinh\frac{b}{2}\sinh\frac{d}{2}$$

als hyperbolischer Bruder des Satzes von Ptolemäus.

Bemerkung. Die Resultate dieses Paragraphen lassen sich auch gewinnen, indem man die Seiten und Diagonalen als Sehnen der betreffenden Kreisfigur ansieht und dann die zugehörigen Bogen betrachtet.[1]

§ 4. Einige Konstruktionen

Satz 4. *In Fig. 2 sei die krumme Linie von P nach A der Grenzkreisbogen mit dem Mittelpunkt E über der Sehne PA. Von A sei das Lot auf den Radius PE gefällt mit dem Fußpunkt C.*

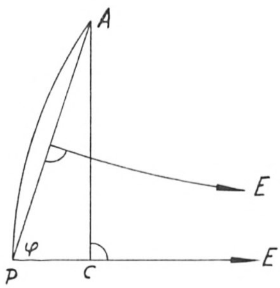

Fig. 2

[1] Man vergleiche dazu meine Arbeiten „Der Satz von Ptolemäus in der hyperbolischen Geometrie" in diesen Sitzungsberichten 1963 und „Seiten und Diagonalen eines Kreisvierecks in der hyperbolischen Geometrie" in Mathematische Zeitschrift 84 (1964).

Dann ist

$$\cosh(PA) = \frac{1}{1 - \tanh(PC)} = \cosh(PC)\exp(PC),$$

also nach Buch § 28 Formel (IV) auch

$$\cosh(AC) = \exp(PC).$$

Der Satz ist nicht neu, wir wollen aber einen kurzen Beweis anfügen. Da das Mittellot der Sehne PA auch durch den Mittelpunkt E gehen muß, ist $\varphi = \prod\left(\frac{PA}{2}\right)$, also nach Buch Seite 77 Formel (III) und Seite 75 Formel (10)

$$\frac{\tanh(PC)}{\tanh(PA)} = \cos\varphi = \cos\prod\left(\frac{PA}{2}\right) = \tanh\left(\frac{PA}{2}\right).$$

Hieraus folgt

$$\tanh(PC) = \tanh(PA)\tanh\left(\frac{PA}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\cosh^2(PA) - 1}}{\cosh(PA)}\sqrt{\frac{\cosh(PA) - 1}{\cosh(PA) + 1}} = \frac{\cosh(PA) - 1}{\cosh(PA)}.$$

Durch Auflösung nach $\cosh(PA)$ kommt

$$\cosh(PA) = \frac{1}{1 - \tanh(PC)} = \cosh(PC)\exp(PC). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Nun sei in Fig. 3 die krumme Linie APB ein Grenzkreisbogen mit dem Mittelpunkt E. Von A und B seien Lote auf den Radius PE gefällt mit den Fußpunkten C und D. Ferner sei von D ein Lot auf den Radius AE gefällt mit dem Fußpunkt Q und dieses nach rückwärts verlängert bis zum Schnittpunkt R mit dem Grenzkreis. Nach Satz 4 ist dann (die gerade Strecke PA ist nicht eingezeichnet)

$$(12) \qquad \begin{cases} \cosh(PA) = \cosh(PC)\exp(PC), \\ \cosh(AC) = \exp(PC), \end{cases}$$

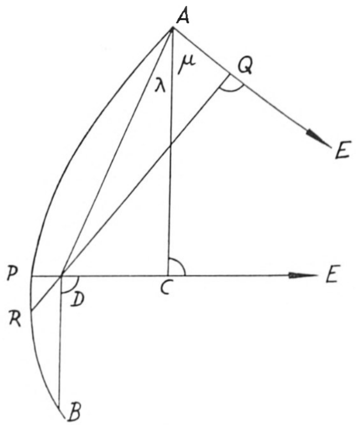

Fig. 3

und analog, weil ja der Grenzkreis an dem Radius PE sich spiegelt,

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} \cosh(PB) = \cosh(PD)\exp(PD), \\ \cosh(BD) = \exp(PD). \end{cases}$$

