BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1969

MÜNCHEN 1970

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Wechselwirkung durch Symmetriebrechung in der Quantenmechanik

Von Fritz Bopp, München

Vorgelegt am 10. Oktober 1969

1. Formulierung der Aufgabe

Der Begriff „Symmetriebrechung" kommt in verschiedenen Versionen vor. Es kann sich darum handeln, daß ein System nahezu eine höhere Symmetrie hat als in Wirklichkeit [1], oder es kann sein, daß der Grundzustand eines quantenmechanischen Systems eine geringere Symmetrie hat als die Gesetze, aus denen man den Grundzustand ableiten kann [2]. Schließlich kann es vorkommen, daß zwar der Grundzustand durchaus die nämliche Symmetrie hat wie die Grundgleichungen, daß man diesen aber durch unsymmetrische Ansätze besser approximieren kann als durch symmetrische vergleichbaren Aufwands [3].

Alle diese Beispiele handeln nicht von denjenigen Symmetriebrechungen, die wir im folgenden betrachten wollen. Denn hier geht es nicht darum, aus gegebenen Wechselwirkungen Folgerungen abzuleiten. Es sollen vielmehr die Wechselwirkungen als Folge von Symmetriebrechungen verstanden werden. Dafür gibt es bereits Beispiele, die man allerdings gewöhnlich nicht unter diesem Aspekt betrachtet. Aus der klassisch relativistischen Bewegungsgleichung für kräftefreie Massenpunkte erhält man durch Brechung der Poincarésymmetrie die Allgemeine Relativitätstheorie und die Bewegungsgleichungen für Massenpunkte im Gravitationsfeld [4]. Entsprechend gelangt man durch Brechung der Eichsymmetrie, was im wesentlichen schon H. Weyl [5] gezeigt hat, zur Elektrodynamik und zu den Bewegungsgleichungen für geladene Teilchen im elektromagnetischen Feld. Letzteres haben wir an anderer Stelle gezeigt [6].

Für die klassische Mechanik ist es charakteristisch, daß es bei den Bewegungen von Massenpunkten auf die Natur der Kräfte nicht ankommt, obwohl wir die Kräfte, sobald wir die Kraftgesetze ins Auge fassen, nach ihrer Natur unterscheiden können. Die schon mittels klassischer Felder beschreibbaren Kräfte, die Gravitation und der Elektromagnetismus, lassen erkennen, daß Kräfte verschiedener Natur durch verschiedenartige Symmetriebrechungen zustandekommen und daß die Symmetriebrechungen davon herrühren, daß ein Teilsystem nicht dieselbe hohe Symmetrie zu haben braucht wie die ganze Welt.

Nun gibt es in der Quantenmechanik neben Eich- und Poincaré-Invarianz weitere Symmetrien, und es fragt sich, zu welchen Wechselwirkungen deren Brechung führt. Wie das zugeht, wollen wir an einem speziellen Beispiel erläutern, nämlich dem der Brechung der Touschekinvarianz [7]. Dabei gehen wir von der massenfreien Diracgleichung aus und werden zeigen, daß die Brechung der Touschek-Invarianz zur Heisenbergwechselwirkung [8] führt.

Wir begnügen uns mit diesem einen Beispiel. Wegen der Verwandtschaft zwischen Eich- und Touschek-Invarianz kann man einerseits leicht erkennen, wie man auf analoge Weise zur Quantenelektrodynamik gelangt. Andererseits macht bereits dieses einfache Beispiel deutlich, daß die Ableitung von Wechselwirkungen aus Symmetriebrechungen auch für typisch quantenmechanische Wechselwirkungen möglich ist.

2. Brechung der Touschek-Invarianz

Wir gehen von der Lagrangedichte der massenfreien Diracgleichung aus:

$$L = \overline{\psi}(x)\,\gamma^{\mu}\,\partial_{\mu}\,\psi(x) \tag{1}$$

$$\left(\gamma^0 = -i\varrho_3 = -\gamma_0,\ \underline{\gamma}^1 = \varrho_2\underline{\sigma} = \underline{\gamma}_1;\ \text{Signatur: } -+++;\right.$$
$$\left.\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu;\ \overline{\psi} = \psi^\dagger\varrho_3;\ \underline{\varrho}^{\mathrm{T}} = -\underline{\varrho},\ \underline{\sigma}^{\mathrm{T}} = -\underline{\sigma};\ \hbar = 1,\ c = 1\right).$$

Heisenberg [9] hat alle Symmetrieeigenschaften dieses Ausdrucks angegeben. Darunter findet sich die Invarianz gegen die Touschek-Transformation:

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\gamma_5 \chi}\psi(x), \quad \gamma_5 = \varrho_1. \tag{2}$$

In dieser Transformation ist χ eine Konstante.

