

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1941. Heft I

Sitzungen Januar-Juni

---

München 1941

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



# Die unendliche Halbebene bei beliebiger Randbelastung.

Von Ludwig Föppl in München.

Vorgetragen in der Sitzung am 7. Juni 1941.

Mit 5 Figuren.

## § 1. Verschiedene Darstellungen des ebenen Spannungszustandes.

Bekanntlich lassen sich alle ebenen elastischen Spannungs- und Formänderungszustände mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion  $F$  darstellen. Dabei besteht zwischen der Spannungsfunktion und den Spannungen der folgende Zusammenhang:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\tag{1}$$

Durch diesen Ansatz werden die Gleichgewichtsbedingungen am Element

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

identisch befriedigt. Die Verträglichkeitsbedingung für die elastischen Spannungen, die dem Hookeschen Gesetz gehorchen müssen, lautet

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0.$$

Mit Hilfe der Airyschen Spannungsfunktion geht sie nach Gl. (1) über in

$$\Delta \Delta F = 0 \quad (4)$$

Sind längs des Randes eines ebenen Gebietes die Normalspannungen  $\sigma_n$  und die Schubspannungen  $\tau_{nt}$  bekannt, so folgen daraus die Werte von  $F$  und  $\frac{\partial F}{\partial n}$  längs des Randes. Die Aufgabe besteht dann darin, die Lösung der Gl. (4) bei vorgegebenen Randwerten von  $F$  und  $\frac{\partial F}{\partial n}$  zu ermitteln.

Einfacher gestaltet sich die Aufgabe, wenn am ganzen Rand des Gebietes

$$\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (5)$$

bekannt ist. Wegen Gl. (3) ist  $\varphi$  eine harmonische Funktion, die der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\Delta \varphi = 0 \quad (6)$$

genügen muß. Bei gegebenen Randwerten von  $\varphi$  ist aber die Lösung dieser Differentialgleichung eindeutig festgelegt; es folgen die Spannungen aus den Beziehungen

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \varphi - x \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \sigma_y &= \varphi + x \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \tau_{xy} &= -x \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \end{aligned} \quad (7)$$

die die Gleichgewichtsgleichungen (2) identisch befriedigen.

Bei gegebenen Randwerten von  $\sigma_x + \sigma_y$  läßt sich aber noch eine zweite Lösung für die Spannungen finden. Setzt man zu diesem Zweck

$$\psi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (8)$$

$$\text{mit} \quad \Delta\psi = 0, \quad (9)$$

so findet man die Spannungen aus den folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \psi + y \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \sigma_y &= \psi - y \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ \tau_{xy} &= -y \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (10)$$

die auch die Gleichgewichtsgleichungen (2) identisch befriedigen.

Wir werden im folgenden die beiden Darstellungen des ebenen Spannungszustandes nach den Gl. (7) und den Gl. (10) verwenden. Bei gegebener Funktion  $\varphi$  bzw.  $\psi$  ist der zugehörige ebene Spannungszustand noch nicht eindeutig festgelegt; denn es existieren auch Spannungszustände, für die überall  $\varphi \equiv 0$  bzw.  $\psi \equiv 0$ . Solche ebene Spannungszustände habe ich früher<sup>1</sup> einmal als „harmonische ebene Spannungszustände“ bezeichnet. Kennzeichnen wir sie durch die Indizes 0 an den Spannungen, so ist an jeder Stelle eines harmonischen Spannungszustandes

$$\sigma_{y0} = -\sigma_{x0}. \quad (11)$$

Ein solcher harmonischer Spannungszustand wird aus den Gl. (7) und (10) erhalten, wenn man darin  $\varphi = \psi$  setzt und die entsprechenden Spannungswerte voneinander subtrahiert; man erhält dann

$$\begin{aligned} \sigma_{y0} = -\sigma_{x0} &= x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + y \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ \tau_{xy0} &= -x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + y \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (12)$$

<sup>1</sup> L. Föppl, „Konforme Abbildung ebener Spannungszustände“, ZAMM. Bd. 11 (1931) S. 81–92.

Die Airysche Spannungsfunktion  $F$  harmonischer Spannungszustände ist eine harmonische Funktion, so daß für sie  $\Delta F = 0$  wird.

## § 2. Die durch eine Einzellast beanspruchte unendliche Halbebene.

Wir wollen für die Gl. (7) und (10) als Beispiele die durch eine Einzellast beanspruchte unendliche Halbebene verwenden. Wir behandeln zunächst den Fall der senkrechten Randlast  $P$  (s.

