# Sitzungsberichte

der

# mathematisch-physikalischen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1923

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Akademische Buchdruckerei F. Straub in München

# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-physikalischen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

1923. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

---

München 1923
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

# Über konforme Abbildung von Kegelschnittpolygonen.

Von **F. Lindemann.**

Vorgetragen in der Sitzung am 3. Februar 1923.

In den Sitzungsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften (math.-phys. Klasse vom 2. November) hat Herr Schottky einen Aufsatz veröffentlicht, der sich mit der Frage beschäftigt, ob gewisse Funktionen durch Differentialgleichungen definiert werden können; zu diesen Funktionen gehören auch diejenigen, welche Polygone algebraischer Kurven (insbesondere von Kegelschnitten) auf die Halbebene ($Y > 0$) konform abbilden. An einem Beispiele, das sich auf gewisse einfache Parabel- und Hyperbel-Polygone bezieht, wird dargelegt, daß die benötigten Funktionen keiner Differentialgleichung genügen können.

Die zu diesem Resultate führenden Schlüsse sind aber nicht stichhaltig. Behandelt man nämlich das gewählte Beispiel auf Grund der von mir entwickelten allgemeinen Theorie (was Herr Schottky nicht durchführt), so kommen die bei Herrn Schottky auftretenden Glieder, die zur Verneinung der Frage führen, nicht vor, und alle scheinbaren Widersprüche lösen sich von selbst auf (vgl. unten Nr. 5 und 6).

Sollte der a. a. O. ausgesprochene Wunsch, es möchte der Beweis für die negative Antwort der Frage allgemein geführt

---

[1]) Es handelt sich um die beiden Abhandlungen „Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Parabeln begrenztes Polygon", Sitzungsberichte der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Jahrg. 1918, S. 203 und „Die konforme Abbildung der Halbebene auf ein von beliebigen Kegelschnitten begrenztes Polygon", ebenda S. 453. Diese sollen im folgenden als Abhandlung I und Abhandlung II zitiert werden.

werden, sich erfüllen, so bliebe die Tatsache bestehen, daß es eine merkwürdige Klasse von Differentialgleichungen gibt, die alle Eigenschaften besitzen, die man für das Problem der konformen Abbildung von den aufzustellenden Gleichungen nur erwarten darf.

Zum Schlusse (Nr. 11) wird noch gezeigt (was mir bei Abfassung der Abhandlung II noch nicht gelungen war), wie man die Schwarz'sche Theorie der Kreisbogenpolygone aus meinem allgemeinen Ansatze als besonderen Fall richtig erhält.

In der Abhandlung I hatte ich die im folgenden stets mit $R$ bezeichnete Funktion als rationale Funktion behandelt, obgleich sie sich in den singulären Stellen nur verhält wie eine rationale Funktion; das mag zu Mißverständnissen Anlaß geben. Ich bin aber in Abhandlung II § 7 auf die Frage zurückgekommen und habe die Funktion $R$ dort durch eine Differentialgleichung definiert.

**1.** Es möge zunächst das von Herrn Schottky konstruierte Beispiel auf Grund der von mir aufgestellten Gleichungen behandelt werden. In der Ebene der komplexen Variabeln $z = x + iy$ sei ein Polygon gegeben, dessen Seiten von Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkt und von geraden Linien gebildet werden. Nach Gleichung (33) meiner Abhandlung I wird die konforme Abbildung dieses Polygons auf die obere Halbebene der Variabeln $Z = X + iY$ durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^3 z}{dZ^3} - 3R\frac{d^2 z}{dZ^2} - \left(\frac{dR}{dZ} - 2R^2\right)\frac{dz}{dZ} = 0 \tag{1}$$

gegeben, in der $R(Z)$ eine gewisse Funktion von $Z$ bedeutet, die reell ist auf der reellen Axe $Y = 0$ und deren Definition unten in Nr. 12 nochmals angegeben ist. Näher bestimmt wird sie durch eine von dem Schwarz'schen Ausdrucke $\{W, Z\}$ abhängige Differentialgleichung, die in § 7 der Abhandlung II aufgestellt wurde. Bezeichnen wir die Differentiation nach $Z$ durch Striche und setzen (mit Schottky):

$$p = \frac{z'}{z}, \quad q = \frac{z''}{z'}, \quad \text{also} \quad \frac{z'''}{z'} = q' + q^2, \tag{2}$$

so wird jene Gleichung:

$$q' + q^2 - 3Rq - R' + 2R^2 = 0. \tag{3}$$

Die Gleichung (1) war a. a. O. für Parabeln aufgestellt; gerade Linien sind Grenzfälle von Parabeln, so daß die Gleichung auch für unsern Fall anwendbar bleibt. Die in (2) aufgeführte Größe $p$ kommt in (3) nicht vor, wie es nach geometrischen Überlegungen (Unabhängigkeit von der Lage der Koordinatenaxen) oder nach einem allgemeinen Satze von Schottky sein muß.

