BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über approximative Nomographie. III

Herrn Heinrich Tietze zum 80. Geburtstag am 31. August 1960 gewidmet

Von **Georg Aumann** in München

Vorgelegt am 8. Juli 1960

1. Die in meiner ersten Note über approximative Nomographie [1] eingeführte Methode der „alternierenden Symmetrisierung" scheint besonders geeignet zu sein für Tschebyscheffsche Approximationen mittels Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen: Ist die endliche Menge M überdeckt mit den Mengen $A_1, \ldots, A_r$, $M = \bigcup_{\varrho=1}^{r} A_\varrho$, und bezeichnet t_ϱ die charakteristische Funktion der Menge A_ϱ, so kann man versuchen, eine vorgegebene Funktion $f \mid M$ durch Ausdrücke der Form $\varphi = \lambda_1 t_1 + \cdots + \lambda_r t_r$ so anzunähern, daß

$$\| f - \varphi \| = \max \{ | f(x) - \varphi(x) | : x \in M \}$$

minimal ausfällt. Besteht z. B. M aus den Feldern einer (endlichen) Matrix und wählt man als die Mengen A_ϱ die Zeilen und Spalten, so führt das eben genannte Approximationsproblem auf das „Matrixproblem" in der erwähnten Note, d. h. auf das Problem

$$(\mathrm{M}_2) \qquad a_{ij} \sim u_i + v_j,$$

nämlich die Matrix (a_{ij}) zu approximieren durch eine Matrix der Form $(u_i + v_j)$. An anderer Stelle [2] habe ich anhand eines Beispiels gezeigt, daß die Methode der alternierenden Symmetrisierung nicht bei jeder beliebigen Art der Überdeckung zu einer Lösung des Approximationsproblems führt; es müssen vielmehr gewisse kombinatorische Bedingungen erfüllt sein. Während z. B. bei (M_2) die Methode funktioniert, ist dies beim Problem

$$(M_3) \qquad a_{ijk} \sim u_i + v_j + w_k,$$

bei welchem die Überdeckung durch die Schichten $i =$ konst., $j =$ konst. und $k =$ konst. nicht minder regulär ist als die entsprechende Überdeckung beim Problem (M_2), nicht der Fall. Die folgende Mitteilung ist ein erster Schritt in Richtung der Untersuchung dieses merkwürdigen Verhaltens; es wird der Begriff des „Approximationsgeflechtes" eingeführt, seine Bedeutung für Tschebyscheffsche Approximationen mittels Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen dargelegt (Satz in **3.**) und ein wichtiges Beispiel (Satz in **5.**) behandelt. Am Schluß wird auf ein allgemeines Approximationsproblem hingewiesen, das noch seiner Erledigung harrt und Gegenstand einer späteren Note sein soll.

2. Ich nehme Bezug auf die in **1.** eingeführten Bezeichnungen.

Nennt man eine Funktion $\bar{f} \mid M$ *bezüglich* $\bigcup A_\varrho$ *zu* f *verwandt*, wenn

$$\bar{f} = f - \sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho \, t_\varrho,$$

wo λ_ϱ irgendwelche reelle Zahlen und t_ϱ die charakteristische Funktion von A_ϱ ($t_\varrho(x) = 1$ bzw. 0, je nachdem $x \in A_\varrho$ bzw. $\notin A_\varrho$) bedeuten, so lautet das fragliche Approximationsproblem: Zu gegebenem f ist eine Verwandte $\bar{f}$ von kleinst-möglicher Norm $\|\bar{f}\|$ zu bestimmen; $\varphi = f - \bar{f}$ ist dann die Lösung des Approximationsproblems.

Der Übergang von der Funktion f zur Funktion

$$(1) \qquad S_\varrho f = f - \frac{1}{2} (\max f \mid A_\varrho + \min f \mid A_\varrho) \cdot t_\varrho$$

(„*Symmetrisierung von* f *auf* A_ϱ"), liefert in $S_\varrho f$ eine Verwandte zu f mit einer Norm

$$\| S_\varrho f \| \leq \| f \|,$$

unter Umständen also eine Verbesserung im Sinne des Approximationszieles. Nennen wir eine Funktion f *ausgeglichen*, wenn

$$S_\varrho f = f \text{ für alle } \varrho$$

gilt, so ist, falls f ausgeglichen ist, durch Übergänge der Art (1) keine Verbesserung zu erreichen. Es erhebt sich damit die Frage, ob und unter welchen Voraussetzungen eine ausgeglichene Verwandte f von f von kleinst-möglicher Norm ist, d. h. mit der Bestimmung einer ausgeglichenen Verwandten f von f bereits eine Lösung des Approximationsproblems gewonnen ist.