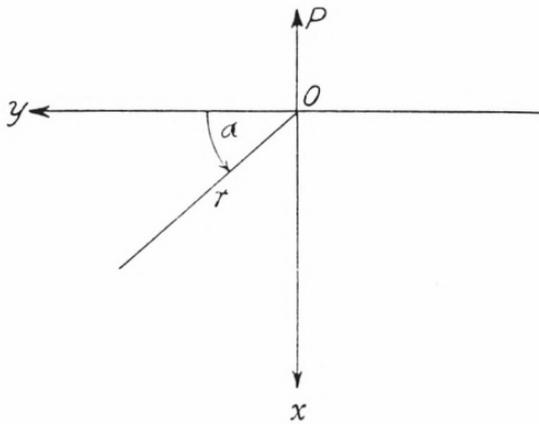


Fig. 1.

Fig. 1). Es bildet sich in der durch die  $y$ -Achse begrenzten unendlichen Halbscheibe unter der Wirkung der Last  $P$  ein strahlenförmiger Spannungszustand aus<sup>1</sup> mit den Spannungen, bezogen auf die Polarkoordinaten  $r, \alpha$

$$\sigma_r = \frac{2P \sin \alpha}{\pi r}$$

$$\sigma_t = 0 \quad (13)$$

$$\tau_{rt} = 0.$$

Bezieht man die Spannungen auf das rechtwinkelige Koordinatensystem  $x, y$  der Abb. 1, so erhält man

<sup>1</sup> A. und L. Föppl, s. z. B. „Drang und Zwang“, Bd. 1, 2. Aufl., S. 296.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{2P}{\pi} \frac{x^3}{r^4} \\ \sigma_y &= \frac{2P}{\pi} \frac{xy^2}{r^4} \\ \tau_{xy} &= \frac{2P}{\pi} \frac{x^2y}{r^4}.\end{aligned}\tag{14}$$

Die halbe Spannungssumme ist in diesem Fall

$$\varphi = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{P \sin \alpha}{\pi r}.\tag{15}$$

Unter Anwendung der Gl. (7) erhält man hieraus tatsächlich die Spannungsgleichungen (14).

Für den Fall der im Nullpunkt tangential durch die Einzellast  $Q$  beanspruchten unendlichen Halbscheibe (s. Abb. 2) gilt Entsprechendes. Es bildet sich auch ein strahlenförmiger Spannungszustand aus mit den folgenden Spannungen, bezogen auf die Polarkoordinaten  $r, \alpha$ :

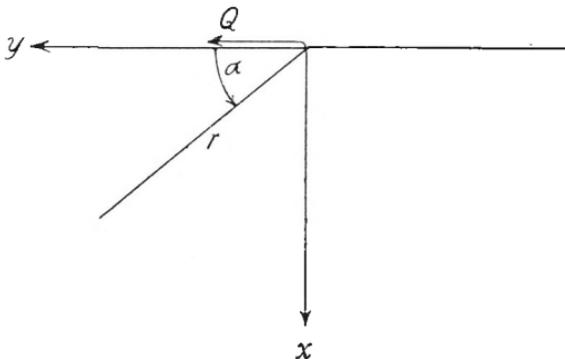


Fig. 2.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{2Q \cos \alpha}{\pi r} \\ \sigma_t &= 0 \\ \tau_{rt} &= 0.\end{aligned}\tag{16}$$

Auf rechtwinkelige Koordinaten  $x, y$  der Abb. 2 bezogen, lauten die Spannungsgleichungen

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{x^2 y}{r^4} \\ \sigma_y &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{y^3}{r^4} \\ \tau_{xy} &= -\frac{2Q}{\pi} \frac{x y^2}{r^4}.\end{aligned}\tag{17}$$

Die halbe Spannungssumme ist hier

$$\psi = \frac{\sigma_r + \sigma_t}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -\frac{Q}{\pi} \frac{\cos \alpha}{r}.\tag{18}$$

Unter Anwendung der Gl. (10) folgen daraus die obigen Spannungsgleichungen (17).

Es liegt nahe, die beiden behandelten Fälle der Normalkraft  $P$  und der Tangentialkraft  $Q$  komplex zusammenzufassen. Wir setzen zu diesem Zweck  $Q = P$  und bilden mit der komplexen Veränderlichen

$$z = x + iy = r \sin \alpha + ir \cos \alpha = r e^{i(\frac{\pi}{2} - \alpha)}\tag{19}$$

die komplexe analytische Funktion

$$\chi(z) = \varphi + i\psi = \frac{P}{\pi} \frac{\sin \alpha - i \cos \alpha}{r} = \frac{P}{\pi} \frac{1}{z}.\tag{20}$$

Wir wollen  $\chi(z)$  als „komplexes Spannungspotential“ bezeichnen. Die Einführung dieses komplexen Spannungspotentials bietet bei der kontinuierlichen Belastung der unendlichen Halbscheibe Vorteile, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden.