**2.** In der komplexen Ebene sei andererseits ein Polygon gegeben, dessen Seiten von gleichseitigen Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt und geraden Linien gebildet werden. Die Hyperbeln können nur in gerade Linien ausarten, die durch den gemeinsamen Mittelpunkt gehen. Die Hyperbeln an sich würden zunächst zu einer Gleichung dritter Ordnung führen (in der aber $z-a$ neben $z'$, $z''$, $z'''$ vorkommt, wenn $a$ den Mittelpunkt bezeichnet); das Vorkommen der geraden Linien zwingt zur Benutzung der allgemeinen Differentialgleichung vierter Ordnung, die ich in Gleichung (13) der Abhandlung II für Kegelschnittpolygone aufgestellt habe, nämlich:

$$3\,V \cdot H' \cdot z' - 8\,(V' z' - 3\,V z'')\,H = 0,$$

wo $$H = \frac{1}{z'^{9}}\left[-9\,V^2 z''' + 9\,V V' z' + (3\,V V'' - V'^2)\,z'\right].$$

Führt man die hier angeführten Differentiationen aus und setzt

$$H = -\frac{9\,V^2}{z'^{8}}\,P, \text{ also } P = q' + q^2 - 3\,R q - R' + 2\,R^2,\ R = \frac{V'}{V},$$

so daß $P$ die linke Seite der obigen Gleichung (3) bezeichnet, so wird die Differentialgleichung:

$$3\left[\frac{z^{\mathrm{IV}}}{z'} - \frac{z'' z'''}{z'^2} - 3\,R\left(\frac{z'''}{z'} - \left(\frac{z''}{z'}\right)\right) - 3\,R' \frac{z''}{z'} - R'' + 4\,R R'\right]$$
$$+ 3\left(6\,R - 8\,\frac{z''}{z'}\right) P - 8\left(3\,R - 3\,\frac{z''}{z'}\right) P = 0, \qquad \text{oder}$$

$$\frac{dP}{dZ} - 2\,R P = 0, \tag{4}$$

wo $R$ wieder eine Funktion von $Z$ bezeichnet, von der in Nr. 12 die wesentlichen Eigenschaften angegeben werden, und entwickelt:

$$\begin{aligned}&[q'' + 2\,q q' - 3\,R q' - 3\,R' q - R'' + 4\,R R'] - 2\,R\,[q' \\ &\quad + q^2 - 3\,R q - R' + 2\,R^2] = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

In § 7 der Abhandlung II wurde nachgewiesen, daß diese Gleichung unabhängig von linearen Transformationen der Variabeln $Z$ ist.

**3.** Wir setzen jetzt die beiden Polygone durch die Abbildung

$$z = \zeta^2 \tag{6}$$

zueinander in Beziehung, wobei wir das Hyperbelpolygon von Nr. 2 in der Ebene der komplexen Variabeln $\zeta = \xi + i\eta$ denken. Dabei entsprechen bekanntlich den Parabeln mit gemeinsamem Brennpunkte ($z = 0$) der $z$-Ebene die geraden Linien der $\zeta$-Ebene und den geraden Linien der $z$-Ebene gleichseitige Hyperbeln mit gemeinsamem Mittelpunkt ($\zeta = 0$) in der $Z$-Ebene. Aus dem Parabelpolygon, das in Nr. 1 behandelt wurde, entsteht also (bei passender Bestimmung der vorkommenden Konstanten) das Hyperbelpolygon von Nr. 2; es muß folglich die Differentialgleichung vierter Ordnung (5) durch die Gleichung (6) auf die Differentialgleichung dritter Ordnung (3) zurückgeführt werden. Das geschieht in der Tat auf folgende Weise.