In Behandlung dieser Frage definieren wir: Die eindeutige nicht-identisch verschwindende Funktion $\sigma \| M$ heißt eine *Wechselfunktion (W-Funktion) bezgl. der Überdeckung* $\bigcup A_\varrho$ von M, wenn gilt:

1. $\sigma(x) \in \{0, +1, -1\}$ für alle $x \in M$;
2. ist $\sigma \| A_\varrho$ nicht identisch Null, so nimmt σ auf A_ϱ sowohl den Wert $+1$ als auch -1 an, $\varrho \in \{1, \ldots, r\}$.

Die Überdeckung $\bigcup A_\varrho$ von M heißt ein *Approximationsgeflecht (A-Geflecht)* auf M, wenn es zu jeder W-Funktion $\sigma | M$ bzgl. $\bigcup A_\varrho$ eine nicht identisch verschwindende Funktion $s | M$ gibt, so daß

$$\text{(I)} \qquad \operatorname{sgn} s(x) \in \{0, \sigma(x)\} \text{ für alle } x \in M,$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{x \in A_\varrho} s(x) = 0 \text{ für alle } \varrho \in \{1, \ldots, r\};$$

dabei ist $\operatorname{sgn} a = +1, -1$ bzw. 0, je nachdem $a > 0, < 0$ bzw. $= 0$ ist.

3. Mit den obigen Definitionen erhalten wir den

Satz. *Ist die Überdeckung* $\bigcup A_\varrho$ *ein A-Geflecht, sind* f *und* g *verwandt bzgl.* $\bigcup A_\varrho$ *und ist* g *ausgeglichen, so ist* $\varphi = f - g$ *eine beste Approximation von* f *durch Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen der* A_ϱ *und* $\| g \|$ *ist das Minimum des Approximationsfehlers.*

Beweis. Ist $\| g \| = 0$, so ist nichts weiter zu beweisen. Es sei daher $\| g \| = a > 0$. Wir erklären eine W-Funktion $\sigma | M$ durch

$$\sigma(x) = \begin{cases} +1 \text{ für } g(x) = a \\ -1 \text{ für } g(x) = -a \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Da g ausgeglichen ist – es würde bereits die Ausgeglichenheit auf jenen A_ϱ genügen, wo $|g|$ den Wert $\|g\|$ erreicht –, so ist σ tatsächlich eine W-Funktion. Daher gibt es eine Funktion $s|M$, die (I) und (II) erfüllt. Wegen der Verwandtschaft von f und g haben wir

$$f(x) = g(x) + \sum_\varrho y_\varrho t_\varrho (x), \text{ also}$$

$$\sum_{x\in M} f(x)\, s(x) = \sum_{x\in M} g(x)\, s(x) + \sum_\varrho y_\varrho \Big(\sum_{x\in A_\varrho} s(x)\Big), \text{ also}$$

$$\sum_{x\in M} f(x) s(x) = a \sum_{x\in M} |s(x)|;$$

hieraus folgt unmittelbar, daß mindestens einer der Werte $f(x)$ von einem Betrag $\geq a$ ist.

Da anstelle von f in diesen Überlegungen jede beliebige zu f verwandte Funktion treten kann, so ist gezeigt, daß g eine „kleinste Verwandte" zu f, und damit $f-g$ eine beste Approximation von f durch Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen t_ϱ und $\|g\|$ das Minimum des Approximationsfehlers ist.

4. In Übereinstimmung mit früheren Ergebnissen werden wir zeigen, daß die Zeilen und Spalten einer zwei-dimensionalen Matrix (a_{ik}) ein A-Geflecht bilden (Satz in **5.**).

Bemerkenswerterweise liefern die Schichten $i =$ konst., $j =$ = konst. und $k =$ konst. einer dreidimensionalen Matrix (a_{ijk}) kein A-Geflecht.