### § 3. Die durch beliebigen Belastungsstreifen beanspruchte unendliche Halbscheibe in komplexer Darstellung.

Wir setzen eine senkrechte Belastung der unendlichen Halbscheibe durch einen beliebigen Belastungsstreifen  $p(u)$  voraus

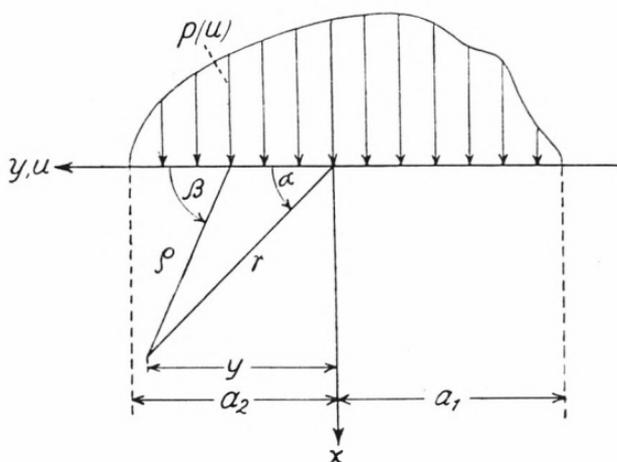


Fig. 3.

(s. Fig. 3). Von dem einzelnen Lastelement rührt nach Gl. (15) der Anteil

$$\varphi du = d\Phi = \frac{p(u) du \sin \beta}{\pi \rho}$$

und daraus folgt das für den ganzen Belastungsstreifen gültige Spannungspotential:

$$\Phi = \frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{+a_2} \frac{\sin \beta}{\rho} p(u) du \quad (21)$$

Entsprechend müßte man vorgehen, wenn es sich um einen tangentialen Belastungsstreifen  $q(u)$  der unendlichen Halbscheibe handelt. Es würde sich hierfür unter Verwendung von Gl. (18) das resultierende Spannungspotential

$$\Psi = -\frac{1}{\pi} \int_{-a_1}^{+a_2} \frac{\cos \beta}{\rho} q(u) du \quad (22)$$

ergeben. Setzt man  $q = p$ , so folgt aus Gl. (21) und (22) unter Berücksichtigung der Gl. (19) und (20) das resultierende komplexe Spannungspotential

$$X(z) = \Phi + i\Psi = \frac{1}{\pi} \int_{u=-a_1}^{u=+a_2} \frac{p(u)}{z-iu} du. \quad (23)$$

Zwischen dem Realteil  $\Phi$  und dem Imaginärteil  $\Psi$  dieser komplexen analytischen Funktion  $X(z)$  bestehen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (24)$$

Was die resultierenden Spannungen betrifft, so müssen wir zunächst wieder unterscheiden zwischen den von der Normalbelastung herrührenden Spannungen, für die die Gl. (7) maßgebend sind, und den von der tangentialen Belastung herrührenden Spannungen, die sich nach den Gl. (10) berechnen lassen. Da in den Gl. (7) nur die  $x$ -Koordinate des Aufpunktes vorkommt, die für alle Lastelemente  $p du$  dieselbe ist, erhält man sofort die resultierenden Spannungen zu

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= \Phi - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \sigma_{y_1} &= \Phi + x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \tau_{xy_1} &= -x \frac{\partial \Phi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (25)$$

Der Index 1 an den Spannungen soll sich auf die von der Normalbelastung herrührenden Spannungen beziehen, während wir für die auf die Tangentialbelastung sich beziehenden Spannungen den Index 2 benützen wollen.

Nicht so einfach erhält man die Spannungen, die durch die Tangentialbelastung der Halbscheibe hervorgerufen werden, da in den Gl. (10) die  $y$ -Koordinate des Aufpunktes auftritt, die für die verschiedenen Lastelemente  $q du$  verschieden ist. Es ist hier zweckmäßig, folgende Überlegung anzustellen.

