BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1969

MÜNCHEN 1970

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über bilineare Additionstheoreme

Von Hermann Schmidt und Wolfgang Eichhorn in Würzburg

Vorgelegt am 7. Juli 1967

In einer früheren Arbeit [1] hat der jüngere von uns das System von Funktionalgleichungen betrachtet (vgl. in unwesentlich abweichender Bezeichnungsweise das Summar [8])

$$(1)\quad f_\mu(\xi + \eta) = \sum_{0 \le \varkappa, \lambda \le n-1} \gamma_{\varkappa\lambda\mu} f_\varkappa(\xi) f_\lambda(\eta) \quad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Hierbei sollen die Funktionen $f_\varkappa$ im Körper $K = \boldsymbol{R}$ der reellen oder $K = \boldsymbol{C}$ der komplexen Zahlen erklärt sein, mit Werten aus $\boldsymbol{C}$ oder auch im ersten Falle aus $\boldsymbol{R}$; die $\gamma_{\varkappa\lambda\mu}$ sind gegebene Zahlen aus K. Faßt man das System der $\gamma_{\varkappa\lambda\mu}$ als Multiplikationstafel einer Algebra S über K bezüglich der Basis e_ν auf ($\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$), und setzt man $F(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n-1} f_\nu(\xi)\, e_\nu$, so läßt sich (1) in der Gestalt schreiben

$$(2)\qquad F(\xi + \eta) = F(\xi)\, F(\eta).$$

Das Eichhornsche Ergebnis, bei dem die $\gamma_{\varkappa\lambda\mu}$ beliebig gelassen werden, ist in Satz 2, a. a. O. [1], S. 269/270 nebst den anschließenden Bemerkungen enthalten. Hier beschränken wir uns ausschließlich auf den Fall, daß gilt:

(3) $\quad S$ assoziativ und kommutativ, e_0 Einselement von S.

Dann hat man

Satz 1. *Unter den Voraussetzungen* (3) *besteht jede mindestens einmal differenzierbare Lösung von* (1) *aus den Komponenten einer hyperkomplexen Funktion*

$$(4)\qquad F(\xi) = b\left(e_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{c^\mu \xi^\mu}{\mu!}\right) =: b \exp(c\xi),$$

wo b, c Elemente von S sind, und zwar b idempotent : $b^2 = b$; *umgekehrt erfüllt bei beliebigem c und idempotentem b* (4) *die Gleichung* (2), *die Komponenten $f_\nu(\xi)$ daher* (1).

Für $F(0) = e_0$ ist sogar jede bei $\xi = 0$ stetige Lösung schon von der Form (4).

Das ergibt sich sofort aus Satz 2ff. a.a.O. [1], da jetzt das dortige a durch bc ersetzt werden kann, wobei wegen (3) $(bc)^\nu = bc^\nu$.

Die Lösung (4) genügt der Differentialgleichung für die (hyperkomplexe) Unbekannte $y = y(\xi)$:

$$y' = yc \tag{5a}$$

oder auch, für das System (Zeile) $\mathfrak{y}$ ihrer Komponenten geschrieben:

$$\mathfrak{y}' = \mathfrak{y}\,\mathfrak{C}, \tag{5b}$$

wenn $c = \sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda e_\lambda$ $(c_\lambda \in K)$ das Bild

$$\mathfrak{C} = \left(\sum_{\lambda=0}^{n-1} c_\lambda \gamma_{\varkappa\lambda\mu}\right) \qquad (0 \leq \varkappa, \mu \leq n-1)$$

bei der regulären Darstellung von S besitzt (vgl. [7], **2.**, besonders (5), (6), wobei nur jetzt e_ν nicht, wie dort, zu $\bar{x}^\nu$ spezialisiert zu sein braucht). Diese Zuordnung ist ein stetiger Isomorphismus, und wenn dabei $y(0) = b \to B$, so gilt $y \to Y$ mit $Y(0) = B$; da nach (3) e_0 Einselement von S sein soll, ist ferner $\mathfrak{y}(0)$ die Anfangszeile von B. Ferner ist

$$Y' = Y\,\mathfrak{C}, \quad Y(\xi + \eta) = Y(\xi)\,Y(\eta), \tag{5c}$$

d. h. Y eine Matrixlösung von (5b) und (2).

Es wird schließlich

$$\det B = 1 \text{ für } b = e_0, \quad \det B = 0 \text{ für } b \neq e_0, \tag{6}$$

da dann b Nullteiler (bezw. Null) ist.