In der $\zeta$-Ebene sei

$$\pi = \frac{\zeta'}{\zeta}, \quad \varkappa = \frac{\zeta''}{\zeta'}, \quad \text{also } \varkappa' + \varkappa^2 = \frac{\zeta'''}{\zeta'},$$

dann wird:

$$p = 2\pi, \quad q = \varkappa + \pi, \text{ oder } p' = 2\pi(\varkappa - \pi), \; \pi' = \pi(\varkappa - \pi),$$
$$q' = \varkappa' + \pi(\varkappa - \pi), \quad q'' = \varkappa'' + \pi(\varkappa^2 + \varkappa') - 3\varkappa\pi^2 + 2\pi^3.$$

Sei nun die linke Seite der Gleichung (3) mit $P(z, Z)$ bezeichnet, so wird durch Einsetzen und Entwickeln nach Potenzen von $\pi$:

$$\begin{aligned} P(z, Z) &= \varkappa' + \varkappa^2 - 3R\varkappa - R' + 2R^2 + 3\pi(\varkappa - R) \\ &= P(\zeta, Z) + 3\pi(\varkappa - R) \end{aligned} \tag{7}$$

und die linke Seite von (4) wird:

$$\frac{dP(z, Z)}{dZ} - 2RP(z, Z) = \frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} - 2R \cdot P(\zeta, Z) + 3\pi P(\zeta, z) + 3\pi^2(R - \varkappa)$$

oder, wenn wir die linke Seite kurz mit $Q(z, Z)$ bezeichnen (so daß $Q(z, Z) = 0$ die Differentialgleichung für die Abbildung eines in der $z$-Ebene gelegenen Kegelschnittpolygons ist):

$$Q(\zeta, Z) = Q(z, Z) - 3\pi P(\zeta, z) - 3\pi^2(R - \varkappa),$$

oder wegen (7)

$$Q(\zeta, Z) = Q(z, Z) - 3\pi P(z, Z)$$

oder entwickelt, indem sich das Glied mit $\pi^2$ heraushebt:

$$\frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} - 2R \cdot P(\zeta, Z) = \frac{dP(z, Z)}{dZ} - (2R + 3\pi) P(z, Z). \tag{8}$$

Wenn die Gleichung $P(z, Z) = 0$ erfüllt ist, so ist also auch die Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$ erfüllt; umgekehrt sind für das Problem der konformen Abbildung des Hyperbelpolygons nur diejenigen Lösungen der Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$ brauchbar, die auch der Gleichung $P(z, Z) = 0$ genügen. Bei Benutzung der Variabeln $\zeta$ sind diese brauchbaren Lösungen nicht auszuscheiden; durch Einführung von $z$ mittels (6) gelingt aber die Ausscheidung.[1])

4. Behandelt man aber das Hyperbelpolygon der $\zeta$-Ebene mit der aus $P(z, Z) = 0$ durch (6) erhaltenen Gleichung $P(\zeta, Z) = 0$, so muß zufolge (7) die Gleichung

$$P(\zeta, Z) + 3\pi(\varkappa - R) = 0 \tag{9}$$

auch für das Problem dieser Abbildung, d. h. für die Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$ eine Bedeutung haben. Diese ergibt sich durch Differentiation von (9) nach $Z$, wodurch entsteht:

$$\frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} + 3\pi(\varkappa - \pi)(\varkappa - R) + 3\pi(\varkappa' - R') = 0;$$

und indem man $\pi$ hieraus mittels (9) eliminiert, findet man:

$$3(\varkappa - R)\frac{dP(\zeta, Z)}{dZ} - P^2 - 3(\varkappa - R)P\varkappa - 3(\varkappa' - R')P = 0,$$

oder, wenn wir $6RP(\zeta, Z) \cdot (\varkappa - R)$ addieren und subtrahieren:

$$3(\varkappa - R)\,Q(\zeta, Z) - 4P^2 = 0.$$

Die Gleichung $P(\zeta, Z) = 0$ ist folglich ein partikuläres erstes Integral der Gleichung $Q(\zeta, Z) = 0$; man er-

[1]) Die Gleichung $Q = 0$ ist also reduktibel in dem von Frobenius eingeführten Sinne, der diesen Begriff bei linearen Differentialgleichungen näher erörtert hat: Crelle's Journal, Bd. 76, 1873.

hält statt dessen ein allgemeines erstes Integral (mit einer willkürlichen Konstanten $\gamma$), wenn man statt (6) die Transformation

$$z = (\zeta - \gamma)^2$$

anwendet; dabei bleibt $\varkappa$ ungeändert und $\pi$ wird durch $\dfrac{z'}{z-\gamma}$ zu ersetzen sein; das Integral ist also ausgeschrieben:

$$\frac{\zeta'''}{\zeta'} - 3R\frac{\zeta''}{\zeta'} + 2R^2 - R' + 3\frac{\zeta'}{\zeta-\gamma}\left(\frac{\zeta''}{\zeta'} - R\right) = 0,$$

wobei $\gamma$ eine willkürliche Konstante bezeichnet.