Wir wollen zunächst die Teilspannungen angeben, die sich für ein beliebiges Lastelement  $p du$  bzw.  $q du$  nach den Gl. (7) bzw. (10) ergeben. Zu diesem Zweck setzen wir nach Gl. (15) bzw. (18) unter Benützung der Abb. 3

$$\begin{aligned}\varphi du &= \frac{p du \sin \beta}{\pi \rho} \\ \psi du &= -\frac{q du \cos \beta}{\pi \rho}\end{aligned}\tag{26}$$

und erhalten damit aus den Gl. (7)

$$\begin{aligned}d\sigma_{x_1} &= \left( \varphi - x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) du \\ d\sigma_{y_1} &= \left( \varphi + x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) du \\ d\tau_{xy_1} &= -x \frac{\partial \varphi}{\partial y} du\end{aligned}\tag{27}$$

und aus den Gl. (10)

$$\begin{aligned}d\sigma_{x_2} &= \left[ \psi + (y - u) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] du \\ d\sigma_{y_2} &= \left[ \psi - (y - u) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] du \\ d\tau_{xy_2} &= -(y - u) \frac{\partial \psi}{\partial x} du.\end{aligned}\tag{28}$$

Zunächst leiten wir aus diesen beiden Gleichungssätzen die Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{x_1} + d\sigma_{y_1}}{2} &= \varphi du \\ \frac{d\sigma_{x_2} + d\sigma_{y_2}}{2} &= \psi du\end{aligned}\tag{29}$$

ab, aus denen durch Integration über alle Lastelemente des Belastungsstreifens folgt

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1}}{2} &= \int \varphi du = \Phi \\ \frac{\sigma_{x_2} + \sigma_{y_2}}{2} &= \int \psi du = \Psi.\end{aligned}\tag{30}$$

Ferner bilden wir aus den Gl. (27)

$$\begin{aligned}d\sigma_1 &= \frac{d\sigma_{y_1} - d\sigma_{x_1}}{2} = x \frac{\partial \varphi}{\partial x} du \\ d\tau_1 &= d\tau_{xy_1} = -x \frac{\partial \varphi}{\partial y} du\end{aligned}\tag{31 a}$$

und aus den Gl. (28)

$$\begin{aligned}d\sigma_2 &= \frac{d\sigma_{x_2} - d\sigma_{y_2}}{2} = (y - u) \frac{\partial \psi}{\partial y} du \\ d\tau_2 &= d\tau_{xy_2} = -(y - u) \frac{\partial \psi}{\partial x} du.\end{aligned}\tag{31 b}$$

Wir bilden nun

$$\begin{aligned}d\sigma_1 + d\tau_2 + i(d\sigma_2 + d\tau_1) &= \left[ x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - (y - u) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] du \\ &+ i \left[ -x \frac{\partial \varphi}{\partial y} + (y - u) \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] du.\end{aligned}\tag{32}$$

Setzen wir nun die tangentielle und normale Belastung der Halbscheibe wieder gleich, d. h.  $q = p$ , so sind  $\varphi$  und  $\psi$  nach Gl. (26) wieder Real- und Imaginärteil einer komplexen analytischen Funktion

$$\chi(z) = \varphi + i\psi = \frac{p(u)}{\pi(z - iu)}\tag{33}$$

und zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  bestehen die Cauchy-Riemannschen Gleichungen. Unter Verwendung dieser Beziehungen können wir die rechte Seite der Gl. (32) folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_1 + d\tau_2 + i(d\sigma_2 + d\tau_1) &= [x + i(y-u)] \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] du \\
 &= (z - iu) \frac{d\chi}{dz} du.
 \end{aligned} \quad (34)$$

Durch Einsetzen des Wertes von  $\chi(z)$  aus Gl. (33) folgt hieraus

$$d\sigma_1 + d\tau_2 + i(d\sigma_2 + d\tau_1) = -\frac{p(u)}{z - iu} du = -\chi(z) du \quad (35)$$

und damit erhält man durch Integration über den ganzen Belastungsstreifen

$$\sigma_1 + \tau_2 + i(\sigma_2 + \tau_1) = -\frac{1}{\pi} \int_{u=-a_1}^{u=+a_2} \frac{p(u) du}{z - iu} = -X(z) = -\Phi - i\Psi. \quad (36)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 + \tau_2 &= -\Phi \\
 \sigma_2 + \tau_1 &= -\Psi.
 \end{aligned} \quad (37)$$

Aus den Gl. (31) erhält man

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{\sigma_{y_1} - \sigma_{x_1}}{2}; \quad \tau_1 = \tau_{xy_1} \\
 \sigma_2 &= \frac{\sigma_{x_2} - \sigma_{y_2}}{2}; \quad \tau_2 = \tau_{xy_2}
 \end{aligned} \quad (38)$$

und unter Berücksichtigung der Gl. (30) und (37):

$$\begin{aligned}
 \tau_{xy_2} &= -\sigma_{y_1} \\
 \sigma_{x_2} &= -\tau_{xy_1}.
 \end{aligned} \quad (39)$$