Ersetzen wir ähnlich wie beim Übergang zu krummlinigen Koordinaten χ durch eine Funktion $\chi(x)$ so ist die Lagrangedichte zwar nicht mehr invariant. Jedoch ist die Symmetrie nur verschleiert. Denn man kann von dem transformierten Ausdruck:

$$L = \overline{\psi}(x)\,\gamma^\mu(\partial_\mu + i\gamma_5\,\partial_\mu\chi(x))\,\psi(x) \tag{3}$$

durch die reziproke Transformation wieder zu Gl. (1) zurückkehren.

Zu einer Brechung der Symmetrie gelangen wir erst, wenn wir das Gradientenfeld $\partial_\mu\chi(x)$ in Gl. (3) durch ein beliebiges Vektorfeld $U_\mu(x)$ ersetzen:

$$L = \overline{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu + i\gamma_5\,U_\mu(x))\,\psi(x). \tag{4}$$

In diesem Fall kann man die Veränderung nicht mehr rückgängig machen. Die Situation ist also mit der beim Übergang von der Lorentzschen zur Riemannschen Metrik in Raum–Zeit vergleichbar. Im Weiteren schreiben wir Gl. (4) wie folgt:

$$L = \overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi(x) + U_\mu(x)\,\overline{\psi}(x)\,\gamma^{5\mu}\,\psi(x) \tag{5}$$

($\gamma^{50} = -i\varrho_2$, $\underline{\gamma}^{51} = \varrho_3\underline{\sigma}$). Aus Invarianzgründen muß $U_\mu(x)$ ein Pseudovektor sein.

Wie in der Allgemeinen Relativitätstheorie haben wir nach den Feldgleichungen für das symmetriebrechende Feld zu fragen. Dabei sind vor allem Kovarianzgesichtspunkte zu berücksichtigen. In der klassischen Physik ist das symmetriebrechende Feld für einen Massenpunkt durch die übrigen bestimmt, also ein Funktional der materiellen Umgebung (l. c. 6), hier also durch $\overline{\psi}(x)$ und $\psi(x)$. Es stehen die kovarianten Dichten zur Verfügung, z. B. $\overline{\psi}\gamma^{5\mu}\psi$, $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ u. a. Denkt man wie in der Elektrodynamik an Superponierbarkeit, so müssen kovariant passende Ableitungen von U_μ aus den Dichten hervorgehen. Denkt man an das Nahwirkungsprinzip, so sind nur Ableitungen möglichst niedriger Ordnung zulässig. Der einfachste Ansatz lautet:

$$U_\mu(x) = \gamma\,\overline{\psi}(x)\,\gamma_{5\mu}\,\psi(x) \tag{6}$$

(Dimension: $[\gamma] = m^{-2}$). Wir gelangen so zur Heisenbergschen Wechselwirkung. Doch ist hierzu noch eine Anmerkung zu machen.

Bei der Brechung der Eichinvarianz erhält man eine Lagrangefunktion, die aus (5) hervorgeht, indem man $\gamma_{5\mu}$ durch γ_μ ersetzt. In diesem Fall schließt man die zu (6) analoge Wechselwirkung aus, weil man wegen der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\mu\,\overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi = 0 \tag{7}$$

zum Vektorpotential A_μ noch einen Gradienten hinzufügen kann, der ohne Einfluß bleibt, weil er zu einer vollständigen Divergenz führt. Darum kann nicht A_μ selbst, sondern nur die eichinvariante Kombination

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{8}$$

durch die Stromdichte $\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ bestimmt sein. In diesem Fall lauten die einfachsten kovarianten Gleichungen, nämlich die mit niedrigster Ordnung der Ableitungen:

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} \sim \overline{\psi}\,\gamma^\mu\,\psi. \tag{9}$$

Man erhält so die inhomogenen Maxwellschen Gleichungen.