Ebenso liefert die Gleichung $\varkappa - R = 0$ ein partikuläres Integral der Gleichung $P(\zeta, Z) = 0$, nämlich dasjenige, welches zur Anwendung kommt, wenn alle Parabeln in gerade Linien ausarten. Es ist folglich (da $q = \varkappa + \pi$, $p = 2\pi$) auch

$$z'' - \frac{1}{2}\frac{z'}{z - C} = R \tag{10}$$

ein erstes Integral der Gleichung $P(z, Z) = 0$ mit einer willkürlichen Konstanten, wie schon in Gleichung (35) der Abhandlung I festgestellt wurde.

**5.** Bei der Transformation der einen Abbildungsaufgabe in die andere konstruiert nun Herr Schottky für obiges Beispiel einen Widerspruch und kommt dadurch zu dem Schlusse, daß die Abbildungsfunktionen überhaupt nicht durch Differentialgleichungen definiert werden können (ausgenommen die elementaren Fälle der geradlinigen und der Kreisbogen-Polygone). Seine Schlußweise ist im wesentlichen die folgende:

Nachdem gezeigt ist, daß eine algebraische Differentialgleichung der verlangten Art $z$ nicht enthalten darf und in den Größen $z'$, $z''$, $z'''$ ... homogen sein müßte, wird der Einfluß der Transformation (6) auf die als existierend vorausgesetzte Gleichung untersucht. Dabei wird davon ausgegangen, daß die beiden zu vergleichenden Gleichungen (also $P = 0$ für das Parabelpolygon, $Q = 0$ für das Hyperbelpolygon) von gleicher Ordnung sind, und diese Voraussetzung ist, wie die vorstehende Behandlung des von Herrn Schottky gewählten Beispiels zeigt, nicht gerechtfertigt. Um seine Bezeichnungen zu erhalten, muß man unsere Buchstaben

$z, \zeta, Z, q, \ldots \pi, \varkappa, \ldots$ bzw. ersetzen durch

$y, x, z, Q, \ldots p, q, \ldots$

Die Anwendung der Transformation (6) auf die vorausgesetzte Gleichung $\Psi(z, Q) = 0$ und die Entwicklung nach Potenzen von $p$ führt dann bei Schottky zu dem Schlusse $\Phi(z, q) = \Psi(z, Q)$, der sich durch die Forderung ergibt, daß $z$ (und somit $p$) in der Entwicklung nicht vorkommen darf. Hierin liegt der Fehlschluß, denn es ist nach obigem auf Grund meines Ansatzes $\Psi(z, Q)$ von der vierten und $\Phi(z, P)$ von der dritten Ordnung, und doch kann auf Grund der Gleichung (8) die Bedingung $\Psi = 0$ immer eine Folge von $\Phi = 0$ sein, und es fällt $p\,(= 2\pi)$ rechts heraus, da $\pi$ eben wieder in $P\,(= \Phi)$ multipliziert ist, während $\pi^2$ und $\pi^3$ identisch herausfallen. Der vermeintliche Widerspruch ist also nicht vorhanden; er löst sich nach den Entwicklungen in Nr. 4 dahin auf, daß die durch die Transformation (6) abgeleitete Gleichung für $\zeta$ nichts anderes ist als ein partikuläres Integral der Gleichung für $z$, und als solches auch $\zeta$ selbst (in $\pi$) enthalten darf.