Berücksichtigt man noch Gl. (25), so erhält man schließlich für die zum tangentialen Belastungsstreifen gehörigen Spannungen:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_2} &= x \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -x \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = -\tau_{xy_1} \\
 \sigma_{y_2} &= 2\Psi' + x \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 2\Psi' + \tau_{xy_1} \\
 \tau_{xy_2} &= -\Phi - x \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\Phi - x \frac{\partial \Psi'}{\partial y} = -\sigma_{y_1}.
 \end{aligned} \quad (40)$$

Durch diese Gleichungen ist der Spannungszustand in der durch beliebige tangentiale Randbelastung beanspruchten unendlichen Halbebene bestimmt. Wir werden im folgenden von der Gl. (25) für die Normalbelastung und den Gl. (39) und (40) für die Tangentialbelastung bei der Berechnung von Beispielen Gebrauch machen.

#### § 4. Die durch rechteckigen Belastungsstreifen beanspruchte unendliche Halbebene.

Als erstes Beispiel zu den allgemeinen Ausführungen des vorigen Paragraphen nehmen wir den rechteckigen Belastungsstreifen von der Breite  $2a$  nach Abb. 4 an. Wir behandeln gleich zusammenfassend sowohl den Fall der gleichmäßigen Normalbelastung  $p$  wie auch den der Tangentialbelastung  $q = p$ . Nach Gl. (23) berechnet sich das komplexe Spannungspotential

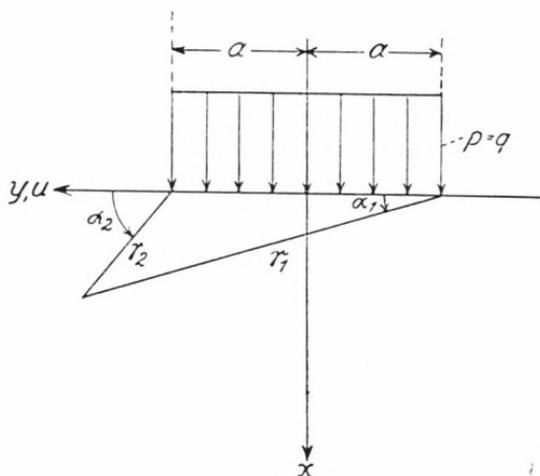


Fig. 4.

$$X(z) = \frac{p}{\pi} \int_{u=-a}^{u=+a} \frac{du}{z-iu} = i \frac{p}{\pi} \ln \frac{z-ia}{z+ia},$$

wofür man auch unter Benützung der Bezeichnungen von Abb. 4 schreiben kann

$$X(z) = i \frac{p}{\pi} \left[ \ln \frac{r_2}{r_1} + i(\alpha_1 - \alpha_2) \right] = \frac{p}{\pi} (\alpha_2 - \alpha_1) + i \frac{p}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (41)$$

Hieraus folgt

$$\Phi = \frac{p}{\pi} (\alpha_2 - \alpha_1) \quad (42)$$

$$\Psi = \frac{p}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Diesen Wert von  $\Phi$  muß man in die Gl. (25) einsetzen, um die von der Normalbelastung herrührende Spannungen zu erhalten. Beachtet man

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x} = -\frac{p}{\pi} \left( \frac{\cos \alpha_1}{r_1} - \frac{\cos \alpha_2}{r_2} \right) \quad (43)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial y} = \frac{p}{\pi} \left( \frac{\sin \alpha_1}{r_1} - \frac{\sin \alpha_2}{r_2} \right),$$

so erhält man aus den Gl. (25) die folgende bekannte Spannungsverteilung:

$$\sigma_{x_1} = \frac{p}{\pi} \left[ (\alpha_2 - \alpha_1) - \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right]$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{p}{\pi} \left[ (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right] \quad (44)$$

$$\tau_{xy_1} = -\frac{p}{2\pi} (\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1).$$

Ebenso geht man vor, um die zum tangentialen Belastungsstreifen gehörige Spannungsverteilung in der unendlichen Halbscheibe zu erhalten. Es sind hierfür die Gl. (39) und (40) anzuwenden und man erhält damit die bekannte Spannungsverteilung:

$$\sigma_{x_2} = \frac{p}{2\pi} (\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1)$$

$$\sigma_{y_2} = \frac{2p}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} - \frac{p}{2\pi} (\cos 2\alpha_2 - \cos 2\alpha_1) \quad (45)$$

$$\tau_{xy_2} = -\frac{p}{\pi} \left[ (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{1}{2} (\sin 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1) \right].$$

Damit ist die Brauchbarkeit der allgemeinen Entwicklungen des vorigen Paragraphen an einem Beispiel erläutert worden, das schon auf anderem Wege gelöst worden ist. Im nächsten Paragraphen soll ein Beispiel behandelt werden, das meines Wissens bisher noch nicht allgemein gelöst worden ist.