Dieses Argument scheint auch im vorliegenden Fall anwendbar zu sein, weil die Touschek-Invarianz zu einer zweiten Kontinuitätsgleichung führt:

$$\partial_\mu\,\overline{\psi}\,\gamma^{5\mu}\,\psi = 0. \tag{10}$$

Daß nun der Gradient von einem Pseudoskalar zu bilden ist, dürfte für die Frage der Wechselwirkung unerheblich sein. Doch ist zu beachten, daß Wechselwirkungen vom Typus (6) in beiden Fällen zu einem Grundzustand führen, der in Hartree-Fockscher Näherung aus freien Ufermionen mit endlicher Masse aufgebaut ist (vergleichbar mit dem „Diracsee") [10]. Dabei bleibt die Kontinuitätsgleichung in (7) erhalten, die in (10) aber nicht. Darum ist im Fall der Touschek-Invarianz der einfachste Ansatz in (6) zulässig, im Fall der Eichinvarianz aber der analoge Ansatz auszuschließen.

Läßt man das Argument „maximaler Einfachheit" fallen, das hier wohl definiert ist, weil es mit der Forderung „minimaler Ordnung der Ableitungen" zusammenfällt, also mit der nach „optimaler Nahwirkung", so erhält man für $U_\mu(x)$ auf nächster Stufe an Stelle von (6) eine Wellengleichung von der Form:

$$\partial^\nu \partial_\nu U_\mu(x) + \lambda\, \partial^\mu \partial_\nu U^\nu(x) - \varkappa^2 U_\mu(x) = \pm\, \overline{\psi}(x)\, \gamma_{5\mu}\, \psi(x), \tag{11}$$

also ein U-Feld mit Quanten endlicher Masse und je nach λ mit einer verschiedenen Masse für $\partial_\mu U_\nu - \partial_\nu U_\mu$ und $\partial_\nu U^\nu$. Nach allem, was wir aus der Elektrodynamik und der Allgemeinen Relativitätstheorie wissen, hat man keinen Grund für die Annahme, das Prinzip optimaler Nahwirkung aufzugeben.

Zum Schluß müssen wir noch der Forderung Rechnung tragen, nach der die Symmetriebrechung davon herrührt, daß jedes einzelne Teilchen in eine Welt eingebettet ist, der gerade dieses eine fehlt. Sobald man das akzeptiert, hängt die Wechselwirkung eines Teilchens nur von den übrigen ab. Selbstwechselwirkungen scheiden von vorneherein aus. Die Bedeutung dieser Annahme für die klassische Physik haben wir in der bereits zitierten Arbeit (l. c. 6) ausführlich untersucht. Wie man hier die Selbstwechselwirkung auszuschalten hat, kann man bereits aus der berühmten Arbeit von Jordan-Wigner [11] entnehmen. Die Wechselwirkungsenergie muß für 1-Teilchen-System verschwinden, der zugehörige Operator also normalgeordnet sein:

$$L = \overline{\psi}(x)\, \gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + \gamma :\overline{\psi}(x)\, \gamma^{5\mu}\, \psi(x)\, \overline{\psi}(x)\, \gamma_{5\mu}\, \psi(x):. \tag{12}$$

3. Ergebnisse und Aspekte

Damit ist unser Ziel erreicht. Wir haben den Wechselwirkungsoperator auf eine Weise abgeleitet, der man zum ersten Mal in der Allgemeinen Relativitätstheorie begegnet. Dabei sind folgende Schritte nötig:

1. Ausgehend von einer hochsymmetrischen Lagrangedichte betrachten wir eine spezielle Untergruppe der Symmetrieoperationen, in der Allgemeinen Relativitätstheorie die Poincaré-Invarianz, in der Elektrodynamik die Eichinvarianz, in der Heisenbergschen Theorie die Touschek-Invarianz.
2. Lassen wir in den Symmetrieoperationen raum-zeitlich variable Koeffizienten zu, so ist die Lagrangedichte dagegen nicht mehr invariant. Doch wird dadurch die ursprüngliche Symmetrie nicht gebrochen, sondern nur verschleiert. Die Verschleierung ist durch die Möglichkeit gekennzeichnet, sie global rückgängig zu machen.
3. Die Symmetrie wird dadurch gebrochen, daß man für die nach den genannten Transformationen in L auftretenden Funktionen auch solche zuläßt, die sich global nicht mehr wegtransformieren lassen. Auf diese Weise entstehen, wie wir sagen wollen, die Potentialfelder und zwar bei Brechung der Poincaré-Invarianz der zur Gravitation führende metrische Tensor $g_{\mu\nu}(x)$, bei Brechung der Eichinvarianz das zum elektromagnetischen Feld führende Viererpotential $A_\mu(x)$ und hier der Pseudovektor $U_\mu(x)$.
4. Ursache der Symmetriebrechung ist die materielle Umwelt. Darum sind die Felder klassisch physikalisch durch die Bahnkurven der Massenpunkte in Raum–Zeit und quantenphysikalisch durch die kovarianten Dichten bestimmt. Der Zusammenhang wird durch Feldgleichungen hergestellt.
5. In die Feldgleichungen gehen unter Umständen nicht schon die in der Lagrangefunktion vorkommenden Potentialfelder ein, sondern erst die daraus ableitbaren von Willkür freien Feldgrößen, also im Falle der Gravitation der Krümmungstensor $R_{\mu\nu\varrho\sigma}$, im Falle des Elektromagnetismus der Feldtensor $f_{\mu\nu}$ und hier U_μ selbst.
6. Der Zusammenhang zwischen den Feldern und ihren Quellen ist (a) kovariant, (b) linear und (c) maximal nahwirkend. Die Linearität braucht nicht notwendig Superponierbarkeit nach sich zu ziehen. Sie tut es im Falle der Gravitationstheorie nicht, weil der Zusammenhang zwischen $R_{\mu\nu\varrho\sigma}(x)$ und $g_{\mu\nu}(x)$ nichtlinear ist. In der Elektrodynamik und hier herrschen Superponierbarkeit. Maximal nahwirkend heißt, die Zahl der

beteiligten, infinitesimal benachbarten Punkte, der Grad der Ableitung soll möglichst klein sein.

7. Da die Symmetriebrechungen von der Unsymmetrie der materiellen Umwelt herrühren, gibt es keine Selbstwechselwirkungen. Quantenmechanisch bedeutet dies, daß der Wechselwirkungsoperator normalgeordnet sein muß.

In allen bisher behandelten Beispielen sind die Feldgleichungen durch diese Forderungen bis auf Kopplungskonstanten vollständig bestimmt. Doch ist auf folgende Punkte hinzuweisen:

(a) Die quantenmechanische Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie steht noch aus, ebenso vielleicht schon klassisch physikalisch die genaue Berücksichtigung der Prinzipien der Symmetriebrechung.

(b) Da es keine Selbstwechselwirkungen gibt, entfallen Ausstrahlungen im herkömmlichen Sinne. Sie sind, worauf als Möglichkeit schon Feynman [12] hingewiesen hat, als Hinstrahlung zu fernen Massen zu verstehen, die nicht mehr zum System gerechnet werden und deren Rückwirkung pauschal zu berücksichtigen ist, so daß z. B. die Strahlungskraft mit der Reibungskraft vergleichbar wird. Auch hierbei gibt es noch offene Probleme.

In Hinblick auf den Heisenbergschen Wechselwirkungsoperator bedeutet unser Ergebnis: Sobald man den Operator für kräftefreie Teilchen, bei Heisenberg den für Diracteilchen ohne Masse, als gegeben betrachtet, erhält man die Heisenbergsche Wechselwirkung durch Brechung der Touschek-Symmetrie. Während andere Ansätze für die Wechselwirkung von vorneherein ausscheiden, ist der Heisenbergsche möglich. Ob er in Wirklichkeit auftritt, hängt von der Kopplungskonstanten ab, über die wir keine Aussagen gemacht haben. Sie könnte gleich 0 sein.