**6.** Herr Schottky untersucht an Stelle von (6) auch den Einfluß der allgemeinen Transformation

$$z = \zeta^n,$$

wo $n$ eine ganze positive Zahl bedeutet. Es wird in der $z$-Ebene ein Polygon betrachtet, begrenzt von geraden Linien und von denjenigen Kurven $n$ter Ordnung, die den Geraden der $\zeta$-Ebene zugeordnet sind; ihm entspricht in der $\zeta$-Ebene ein Polygon von Kurven, die aus den geraden Linien der $z$-Ebene hervorgehen, und von geraden Linien, die den eben erwähnten Kurven $n$ter Ordnung zugeordnet sind. Bei der Voraussetzung, daß die zur konformen Abbildung dieser Polygone auf der Halbebene dienenden Differentialgleichungen $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$ von gleicher Ordnung sind, ergibt sich für das Beispiel der obigen Parabel- und Hyperbelpolygone der von Herrn Schottky betonte Widerspruch; diese Voraussetzung ist aber nicht notwendig und wird, wie das obige Beispiel $n = 2$ zeigt, nicht zutreffen. Um die Frage zu entscheiden, müßten die Gleichungen wirklich aufgestellt werden; dazu ist man aber zur Zeit nicht im Stande, wenngleich die Grundlage dafür in Sylvester's Theorie der Reciprokanten vorliegt. Für das von mir behandelte Problem der Kegelschnittpolygone genügen indessen die vorstehenden Entwicklungen, um den vermeintlichen Widerspruch aufzuklären. Für den allgemeinen Fall werden jedenfalls auch Relationen der Form (8) gültig sein.

7. Bezeichnet man die Brennpunkte eines Kegelschnittes mit $a$, $b$ und sind $a_1$, $b_1$ die konjugiert imaginären Zahlen, so ist bekanntlich

$$(11) \qquad \frac{z''}{z'} - \frac{1}{2}\frac{T'}{T}z' = \frac{z_1''}{z_1'} - \frac{1}{2}\frac{T_1'}{T_1}z_1' = R$$

ein auf dem Kegelschnitt reeller Ausdruck (vgl. § 4 der Abhandlung II), wobei $T = (z-a)(z-b)$ gesetzt wird. Durch Elimination von $a$, $b$ aus dieser Relation kann man die Differentialgleichung der Kegelschnitte ableiten, ohne auf die Sylvesterschen Reziprokanten zurückzugreifen. Es ist

$$(12) \qquad R = q - \frac{1}{2}\frac{T'}{T}z' \quad \text{oder} \quad z' = -z(R-q)\frac{T}{T'}.$$

Durch Differentiation nach $Z$ und Einsetzen des Wertes von $z'$ aus (11) ergibt sich:

$$R - q' = -\frac{1}{2}\frac{T''}{T}z'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{T'}{T}\right)^2 z'^2 - \frac{1}{2}\frac{T'}{T}qz'$$

$$= -2(R-q)^2\frac{T''T}{T'^2} + 2(R-q)^2 + q(R-q),$$

oder:

$$(13) \qquad \begin{aligned} P = q' + q^2 - 3Rq + 2R^2 - R' &= 2(R-q)^2\frac{T''T}{T'^2} \\ &= -(R-q)\frac{T''}{T'}z', \end{aligned}$$

folglich durch nochmaliges Differenzieren:

$$P' = -(R-q)\frac{T''}{T'}qz' - (R'-q')\frac{T''}{T'}z' + (R-q)\left(\frac{T''}{T'}\right)z'^2$$

oder durch Benutzung von (13)

$$P'(R-q) = P[q(R-q) + R' - q' + P],$$

also endlich:

$$P' - 2RP = 0,$$

d. i. die obige Gleichung (4). Ein von zwei willkürlichen Konstanten $a$, $b$ abhängiges Integral dieser Gleichung ist demnach durch die Gleichung (11) gegeben, ebenso wie die Gleichung (10) ein von einer Konstanten abhängiges Integral der Gleichung $P = 0$ darstellt.

Es mag noch folgende Eigenschaft der Gleichung (4) hervorgehoben werden. Macht man den Ansatz

$$z - g = (Z - A)^2 \, Z(Z - A),$$

wo $g$ eine Ecke des Polygons und $A$ den entsprechenden Punkt der $X$-Axe bezeichnet, so wird zufolge der Resultate der Abhandlung II:

$$R = \frac{\lambda - 1}{Z - A} + \cdots, \quad q = \frac{\lambda - 1}{Z - A} + \cdots,$$

und setzt man diese Werte in (4) ein, so fallen die Glieder mit $(Z - A)^{-2}$ in der Tat ganz heraus.