### § 5. Die durch halbkreisförmigen Belastungsstreifen beanspruchte unendliche Halbscheibe.

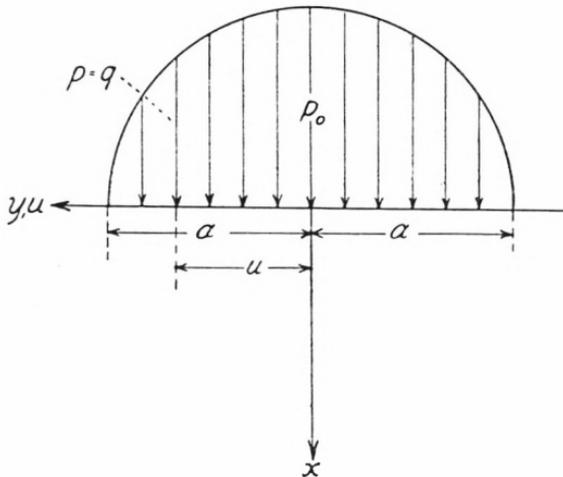


Fig. 5.

Für die durch Fig. 5 wiedergegebene halbkreisförmige Lastverteilung der unendlichen Halbscheibe mit der Belastungsdichte

$$p(u) = p_0 \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{a} \quad (46)$$

erhält man aus Gl. (23) das komplexe Spannungspotential

$$X(z) = \frac{p_0}{\pi a} \int_{u=-a}^{u=+a} \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{z - iu} du. \quad (47)$$

Um dieses Integral auszuwerten, setzen wir

$$iu = w \quad (48)$$

und erhalten damit aus Gl. (47)

$$X(z) = -i \frac{p_0}{\pi a} \int_{w=-ia}^{w=+ia} \frac{\sqrt{a^2 + w^2}}{z-w} dw. \quad (49)$$

Die Lösung dieses Integrales läßt sich in geschlossenem Ausdruck darstellen. Es ist nämlich:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 + w^2}}{z-w} dw = -\sqrt{a^2 + w^2} - z \operatorname{Ur} \operatorname{Sin} \frac{w}{a} \quad (50)$$

$$- \sqrt{a^2 + z^2} \operatorname{Ur} \operatorname{Sin} \left[ \frac{z}{a} - \frac{a^2 + z^2}{a(z-w)} \right].$$

Von der Richtigkeit dieser Lösung kann man sich am einfachsten durch Differentiation der rechten Seite der Gleichung nach  $w$  überzeugen. Dabei ist die Bedeutung der Funktion  $\operatorname{Ur} \operatorname{Sin}$  zu beachten:

$$\operatorname{Ur} \operatorname{Sin} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{Ur} \operatorname{Sin} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Unter Verwendung von Gl. (50) erhält man aus Gl. (49) den Wert des komplexen Spannungspotentials  $X(z)$ , indem man die Grenzen des Integrals einsetzt. Dabei ist zu beachten, daß

$$\operatorname{Ur} \operatorname{Sin} i = \frac{\pi}{2} i$$

$$\operatorname{Ur} \operatorname{Sin} (-i) = -\frac{\pi}{2} i.$$

Damit erhält man

$$X(z) = -p_0 \left( \frac{z}{a} - \sqrt{\frac{z^2}{a^2} + 1} \right) \quad (51)$$

oder, indem man die Konstante  $a = 1$  setzt

$$X(z) = -p_0 (z - \sqrt{z^2 + 1}). \quad (52)$$

Bevor man dieses komplexe Spannungspotential in ihre Real- und Imaginärbestandteile  $\Phi$  und  $\Psi$  trennt, ist es zweckmäßig, elliptische Koordinaten einzuführen. Zu diesem Zweck wird die komplexe Größe

$$\gamma = \alpha + i\beta \quad (53)$$

durch die Beziehung

$$z = x + iy = i \cos \gamma = i \cos(\alpha + i\beta) = i(\cos \alpha \mathfrak{Cof} \beta - i \sin \alpha \mathfrak{Sin} \beta)$$

eingeführt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} x &= \sin \alpha \mathfrak{Sin} \beta \\ y &= \cos \alpha \mathfrak{Cof} \beta. \end{aligned} \quad (55)$$