Hierzu das folgende *Beispiel:*

Es mögen variieren

$$i \in \{1, 2, 3\}, \quad (j \text{ u. } k) \in \{1, 2, 3, 4\} \text{ und man setzt}$$

$$a_{112} = -1,\ a_{123} = -1,\ a_{134} = +1,$$
$$a_{211} = +1,\ a_{222} = +1,\ a_{233} = -1,\ a_{244} = -1,$$
$$a_{331} = -1,\ a_{343} = +1, \text{ und sonst } a_{ijk} = 0.$$

$(i, j, k) \to a_{ijk}$ its eine W-Funktion auf dem 3-dimensionalen Gitter der Punkte (i, j, k), wo i, j, k wie oben angegeben variieren, und zwar bezüglich des Systems der Schnitte mit koordinatenebenen-parallelen Ebenen. Man rechnet leicht nach, daß hier jede Lösung s des Gleichungssystems (II) identisch Null ist. Außerdem kann man (a_{ijk}) ansehen als eine auf allen Schnitten obiger Art ausgeglichene Funktion; sie ist also gegen das Symmetrisierungsverfahren unempfindlich. Wider Erwarten liefert der Übergang zu

$$a'_{ijk} = a_{ijk} - (u_i + v_j + w_k),$$

etwa mit

$$(u_1; u_2; u_3) = (0{,}00; 0{,}08; 0{,}20)$$
$$(v_1; v_2; v_3; v_4) = (0{,}24; 0{,}18; 0{,}10; 0{,}00)$$
$$(w_1; w_2; w_3; w_4) = (-0{,}31; -0{,}25; -0{,}19; -0{,}09)$$

eine Norm $\| a'_{ijk} \| < 1$.

Wir haben damit die bemerkenswerte Tatsache, daß *das Matrixproblem* (M_3) *von* **1.** *mit der Methode der alternierenden Symmetrisierung nicht angreifbar* ist.

5. Wir beweisen nun den

Satz. *Die Zeilen und Spalten einer 2-dimensionalen Matrix M bilden ein A-Geflecht.*

(a) Zum Beweis dürfen wir uns bei der Suche nach einer Funktion $s \mid M$ beschränken auf *normierte* Funktionen, d. h. solche mit

$$\bar{s} := \sum_{x \in M} |s(x)| = 1.$$

Es bezeichne weiter $x = (i, k)$ das allgemeine Feld der betrachteten Matrix M, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Die Zeilen und Spalten nennen wir allgemein *Säulen*, die Zeilen 1-*Säulen*, die Spalten 2-*Säulen*.

(b) Ist $\sigma \mid M$ die vorgegebene W-Funktion, so wählen wir auf jeder Säule A_ϱ, worauf σ nicht identisch verschwindet, eine Stelle x_ϱ^+ mit $\sigma(x_\varrho^+) > 0$ und eine Stelle x_ϱ^- mit $\sigma(x_\varrho^-) < 0$. Haben wir eine Funktion $s \mid M$, welche (I) erfüllt – z. B. ist $s = \sigma / \bar{\sigma}$ eine solche –, so setzen wir $\sum_{x \in A_\varrho} s(x) = d_\varrho$ und bilden, falls nicht alle d_ϱ Null sind (in welch anderem Falle wir schon fertig wären), eine Funktion $C_j\, s$ durch „*Kompensation in der j-Richtung*“, wobei $j \in \{1, 2\}$ fest gewählt ist; für alle j-Säulen A_ϱ werden folgende Abänderungen vorgenommen:

Ist $d_\varrho \leq 0$, so setzen wir auf A_ϱ

$$s'(x_\varrho^+) = s(x_\varrho^+) - d_\varrho \quad \text{und} \quad s'(x) = s(x) \quad \text{sonst};$$

ist $d_\varrho > 0$, so setzen wir auf A_ϱ

$$s'(x_\varrho^-) = s(x_\varrho^-) - d_\varrho \quad \text{und} \quad s'(x) = s(x) \quad \text{sonst}.$$

Im ersten Falle nennen wir die Stelle x_ϱ^+, im zweiten x_ϱ^- „*aufgewertet*", und die übrigen Stellen von A_ϱ „*abgewertet*". Schließlich wird noch normiert:

$$C_j\, s = s' / \overline{s'}.$$

Offensichtlich erfüllt $C_j\, s$ alle Bedingungen (I) und die Gleichungen (II) für alle j-Säulen A_ϱ, und ist normiert.