**9.** Die Gleichungen (11) und (12) sind besonders geeignet, um das Verhalten von $z$ zu beschreiben, wenn $Z$ einen Umgang um einen Punkt $A$ beschreibt. Überschreitet $Z$ die reelle Axe, so vertauscht sich $Z$ mit $Z_1 = X - iY$; und wenn diesem Wege von $Z$ in der $z$-Ebene ein Überschreiten der geraden Linie

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0 \text{ oder } \alpha(z + z_1) - \beta i(z - z_1) + 2\gamma = 0 \tag{14}$$

entspricht, so wird dem Punkte $Z_1$ in der $z$-Ebene ein Punkt $z_1^* = x^* - iy^*$ zugeordnet, definiert durch die Gleichung:

$$\alpha(z + z_1^*) - \beta i(z - z_1^*) + 2\gamma = 0. \tag{15}$$

Der unteren Halbebene ($Y < 0$) entspricht so das Spiegelbild des gegebenen Polygons an der Linie. Einer Kurve $\varphi(z, z_1) = 0$ im Innern des gegebenen Polygons entspricht in dem Spiegelbild die Kurve, die entsteht, wenn man in $\varphi(z, z_1)$

$$z = -\frac{(\alpha + i\beta) z_1^* + 2\gamma}{\alpha - i\beta}, \quad z_1 = -\frac{(\alpha - i\beta) z^* + 2\gamma}{\alpha + i\beta} \tag{16}$$

setzt, wo $z^* = x^* + iy^*$. Stoßen in der betrachteten Ecke des Polygons zwei gerade Linien zusammen, und hat die zweite die Gleichung

$$\alpha'(z + z_1) - \beta' i(z - z_1) + 2\gamma = 0, \tag{17}$$

so geht dieselbe über in die Gerade:

$$\begin{aligned}(z^* + z_1^*)\,[\alpha'(\alpha^2 - \beta^2) + 2\beta'\alpha\beta] - i(z^* - z_1^*)\,[2\alpha'\alpha\beta - \beta'(\alpha^2 - \beta^2)] \\ + 4\gamma(\alpha\alpha' + \beta\beta') = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

Eine nochmalige Spiegelung an der Linie (18) führt den Punkt $Z$ in die obere Halbebene zurück. Ist $\lambda\pi$ der Winkel der beiden Linien (15) und (17), so entsteht die erste Spiegelung durch ein Umklappen der Ebene um die Gerade (15), und analytisch durch Multiplikation von $z$ (wenn $z$ auf der Geraden (17) liegt) mit $\varepsilon = e^{\lambda\pi i}$; bei weiterer Spiegelung an der Geraden (18) wird $z$ nochmals mit $\varepsilon$, im ganzen also mit $\varepsilon^2$ multipliziert. Die Differentialgleichung (4) muß dabei ungeändert bleiben. In der Tat bleibt in (11) $q$ ungeändert und in $T = (z - a)(z - b)$, $T' = 2z - (a + b)$ werden die Integrationskonstanten $a$, $b$ ersetzt durch $a\varepsilon^{-2}$, $b\varepsilon^{-2}$; d. h. ein Integral der Gleichung (15) geht in ein anderes derselben Gleichung über. Der Wert $z_1^*$ muß dabei ebenfalls der Gleichung (4) genügen, was durch die Relation (11) bestätigt wird.

Stößt die Gerade (15) in der betreffenden Ecke an einen Kegelschnitt $\varphi(z, z_1) = 0$, so geht dieser bei der ersten Spiegelung in einen kongruenten Kegelschnitt über, dessen Gleichung mittels der Substitution (16) in Variabeln $z^*$, $z_1^*$ aufgestellt werden kann. Sei dieselbe $\psi(z^*, z_1^*) = 0$, so besteht nun die zweite Spiegelung (die in die obere Halbebene und zu einem Punkt $z$, $z_1$ führt) darin, daß man aus den Gleichungen

$$\psi(\bar{z}, z_1^*) = 0, \quad \psi_1(z^*, \bar{z}_1) = 0$$

und der Gleichung (16) die Größen $z^*$ und $z_1^*$ eliminiert, nachdem in (16) $\bar{z}$, $\bar{z}_1$ an Stelle von $z$, $z_1$ geschrieben ist; $\psi_1$ soll dabei aus $\psi$ entstehen, indem man in den Koeffizienten $i$ durch $-i$ ersetzt.