Aus Gl. (52) erhält man

$$\begin{aligned} X(z) &= -p_0 \cdot (i \cos \gamma - \sqrt{-\cos^2 \gamma + 1}) = -p_0 i e^{i\gamma} = \\ &= -p_0 e^{-\beta} i (\cos \alpha + i \sin \alpha) \end{aligned} \quad (56)$$

und damit

$$\begin{aligned} \Phi &= p_0 e^{-\beta} \sin \alpha \\ \Psi &= -p_0 e^{-\beta} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (57)$$

Nun können wir die Gl. (25) bzw. (40) zur Berechnung der Spannungen verwenden. Zu diesem Zweck ist zu bilden

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial y}. \end{aligned} \quad (58)$$

Die partiellen Ableitungen von  $\alpha$  und  $\beta$  nach  $x$  und  $y$  werden dadurch gewonnen, daß man die beiden Gleichungen (55) partiell nach  $x$  und  $y$  differenziert. Dies ergibt die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos \alpha \mathfrak{Sin} \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin \alpha \mathfrak{Cof} \beta \frac{\partial \beta}{\partial x} \\ 0 &= -\sin \alpha \mathfrak{Cof} \beta \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \cos \alpha \mathfrak{Sin} \beta \frac{\partial \beta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (59a)$$

$$\begin{aligned}
 1 &= -\sin \alpha \operatorname{Cof} \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \cos \alpha \operatorname{Sin} \beta \frac{\partial \beta}{\partial y} \\
 0 &= \cos \alpha \operatorname{Sin} \beta \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \sin \alpha \operatorname{Cof} \beta \frac{\partial \beta}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{59b}$$

Aus diesen folgt mit der Abkürzung

$$N = \sin^2 \alpha \operatorname{Cof}^2 \beta + \cos^2 \alpha \operatorname{Sin}^2 \beta = \frac{1}{2} (\operatorname{Cof} 2\beta - \cos 2\alpha) \tag{60}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\cos \alpha \operatorname{Sin} \beta}{N}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\sin \alpha \operatorname{Cof} \beta}{N}; \tag{61a}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = -\frac{\sin \alpha \operatorname{Cof} \beta}{N}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial y} = \frac{\cos \alpha \operatorname{Sin} \beta}{N}. \tag{61b}$$

Die Gl. (58) gehen damit über in

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= p_0 \cdot \frac{e^{-\beta}}{N} (\cos^2 \alpha \operatorname{Sin} \beta - \sin^2 \alpha \operatorname{Cof} \beta) = \\
 &= p_0 \left( -1 + \frac{\operatorname{Sin} 2\beta}{\operatorname{Cof} 2\beta - \cos 2\alpha} \right)
 \end{aligned} \tag{62}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -p_0 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{N} = -p_0 \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{Cof} 2\beta - \cos 2\alpha}.$$

Damit erhält man aus den Gl. (25) für die Normalbelastung die folgenden Spannungen:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{x_1} &= p_0 \sin \alpha \left[ e^{-\beta} + \operatorname{Sin} \beta \left( 1 - \frac{\operatorname{Sin} 2\beta}{\operatorname{Cof} 2\beta - \cos 2\alpha} \right) \right] \\
 \sigma_{y_1} &= p_0 \sin \alpha \left[ e^{-\beta} - \operatorname{Sin} \beta \left( 1 - \frac{\operatorname{Sin} 2\beta}{\operatorname{Cof} 2\beta - \cos 2\alpha} \right) \right] \\
 \tau_{x y_1} &= p_0 \sin \alpha \operatorname{Sin} \beta \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{Cof} 2\beta - \cos 2\alpha}.
 \end{aligned} \tag{63}$$

Für die Tangentialbelastung der unendlichen Halbscheibe gelten die Gl. (39) und (40). Es ergeben sich aus den Gl. (39) sofort die Werte von  $\sigma_{x_2}$  und  $\tau_{x y_2}$  unter Benützung der Gl. (63). Der ganze Gleichungssatz lautet dann:

$$\begin{aligned}\sigma_{x_2} &= -p_0 \sin \alpha \operatorname{Ein} \beta \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{Cos} 2\beta - \cos 2\alpha} \\ \sigma_{y_2} &= -2p_0 e^{-\beta} \cos \alpha + p_0 \sin \alpha \operatorname{Ein} \beta \frac{\sin 2\alpha}{\operatorname{Cos} 2\beta - \cos 2\alpha} \quad (64) \\ \tau_{xy_2} &= -p_0 \sin \alpha \left[ e^{-\beta} - \operatorname{Ein} \beta \left( 1 - \frac{\operatorname{Sin} 2\beta}{\operatorname{Cos} 2\beta - \cos 2\alpha} \right) \right].\end{aligned}$$