Was in Satz 4 für das Dreieck $\triangle PAC$ der Fig. 2 ausgesagt ist, wenden wir jetzt auch auf das Dreieck $\triangle ARQ$ der Fig. 3 an (die geradlinige Strecke AR ist nicht eingezeichnet). Dann erhalten wir

$$\text{(14)} \qquad \cosh(AR) = \frac{1}{1-\tanh(AQ)}.$$

Satz 5. *In Fig. 3 ist die Strecke AR so lang wie die Hypotenuse k eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten gleich AD und BD sind.*

Beweis. Nach Buch § 28 Formel (IV) ist

$$\cosh k = \cosh(AD)\cosh(BD).$$

Nach (14) brauchen wir also nur zu beweisen, daß die Formel

$$\frac{1}{1-\tanh(AQ)} = \cosh(AD)\cosh(BD)$$

gilt. Nun ist in der Figur $\mu = \Pi(AC)$, also nach Buch Seite 75

$$\sin\mu = \frac{1}{\cosh(AC)}, \qquad \cos\mu = \tanh(AC).$$

Ferner ist nach Buch § 28 Formel (II) und (III)

$$\sin\lambda = \frac{\sinh(DC)}{\sinh(AD)}, \qquad \cos\lambda = \frac{\tanh(AC)}{\tanh(AD)}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $\triangle QAD$ folgt daher nach Buch § 28 Formel (III)

$$\frac{\tanh(AQ)}{\tanh(AD)} = \cos(\lambda+\mu) = \cos\lambda\cos\mu - \sin\lambda\sin\mu$$
$$= \frac{\tanh(AC)}{\tanh(AD)}\tanh(AC) - \frac{\sinh(DC)}{\sinh(AD)}\,\frac{1}{\cosh(AC)}.$$

Also ist

$$\tanh(AQ) = \tanh^2(AC) - \frac{\sinh(DC)}{\cosh(AD)\cosh(AC)},$$

$$1-\tanh(AQ) = \frac{1}{\cosh^2(AC)} + \frac{\sinh(DC)}{\cosh(AD)\cosh(AC)}$$
$$= \frac{\cosh(DC)+\sinh(DC)}{\cosh(AD)\cosh(AC)} = \frac{\exp(DC)}{\cosh(AD)\cosh(AC)},$$

wo zur Gewinnung des vorletzten Gleichheitszeichens von der Formel $\cosh(AD) = \cosh(AC)\cosh(DC)$ Gebrauch gemacht ist (nach Buch § 28 Formel (IV)). Da nach (12) aber $\cosh(AC) = \exp(PC)$ ist, folgt schließlich, wenn man zum reziproken Wert übergeht:

$$\frac{1}{1-\tanh(AQ)} = \cosh(AD)\exp(PC-DC) = \cosh(AD)\exp(PD),$$

und mit Rücksicht auf (13)

$$\frac{1}{1-\tanh(AQ)} = \cosh(AD)\cosh(BD). \qquad \text{W. z. b. w.}$$

Wir haben die Figur so gezeichnet, daß $PC > PD$ ist. Für $PC < PD$ wäre DC nicht gleich $PC - PD$, wie wir stillschweigend gerechnet haben, sondern gleich $PD - PC$. Aber auch λ wäre dann durch $-\lambda$ zu ersetzen und die Rechnung bliebe dieselbe.

Bezeichnen wir jetzt die Längen der Grenzkreisbogen PA, PB, AR mit a, b, c, so ist nach Buch § 45

$$a = 2\sinh\left(\frac{PA}{2}\right), \quad b = 2\sinh\left(\frac{PB}{2}\right), \quad c = 2\sinh\left(\frac{AR}{2}\right).$$