Unter *alternierender Kompensation* verstehen wir den Übergang

$$s \to K s = C_2 C_1 s.$$

(c) Die eben erklärte Abbildung $s \to Ks$ ist eine stetige Abbildung des Bereiches aller $s \,|\, M$ mit $\bar{s} = 1$ und (I) in sich. Dieser Bereich ist einer konvexen kompakten Teilmenge eines endlichdimensionalen Zahlenraumes topologisch äquivalent. Nach dem Brouwerschen Fixpunktsatz gibt es ein s_0 dieses Bereiches mit $K s_0 = s_0$. Indem wir zeigen, daß sogar $C_j s_0 = s_0$ gilt für $j \in \{1, 2\}$, haben wir die Existenz einer Funktion mit den Eigenschaften (I) und (II) nachgewiesen und sind fertig.

(d) Für s_0 ist offensichtlich $d_\varrho = 0$ für alle 2-Säulen A_ϱ. Wir setzen $\sum_{\tau=1}^{r} |d_\tau| = \delta$. Gehen wir nun von s_0 über zu $s^{(1)} = C_1 s_0$, so erhalten wir für die 2-Säulen A_ϱ von $s^{(1)}$

$$d_\varrho^{(1)} = \left(d_\varrho - \sum' d_{\varrho'}\right) / (1 + \delta),$$

wobei $\sum'$ läuft über alle 1-Säulen $A_{\varrho'}$, deren Schnittstelle mit A_ϱ bei der Kompensation C_1 eine Aufwertung erfahren haben. So-mit ergibt sich

$$\delta^{(1)} = \sum_{\varrho} \left|\sum{}' d_{\varrho'}\right| / (1 + \delta) \leq \frac{\delta}{1 + \delta} < \delta,$$

wenn nicht $\delta = 0$. Aber wegen $K s_0 = s_0$, muß $\delta^{(2)} = \delta$ sein, was nach dem eben Bewiesenen nur mit $\delta = 0$ möglich ist. Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung. Ein Beweis des obigen Satzes ist auch mit dem Hilfssatz von Nr. 12 in [1] zu führen; die Anordnung des obigen Beweises aber dürfte auch in allgemeineren Fällen von Nutzen sein.

6. In diesem Zusammenhang ist auf das folgende allgemeine *Approximationsproblem* hinzuweisen: Gegeben sind k verschiedene nicht leere Teilmengen $Q_1, \ldots, Q_k$ der Menge $\{1, \ldots, n\}$ mit $\bigcup Q_\varkappa = \{1, \ldots, n\}$. Ist $Q = \{j_1, \ldots, j_m\}$ eine solche Menge mit $j_1 < \cdots < j_m$, so bedeute $Q(x_1, \ldots, x_n)$ den Ausdruck

$$(* \ldots * x_{j_1} * \ldots * x_{j_2} * \ldots * x_{j_m} * \ldots *)$$

von n Stellen, wobei an den von den j_μ verschiedenen Stellen Sterne gesetzt sind. Das Approximationsproblem $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ besteht darin, die n-dimensionale Matrix $(a_{i_1 \ldots i_n})$ zu approximieren durch eine Matrix der Bauart

$$\left(u^{(1)}_{Q_1(i_1, \ldots, i_n)} + \cdots + u^{(k)}_{Q_k(i_1, \ldots, i_n)}\right).$$

Es ist zu bemerken, daß das Problem $\{Q_1, Q_2\}$ mit zwei fremden Q_1 und Q_2 sich auf den in **5.** behandelten Fall zurückführen läßt.

In einer später folgenden Note soll bewiesen werden, daß auch das Problem $\{Q_1, \ldots, Q_n\}$ mit

$$Q_1 = \{2, \ldots, n\},\ Q_2 = \{1, 3, \ldots, n\},\ \ldots,\ Q_n = \{1, \ldots, n-1\}$$

zu einem A-Geflecht führt.

Literatur:

[1] G. Aumann, Über approximative Nomographie. I. Sitz.Ber. Bayer. Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl., 1958, 137–155.

[2] G. Aumann, Lineare Approximationen auf einem Geflecht. Arch. d. Math. **10**, 267–272 (1959).