**10.** Kehren wir zu obigem Beispiel des Parabelpolygons zurück, das wir durch die Gleichung (6) auf ein Hyperbelpolygon der $\zeta$-Ebene abgebildet hatten. Der Spiegelung an einer Hyperbel in der $\zeta$-Ebene entspricht also in der $z$-Ebene eine Spiegelung an einer der Hyperbel entsprechenden geraden Linie. Sei letztere durch die Gleichung

$$\alpha(z + z_1) - i\beta(z - z_1) + \gamma = 0 \tag{19}$$

gegeben, so ist die zugehörige Hyperbel:

$$\alpha(\zeta^2 + \zeta_1^2) - i\beta(\zeta^2 - \zeta_1^2) + \gamma = 0. \tag{19a}$$

Einer zweiten geradlinigen Seite, die mit (19) in einer Ecke des Polygons zusammenstößt, nämlich

(20) $$\alpha'(z+z_1)-i\beta'(z-z_1)+\gamma'=0$$

entspricht die Hyperbel

(20a) $$\alpha'(\zeta^2+\zeta_1^2)-i\beta'(\zeta^2-\zeta_1^2)+\gamma'=0.$$

Die Spiegelung an (19a) geschieht durch die zu (16) analogen Gleichungen

(21) $$\zeta^2=-\frac{(\alpha+i\beta)\zeta_1^{*2}+2\gamma}{\alpha-i\beta},\quad \zeta_1^2=-\frac{(\alpha-i\beta)\zeta^{*2}+2\gamma}{\alpha+i\beta}$$

und dadurch geht die Hyperbel (20a) über in die Kurve:

$$A(\zeta^{*2}+\zeta_1^{*2})-iB(\zeta^{*2}-\zeta_1^{*2})+C=0,$$

d. h. wieder in eine Hyperbel mit Mittelpunkt im Anfangspunkte, wo $A$, $B$, $C$ wie in (18) zu berechnen sind. Das Flächenstück zwischen beiden Hyperbeln entspricht der unteren Halbebene $Y<0$. Wiederholt man die Spiegelung, so erhält man eine dritte Hyperbel, und der Fläche zwischen der zweiten und dritten Hyperbel entspricht wieder die obere Halbebene $Y>0$.

Aus einer geraden Linie (17) wird bei der Spiegelung (21) eine Kurve, die sich aus den Gleichungen

$$\alpha'\zeta-i\beta'\zeta_1^*+\gamma'=0,\quad \alpha'\zeta_1+i\beta'\zeta^*+\gamma'=0,$$
$$\alpha(\zeta^2+\zeta_1^2)-i\beta(\zeta^2-\zeta_1^2)+\gamma=0$$

durch Elimination von $\zeta$ und $\zeta_1$ ergibt; die Gleichung wird:

$$\gamma+2\alpha\gamma'^2-\alpha\beta'^2(\zeta^{*2}+\zeta_1^{*2})+i\beta\beta'^2(\zeta_1^{*2}-\zeta^{*2})$$
$$+2i\gamma'\beta'[(\alpha+i\beta)\zeta^*-(\alpha-i\beta)\zeta_1^*]=0$$

wieder eine gleichseitige Hyperbel; ihr Mittelpunkt liegt aber nicht im Anfangspunkt. Aus dem von geraden Linien und Hyperbeln begrenzten Polygon wird also ein Polygon, das nur von Hyperbeln begrenzt wird.

Liegen im Innern der betrachteten Flächenteile Brennpunkte der betreffenden Kurven, so sind die Flächenteile als mehrblätterig zu denken; auch die Halbebene $Y>0$ wird dann mehrfach überdeckt.

Der Linie (20) entspricht in der $z$-Ebene eine Parabel; der Hyperbel (20a) eine gerade Linie; die Spiegelung an der Hyperbel wird zur Umklappung an der geraden Linie. Dadurch entsteht aus der Parabel wieder eine Parabel, aber mit anderem Brennpunkte, es sei denn, daß die Gerade zufällig durch den Brennpunkt der Parabel hindurchgeht.