Daher ist unter Berücksichtigung von Satz 4

$$a^2 = 4\sinh^2\left(\frac{PA}{2}\right) = 2[\cosh(PA) - 1] = 2\cosh(PC)\exp(PC) - 2$$
$$= [\exp(PC) + \exp(-PC)]\exp(PC) - 2 = \exp(2PC) - 1,$$

und entsprechend

$$b^2 = \exp(2PD) - 1, \quad c^2 = \exp(2AQ) - 1.$$

Nach dem Bewiesenen ist nun

$$\frac{1}{1-\tanh(AQ)} = \cosh(AD)\cosh(BD) = \cosh(AC)\cosh(DC)\cosh(BD)$$
$$= \exp(PC)\frac{\exp(DC) + \exp(-DC)}{2}\exp(PD)$$
$$= \frac{\exp(2PC) + \exp(2PD)}{2}.$$

Da aber identisch

$$\exp(2AQ) \approx \frac{1+\tanh(AQ)}{1-\tanh(AQ)} = \frac{2}{1-\tanh(AQ)} - 1$$

ist, so ergibt sich $c^2 = \exp(2AQ) - 1$

$$= \frac{2}{1-\tanh(AQ)} - 2 = \exp(2PC) + \exp(2PD) - 2 = a^2 + b^2.$$

Also ist

$$(15) \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

oder, wenn man für a, b, c die obigen Werte einsetzt

$$(16)\qquad \sinh^2\left(\frac{PA}{2}\right) + \sinh^2\left(\frac{PB}{2}\right) = \sinh^2\left(\frac{AR}{2}\right).$$

Die Formel (15) läßt sich im Raum interpretieren. Dazu betrachten wir die Grenzkugel, die aus unserem Grenzkreis durch Rotation um einen beliebigen seiner Radien entsteht. Wenn wir das Dreieck PDB um den Radius PE aus der Zeichenebene herausdrehen, und zwar um einen rechten Winkel, dann geht der Punkt B in einen Punkt B_0 über, der im Abstand BD senkrecht über D liegt. Der Bogen PB geht dabei in den Grenzkreisbogen PB_0 über, der auf unserer Grenzkugel liegt und auf dem Bogen PA senkrecht steht. Wenn wir weiter das Dreieck AQR um den Radius AE aus der Zeichenebene herausdrehen, so wird der Punkt R sich in der Lotebene über RQ bewegen und wird einmal senkrecht über D zu liegen kommen. Nach Satz 5 liegt er dann im Abstand BD über D, also im Punkt B_0, und der Bogen AR geht in den auf unserer Grenzkugel liegenden Grenzkreisbogen AB_0 über. Wir gewinnen also auf der Grenzkugel ein rechtwinkliges Dreieck aus Grenzkreisbögen, und für deren Längen a, b, c gilt die Formel (15), also der Pythagoräische Lehrsatz. Das ist gleichwertig mit der von Lobatschefskij und Joh. Bolyai erkannten und zur Berechnung des Parallelwinkels benutzten Tatsache, daß auf der Grenzkugel die Euklidische Geometrie herrscht.

Wir wollen jetzt die Formel (16) benutzen, um folgende zwei Konstruktionsaufgaben durchzuführen:

1. Zu gegebenen Strecken x, y eine Strecke z zu finden, die der Bedingung genügt: $\sinh^2 z = \sinh^2 x + \sinh^2 y$.

2. Zu zwei gegebenen Strecken x, z mit $x < z$ eine Strecke y zu finden, die der Bedingung genügt: $\sinh^2 y = \sinh^2 z - \sinh^2 x$.

Zur Lösung der ersten Aufgabe konstruieren wir zuerst die Winkel $\Pi(x)$ und $\Pi(y)$, was nach Buch § 16 Aufgabe 1 geht, und tragen diese Winkel im Punkt P an einen Strahl PE an. Auf ihren freien Schenkeln tragen wir von P aus die Strecken $2x$ und $2y$ ab. Sind A und B die Endpunkte, so liegen A, P, B auf einem

Grenzkreis (Buch § 43 erster Absatz) mit dem Mittelpunkt E. Von B fällen wir ein Lot auf PE mit dem Fußpunkt D. Die gesuchte Strecke hat nun in Fig. 3 die Länge $\frac{AR}{2}$. Wir brauchen uns aber um den Punkt R gar nicht zu bemühen. Denn nach Satz 5 ist AR gleich der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten AD und BD. Damit hat man eine Strecke der Länge AR und also auch $z = \frac{AR}{2}$.