Hier sei bemerkt, daß in (4) wegen (3)

$$\exp(c\xi) = \prod_{\nu=0}^{n-1} \exp(c_\nu \xi e_\nu) \tag{7}$$

gesetzt werden kann. Es genügt daher, die Werte der Exponentialfunktion $\exp(te_\nu)$ mit $t \in K$ für die Basiselemente e_ν zu kennen. Gilt $e_\nu \to \mathcal{E}_\nu$, so braucht man also nur $\exp(tA)$ für $A = \mathcal{E}_\nu (0 \leq \nu \leq n-1)$ zu bilden, wo die Parameter c_λ nicht auftreten. Nun gilt (vgl. z. B. [5], S. 549, (5) und S. 556 oben)

$$\exp(tA) = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} A_{\lambda\varkappa} \frac{\exp(\varrho_\lambda t)\, t^{\varkappa-1}}{(\varkappa-1)!},$$

wenn

$$(tE - A)^{-1} = \sum_{\lambda=1}^{l} \sum_{\varkappa=1}^{h_\lambda} A_{\lambda\varkappa} (t-\varrho_\lambda)^{-\varkappa}$$

die Partialbruchzerlegung der linken Seite vorstellt. Die Lösungsfunktionen $f_\nu(\xi)$ gehören daher, in Abhängigkeit von $\xi \in K$ und den Parametern c_λ, einem Ring

$$\boldsymbol{C}[c_\nu \xi,\ \exp(\varrho_\lambda^{(\nu)} c_\nu \xi)] \quad (\nu = 0, \ldots, n-1;\ \lambda = 1, \ldots, l)$$

an. Dieser einfache Sachverhalt ist für nichtkommutatives S nicht zu erwarten, da die für die Darstellung von $\exp(c\xi)$ durch gewöhnliche Exponentialfunktionen benötigten Eigenwerte der Matrix C mangels einer Zerlegung vom Typ (7) (i. a. nicht rationale) algebraische Funktionen der c_λ sein werden.

Es sei nun $\tilde{Y}$ die Transponierte von Y. Dann gilt

$$\frac{d\tilde{Y}}{d\xi} = \tilde{\mathcal{C}}\tilde{Y} = \tilde{Y}\tilde{\mathcal{C}}.$$

Es ist also $\tilde{B}$ Anfangsmatrix eines Lösungssystems $Z = \tilde{Y}$ von

(8) $$\frac{d\mathfrak{z}}{d\xi} = \mathfrak{z}\tilde{\mathcal{C}}.$$

Für $b \neq e_0$ bedeutet dies nach (6), daß $\left.\begin{matrix}\tilde{Y}\\ Y\end{matrix}\right\}$ aus über K linear abhängigen $\left\{\begin{matrix}\text{Zeilen}\\ \text{Spalten}\end{matrix}\right.$ besteht, daß also insbesondere $f_0(\xi), \ldots, f_{n-1}(\xi)$, die Komponenten von $y = F(\xi)$, *linear abhängig* sind.

Nunmehr gehen wir zu dem, vor allem durch die Beispiele in [6] naheliegenden *Sonderfall* über, daß

S isomorph $K[t]/f(t)$, wo $f(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$

ein normiertes Polynom über K ist. Dann wird $\gamma_{\varkappa\lambda\mu} = c_{\varkappa+\lambda,\mu}$ wo $t^\nu \equiv \sum_{\mu=0}^{n-1} c_{\nu\mu} t^\mu \pmod{f}$; für diese Beiwerte sind in [7], (1), (4) Rekursionsformeln und explizite Darstellungen angegeben. Ferner gilt $e_1 \to A$, wo

$$a_{\varkappa\mu} = \delta_{\varkappa+1,\mu}; \quad a_{n-1,\mu} = -a_{n-\mu} \quad \begin{cases} 0 \leq \varkappa \leq n-2 \\ 0 \leq \mu \leq n-1 \end{cases}$$

nach [7], (7).

Hier wollen wir noch folgendes beweisen:

Satz 2. *Das Funktionalgleichungssystem* (1), *in dem* $(\gamma_{\varkappa\lambda\mu}) = (c_{\varkappa+\lambda,\mu})$ *die Multiplikationstafel für den Restklassenring von* $K[t]$ *nach einem normierten Polynom* $f(t) \in K[t]$ *bedeutet, hat genau eine stetige Lösung derart, daß für* $\xi \to 0$

$$f_0(\xi) = 1 + o(\xi), \quad f_\nu(\xi) = \delta_{\nu 1}\xi + o(\xi) \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1).$$

Diese bildet dasjenige Fundamentalsystem der linearen Differentialgleichung

$$f\left(\frac{d}{d\xi}\right)\zeta = 0, \tag{9}$$

dessen Wronskische Matrix für $\xi = 0$ die Einheitsmatrix ist (vgl. hierzu für $n = 2$, $f(t) = t^2 + 1$ (trigonometrische Funktionen) Perron [4], Krafft [2]).