Den Spannungszuständen, die durch die Gl. (63) bzw. (64) beschrieben werden, kommt eine praktische Bedeutung zu, da die halbkreisförmige Lastverteilung nach H. Hertz bei der Berührung zweier Körper vorliegt; also z. B. bei der Berührung von Rad und Schiene unter Druck. Und zwar erhält man den Spannungszustand der Gl. (63) bei senkrechtem Druck, dem sich beim Anfahren oder Bremsen ein Spannungszustand nach Gl. (64) überlagert. Bisher waren diese beiden Spannungszustände nur längs der  $x$ - und  $y$ -Achse bekannt.<sup>1</sup>

Um nachzuweisen, daß die Gl. (63) und (64) die richtigen Spannungsverteilungen wiedergeben, wollen wir noch zeigen, daß durch sie die Grenzbedingungen an der  $y$ -Achse erfüllt werden. Zu diesem Zweck entnehmen wir aus den Gl. (55) das orthogonale Netz der Kurven  $\alpha = \text{const}$  und  $\beta = \text{const}$ . Die Schar  $\alpha = \text{const}$  entspricht den Hyperbeln

$$\frac{y^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} = 1 \quad (65 a)$$

und die Schar  $\beta = \text{const}$  den Ellipsen

$$\frac{y^2}{\operatorname{Cos}^2 \beta} + \frac{x^2}{\operatorname{Ein}^2 \beta} = 1 \quad (65 b)$$

<sup>1</sup> L. Föppl, „Der Spannungszustand und die Anstrengung des Werkstoffes bei der Berührung zweier Körper“, Forschg. Ing.-Wes. (1936) S. 209, -21. — L. Föppl, „Beanspruchung von Schiene und Rad beim Anfahren und Bremsen“, Forschg. Ing.-Wes. (1936) S. 141-47.

Nach Vollendung dieser Arbeit erfahre ich, daß diese Aufgabe auf anderem Weg als hier von Herrn Dr. Ing. habil. Franz Karas bearbeitet worden ist. Sie wird demnächst in der Zeitschrift „Forschg. auf dem Gebiet des Ing.-Wes.“ erscheinen.

Beide Scharen haben als Brennpunkte die Punkte der  $y$ -Achse mit den Abständen  $\pm 1$  vom Nullpunkt. Die Strecke auf der  $y$ -Achse zwischen beiden Brennpunkten entspricht wegen  $\alpha = 1$  der Breite des Belastungsstreifens. Wir müssen deshalb auf der  $y$ -Achse die Gebiete außerhalb des Belastungsstreifens  $|y| > 1$  und innerhalb des Belastungsstreifens  $|y| < 1$  unterscheiden. Für die Punkte mit  $|y| > 1$  folgt aus Gl. (65) mit  $x = 0$ :  $\sin \alpha = 0$  oder  $\alpha = 0$  und  $\cos \beta = y$  und für die Punkte  $|y| < 1$ :  $\sin \beta = 0$  oder  $\beta = 0$  und  $\cos \alpha = y$ . Damit erhält man aus den Gl. (63) die Grenzwerte:

$$\left(\sigma_{x_1}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|>1}} = 0; \quad \left(\sigma_{x_1}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|<1}} = p_0 \sqrt{1-y^2}; \quad \left(\tau_{xy_1}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|>1}} = \left(\tau_{xy_1}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|<1}} = 0. \quad (66a)$$

und aus den Gl. (64) die Grenzwerte:

$$\left(\sigma_{x_2}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|>1}} = 0; \quad \left(\sigma_{x_2}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|<1}} = 0; \quad \left(\tau_{xy_2}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|>1}} = 0; \quad \left(\tau_{xy_2}\right)_{\substack{x=0 \\ |y|<1}} = p_0 \sqrt{1-y^2}. \quad (66b)$$

Die Gl. (66a) und (66b) entsprechen den richtigen Grenzbedingungen längs der  $y$ -Achse in beiden Fällen. Damit ist der Nachweis für die Richtigkeit der Gl. (63) und (64) erbracht.