Zur Lösung der zweiten Aufgabe zeichnen wir eine Strecke der Länge $2z$ mit den Endpunkten A und R (Fig. 3). Über ihr als Sehne gibt es einen Grenzkreisbogen, den wir natürlich nicht zeichnen können. Wir kennen aber seinen Mittelpunkt E als das eine Ende des Mittellotes von AR und können daher den Radius AE zeichnen, indem wir an die Strecke AR im Punkt A den Winkel $\prod\left(\frac{AR}{2}\right) = \Pi(z)$ antragen. In Fig. 3 ist nun $AP = 2x$ und folglich $\sphericalangle PAE = \Pi(x)$. Diesen Winkel müssen wir an AE antragen und auf dem freien Schenkel die Strecke $2x$ abschneiden; der Endpunkt ist dann der Punkt P. Wir können dann den Radius PE zeichnen (als Parallelstrahl zu AE) und ihn mit dem von R auf AE gefällten Lot zum Schnitt bringen in D. Nun fehlt uns noch der Punkt B. Nach Satz 5 ist die Länge von BD gleich der zweiten Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit der ersten Kathete AD und der Hypotenuse AR. Damit haben wir den Punkt B und also auch die gesuchte Strecke $y = \frac{PB}{2}$.

Die Formel $\sinh^2 x + \sinh^2 y = \sinh^2 z$ geht durch den HE-Prozeß über in $x^2 + y^2 = z^2$, und in der Euklidischen Geometrie konstruiert man, wenn zwei der drei Strecken gegeben sind, die dritte einfach nach dem Pythagoräischen Lehrsatz mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks. Auch unsere hyperbolische Konstruktion geht durch den HE-Prozeß sofort in diese geläufige Konstruktion über. Denn ein beliebiger Parallelwinkel $\Pi(x)$ geht über in $\Pi(0) = \frac{\pi}{2}$, der Grenzkreis wird zur geraden Linie, und dann führt ja unsere Konstruktion auf das rechtwinklige Dreieck mit den Seiten $PA = 2x$, $PB = 2y$, $AR = 2z$.

§ 5. Das reguläre Fünfeck

Ein Glanzstück des Werkes von Euklid ist gewiß die Konstruktion eines regulären Fünfecks in Nr. 11 des vierten Buches. Daß man auch in der hyperbolischen Geometrie alle regulären Polygone konstruieren kann, deren Konstruktion in der Euklidischen Geometrie möglich ist, also insbesondere das Fünfeck, hat bereits Joh. Bolyai aus der Tatsache erschlossen, daß auf der Grenzkugel die Euklidische Geometrie herrscht. Aber von da aus, wo man ja statt der Zeichenebene eine Zeichengrenzkugel und statt des Lineals einen auf der Grenzkugel verschiebbaren Stab mit Grenzkreiskanten haben müßte, bis zur wirklichen Konstruktion (das heißt Beschreibung der Konstruktion mit allen Details) in der Ebene ist noch ein weiter Schritt, und ich weiß nicht, ob er für das Fünfeck jemals getan worden ist. Deshalb sei hier eine Konstruktion angegeben, die durch den HE-Prozeß sofort in die Konstruktion von Euklid übergeht.