Die angegebenen Bedingungen besagen ja (vgl. Satz 1 Ende und (5a)), daß für eine solche Lösung eine Darstellung (4) mit $b = e_0$ und $c = e_1$ besteht. Für $\mathcal{C} = A$ wird aber das Differentialsystem (8) gleichwertig mit (9) für die erste Komponente ζ_0 ($\tilde{A}$ ist die „Begleitmatrix" zu (9)); die Transponierte der Lösung $\mathfrak{y}$ ist daher die 1. Spalte der hierdurch festgelegten Wronskischen Matrix $(\zeta_\nu^{(\lambda)})$ $(0 \leq \nu, \lambda \leq n-1)$, und es ist ja $Y(0) = \mathcal{E}$ wegen $e_0 \to \mathcal{E}$.

Im vorliegenden Falle ergeben sich nun die *Idempotenten* sofort aus der Kongruenz in $K[t]$

$$g(t)\,(g(t) - 1) \equiv 0 \pmod{f(t)}.$$

Ist $f(t) = q_1 q_2 \ldots q_h$ die Zerlegung in teilerfremde Primpolynompotenzen über K, so hat man nur die Einzelkongruenzen zu lösen $g(t) \equiv \delta_\varkappa \pmod{q_\varkappa}$, wo $\delta_\varkappa = 0$ oder 1, für jede Auswahl der $\delta_\varkappa$ also ein System von h simultanen Kongruenzen. Die Lösung ist $g(t) = \sum\limits_{\nu=1}^{h} \delta_\nu \psi_\nu(t)$, wenn man ψ_ν aus

$$\psi_\nu(t) \equiv \delta_{\nu\varkappa} \pmod{q_\varkappa} \qquad (1 \leq \nu, \varkappa \leq h)$$

bestimmt hat. (Das sind nur h Kongruenzsysteme statt oben 2^h: direkte Zerlegung des Restklassenrings $K[t]/f(t)$).

Läßt man die Fälle $b = 0$, $b = e_0$ (entsprechend $\delta_\nu = 0$ bzw. $\delta_\nu = 1$ für *alle* ν) beiseite, so ergeben sich zu jeder Wahl von c

$2^h - 2$ Lösungen mit linear abhängigen Komponenten.

Im Falle des Additionstheorems der zyklischen Funktionen [6] erhält man, wenn etwa $K = \boldsymbol{R}$ genommen wird,

$$\text{für gerades } n\text{:} \quad h = 2 + \frac{n-2}{2} = \frac{n}{2} + 1$$

$$\text{für ungerades } n\text{:} \quad h = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

unzerlegbare Faktoren von $f(t) = t^n - 1$.

Die hierzu gehörigen Fälle eines Nullteilers b waren dort bei Satz 1 ausdrücklich ausgeschlossen ($\det U \neq 0$!).

Stets ist natürlich die triviale Lösung $f_\nu(\xi) = \frac{1}{n}$ vorhanden, hier entsprechend der Lösung $b = \frac{e_0 + \cdots + e_{n-1}}{n}$. $n = 2$ gibt noch (bei $c = 0$) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Für $n = 3$ begegnet erstmalig ein weniger naheliegender Fall: $b = \frac{1}{3}(2e_0 - e_1 - e_2)$, zu dem man $\left(\text{bei } c = e_1 + \frac{e_0}{2}\text{, um einen unwesentlichen Exponentialfaktor zu beseitigen}\right)$ aufgrund der Bemerkungen vor (5c)

$$\mathfrak{y} = (f_\nu(\xi)) = \frac{2}{3}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\xi,\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi - \frac{2\pi}{3}\right),\ \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\xi + \frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

erhält.

Die a.a.O. [6] erwähnte (gleichfalls beschränkte) Lösung entspricht dem Falle

$$b = e_0, \ c = e_1 - e_2, \ \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

ist also nicht von der hier betrachteten Art.

Schriftenverzeichnis

[1] W. Eichhorn: Lösung einer Klasse von Funktionalgleichungssystemen. Arch. der Math. 14 (1963) 266–270

[2] M. Krafft: Herleitung der trigonometrischen Funktionen aus ihrer Funktionalgleichung. Deutsche Mathematik 4 (1939) 194–201

[3] M. Nagumo: Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen. Japanese J. Math. 13 (1936) 61–80

[4] O. Perron: Über Additions- und Subtraktionstheoreme. Archiv der Math. u. Physik (3) 28 (1919–1920) 97–100

[5] Herm. Schmidt: Über Wurzelapproximation nach Euler und Fixgebilde linearer Transformationen. Math. Z. 52 (1949) 547–556

[6] Herm. Schmidt: Über das Additionstheorem der zyklischen Funktionen (mit einem Zusatz von O. E. Gheorghiu). Math. Z. 76 (1961) 46–50

[7] Herm. Schmidt: Bemerkungen zur elementaren Algebra: I. Restklassenring und Resultante. Bayer. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-ber. (1966) 167–172

[8] Herm. Schmidt und W. Eichhorn: Über bilineare Additionstheoreme (Summar). Ebenda (1967) 25*/26*