Heisenberg hat die Wechselwirkung bekanntlich aus der Forderung abgeleitet, daß es eine Vier-Fermionen-Wechselwirkung sei, deren Symmetrie mit der des wechselwirkungsfreien Operators übereinstimme. Offensichtlich gelangt man mindestens im vorliegenden Fall auf beiden Wegen zum nämlichen Ergebnis. Der hier eingeschlagene Weg hat sich bereits in der klassischen Physik bewährt und führt außerdem unmittelbar zu weiteren Wechselwirkungen, auf die wir gleich zurückkommen.

Zuvor muß einem möglichen Mißverständnis vorgebeugt werden. Heisenberg spricht von Wahrung der Symmetrie, wir von Brechung. Dennoch erhalten wir das gleiche Ergebnis. Tatsächlich besteht zwischen Wahrung und Brechung kein Widerspruch, da beide Begriffe auf verschiedene Situationen bezogen sind. Denn die symmetriebrechenden Felder kommen dadurch herein, daß sich das einzelne Teilchen in einer materiellen Umgebung befindet, der ein Teilchen fehlt und die dadurch weniger symmetrisch ist als die ganze Welt. Die Lagrangedichte, zu der wir am Ende gelangen, ist aber auf die ganze Welt bezogen. Für sie gibt es keinen Grund, daß die die ganze Welt beherrschende Symmetrie gebrochen sei. Darum muß die auf die ganze Welt bezogene Lagrangedichte die nämliche Symmetrie haben wie der wechselwirkungsfreie Teil. Die Symmetriebrechung, von der hier die Rede ist, bezieht sich also auf das einzelne Teilchen und nicht auf die ganze Welt. Sie hat nur zur Folge, *daß*, und bestimmt, *wie* Felder hereinkommen.

Neben der Touschek-Invarianz hat die Diracgleichung für Teilchen ohne Masse weitere Symmetrien. Von den Folgen der Brechung der Poincaré- und der Eichinvarianz haben wir bereits gesprochen. Auch die Brechung der Pauli-Gürsey-Invarianz muß zu charakteristischen Feldern und Feldgleichungen führen. Wir wollen diese hier nicht bestimmen. Doch zeigt sich einerseits gerade an Beispielen, die zu neuen Aufgaben hinführen, die Kraft des Prinzips der Symmetriebrechung. Wir können von vorneherein alle Felder angeben, die mit einer vorgegebenen Symmetriegruppe verbunden sind. Andererseits wird die Bedeutung der Symmetriegruppe unterstrichen. Sie bestimmt nicht nur den wechselwirkungsfreien Teil der Lagrangedichte, sondern diese mit allen ihren Wechselwirkungsgliedern. Offen bleibt nur die Frage nach der Größe der verschiedenen Wechselwirkungskonstanten.

Literatur

[1] Z. B. Verletzung der Isospininvarianz (R. E. Marshak und E. C. G. Sudarshan, Introduction to Elementary Particle Physics, Interscience Publishers New York 1961, Kap. V) und CP-Verletzung (P. K. Kabir, The CP-Puzzle, Academic Press, London 1968).

[2] Z. B. ferromagnetisches Modell von Heisenberg (W. Heisenberg, Z. f. Physik **49**, 619 (1928) und W. Heisenberg, Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, S. Hirzel Verlag, Stuttgart 1967, 7–2; in der Natur u. a. realisiert durch die Existenz von Kristallgittern.

[3] Siehe etwa für Kernmodelle S. G. Nilsson, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 29, Nr. 16 (1955); für das Elektronengas A. W. Overhauser, Phys. Rev. **128**, 1437 (1962), sowie die B. C. S.-Theorie, J. Bardeen, L. N. J. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).

[4] H. Weyl, Raum–Zeit–Materie, Springer, Berlin 1923 § 38.

[5] l. c. [4], § 40, 41.

[6] F. Bopp, Nova Acta Leopoldina, 1969, im Druck.

[7] F. B. Touschek, Nuovo Cim. **5**, 1281 (1957).

[8] H. P. Dürr, W. Heisenberg, H. Mitter, S. Schlieder, K. Yamazaki, Z. f. Naturforschung **14**a, 441 (1959).

[9] l. c. [8].

[10] E. Weidemann, F. Bopp, Z. f. Physik **204**, 311 (1967).

[11] P. Jordan, E. Wigner, Z. f. Physik **47**, 631 (1928).

[12] J. A. Wheeler, R. P. Feynman, Rev. mod. Phys. **17**, 157 (1945).