Der Zentriwinkel eines regulären Fünfecks ist $\frac{2\pi}{5}$; es handelt sich also um die Konstruktion dieses Winkels. Nun ist die fünfte Potenz von $\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$ gleich $\exp(2\pi i) = 1$. Also ist $\exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right) = x$ eine Lösung der Gleichung $x^5 - 1 = 0$, oder nach Division durch $x - 1$

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$$

und nach weiterer Division durch x^2:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0.$$

Nun ist

$$x + \frac{1}{x} = \exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right) + \exp\left(-\frac{2\pi i}{5}\right) = 2\cos\frac{2\pi}{5}.$$

Daher ist $2\cos\frac{2\pi}{5} = u$ eine Lösung der Gleichung

$$u^2 + u - 1 = 0$$

und da $\cos\frac{2\pi}{5}$ positiv ist, folgt

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \tag{17}$$

also auch

$$\sin\frac{\pi}{10} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \tag{18}$$

Wir zeichnen jetzt durch einen Punkt P einen Strahl mit dem Ende E und denken uns den Grenzkreis durch P mit dem Mittelpunkt E. Zeichnen wir irgendeinen Parallelstrahl zu PE, fällen auf ihn von P aus das Lot und verdoppeln es, so ist der Endpunkt ein Punkt des Grenzkreises (Buch § 43 erster Absatz). Diesen nehmen wir als Punkt B der Fig. 3. Den Punkt A wählen wir so, daß der Bogen PA zweimal so lang wie der von PB ist. Dieser Punkt A ergibt sich, indem wir zuerst B an PE spiegeln, was einen Punkt F des Grenzkreises gibt, sodann durch F den Radius, also den Parallelstrahl zu PE zeichnen (Buch § 16 Aufgabe 1), auf ihn von P aus das Lot fällen und dieses verdoppeln; der Endpunkt ist der gewünschte Punkt A, durch den wir dann den Radius AE zeichnen. Wenn wir die Länge des Bogens PA wieder mit a bezeichnen und die Konstruktion der Fig. 3 weiterführen, dann ist die Länge des Bogens AR gleich $\sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\,a$, und die Länge des Bogens RF gleich

$$\frac{\sqrt{5}}{2}\,a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a.$$

Bezeichnet man die Sehne von RF mit s, so ist also nach Buch § 45

$$2\sinh\frac{s}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\,a.$$

Weiter sieht man, indem man den Bogen PA durch Spiegelung am Radius PE verdoppelt, daß AC die halbe Sehne des verdoppelten Bogens PA ist; also ist

$$2\sinh(AC) = 2\,a.$$

Durch Division der letzten beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{\sinh \frac{s}{2}}{\sinh (AC)} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \sin \frac{\pi}{10}.$$

Zeichnet man daher ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AC und einer Kathete $\frac{s}{2}$, so ist nach Buch § 28 Formel (II) der gegenüberliegende Winkel gleich $\frac{\pi}{10}$, sein Komplement also der gesuchte Winkel $\frac{2\pi}{5}$.

Bei Euklid geht der Konstruktion des regulären Fünfecks in großem Abstand der Goldene Schnitt voraus (Nr. 11 des zweiten Buches), der in Nr. 30 des sechsten Buches in anderer Fassung noch einmal kommt. In der Schule ist das heute ebenso, nur folgt das Fünfeck viel schneller auf den Goldenen Schnitt. In der hyperbolischen Geometrie hat man als Analogon die Aufgabe, einen Grenzkreisbogen nach dem Goldenen Schnitt zu teilen. Sie ist sofort gelöst, wenn wir von dem Bogen AR einen Bogen der Länge AB nicht von A aus abschneiden (bis F), sondern von R aus bis G (wozu wir zuerst von R aus den Radius RE konstruieren müssen). Dann teilt der Punkt G den Bogen PA nach dem Goldenen Schnitt. In der Tat ist ja

$$\text{Bogen } (PA) = a,$$

$$\text{Bogen } (AG) = \text{Bogen } (RF) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, a,$$

$$\text{Bogen } (PG) = a - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, a.$$

Also

$$\text{Bogen } (PA) \times \text{Bogen } (PG) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}\, a^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 a^2 = (\text{Bogen } (AG))^2,$$

oder, etwas anders geschrieben:

$$\frac{\text{Bogen } (PA)}{\text{Bogen } (AG)} = \frac{\text{Bogen } (AG)}{\text{Bogen } (PG)};$$

das ist der Goldene Schnitt.