**11.** Die Kreispolygone erscheinen in der Abhandlung II zunächst als Ausnahmefälle; sie müssen aber in dem allgemeinen Ansatze doch als besondere Fälle enthalten sein. Nach der Schwarz'schen Theorie ist für sie, wenn $\{z, Z\}$ den Schwarzschen Ausdruck bezeichnet:

$$\{z, Z\} = q' - \tfrac{1}{2} q^2 = \varrho(Z), \quad \text{also} \quad q'' = qq' + \varrho', \tag{22}$$

wenn $\varrho$ eine gewisse rationale Funktion von $Z$ bedeutet. Andererseits gibt die Gleichung (11) für $a = b$ (also $T = (z - a)^2$) als erstes Integral der Gleichung (4) beim Kreise:

$$R = q - \frac{z'}{z - a} \tag{22a}$$

und, wenn man $z - a$ eliminiert:

$$q' - R' - qR + R^2 = 0 \tag{23}$$

und hieraus

$$q'' = R'' + q'R + R'q - 2RR',$$

also durch Vergleichung mit der zweiten Gleichung (22):

$$R'' + q'(R - q) + R'q - 2RR' - \varrho' = 0,$$

und wenn man $q'$ mittels der Gleichung (23) eliminiert:

$$-q^2 R + 2qR^2 - RR' - R^3 + R'' - \varrho' = 0;$$

andererseits, indem man den Wert von $q'$ aus (23) in die erste Gleichung (22) einsetzt:

$$q^2 - 2Rq + 2R^2 - 2R' + 2\varrho = 0.$$

Die letztere Gleichung, mit $R$ multipliziert und zur vorhergehenden addiert, gibt:

$$R^3 - 3RR' + R'' + 2\varrho R - \varrho' = 0. \tag{24}$$

Nach Gleichung (41) in § 7 der Abhandlung II sollte eine Gleichung der Form

$$R' - \tfrac{1}{2} R^2 = \tau(Z), \quad \text{also auch:} \quad R'' = RR' + \tau' \tag{25}$$

bestehen, wenn $\tau$ eine gewisse rationale Funktion bezeichnet. Setzt man hieraus die Werte von $R'$ und $R''$ in (24) ein, so ergibt sich:

$$2R(\varrho - \tau) = \varrho' - \tau'.$$

Da nun $R$ keine rationale Funktion sein kann, so folgt

$$\varrho = \tau, \text{ also } \varrho' = \tau', \tag{26}$$

und somit, da die linke Seite von (25) gleich $\{W, Z\}$ ist,

$$\{W, Z\} = \{z, Z\}, \text{ wenn } R = \frac{W''}{W'}$$

gesetzt wird; folglich:

$$W = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ Konstante bezeichnen, und hieraus

$$\frac{W''}{W'} = \frac{-2\gamma z'}{\gamma z + \delta} + \frac{z''}{z'},$$

wodurch die Gleichung (22a) in der Tat erfüllt ist; diese aber ist ein Integral von (4); also auch letztere Gleichung ist erfüllt. Die Kreisbogenpolygone ordnen sich in die allgemeine Theorie der Kegelschnittpolygone ohne Schwierigkeit ein.

Die Gleichung (24) läßt sich in der Tat nunmehr in der Form schreiben:

$$R(R^2 - 2R' + 2\varrho) + R'' - RR' - \varrho' = 0,$$

oder:

$$\frac{d\{W, Z\}}{dZ} - \varrho' = 2[\{W, Z\} - \varrho]R,$$

ist also erfüllt, sobald die eckige Klammer der rechten Seite verschwindet, wie es die Gleichungen (26) im Zusammenhang mit der Gleichung (41) der Abhandlung II verlangen.

**12.** Der besseren Übersicht wegen wiederholen wir hier (aus Abhandlung II) die genauere Definition der auf dem Rande reellen Funktion $R$, die sich an den singulären Stellen verhält wie eine rationale Funktion. Setzt man $R = \frac{W''}{W'}$, und bezeichnet $\{W, Z\}$ wieder den Schwarzschen Differentialausdruck, so ist $W$ aus einer Differentialgleichung der folgenden Form zu bestimmen:

$$R' - \tfrac{1}{2}R^2 = \{W, Z\} = -\tfrac{1}{2}\sum_i \frac{\lambda_i^2 - 1}{Z - A_i} + \tfrac{1}{4}\sum_k \left(\frac{1}{(Z - P_k)^2} + \frac{1}{(Z - Q_k)^2}\right) + \sum_i \frac{\beta_i}{Z - A_i} + \sum_k \left(\frac{\delta_k}{Z - P_k} + \frac{\delta_k'}{Z - Q_k}\right).$$

Hierin bezieht sich der Index $i$ auf die verschiedenen Polygonecken, der Index $k$ auf die im Innern des Polygons liegenden Brennpunkte der begrenzenden Kegelschnitte. Es bezeichnet $A_i$ den Punkt der $X$-Axe, welcher der $i$ten Ecke entspricht und $\lambda_i \pi$ den zugehörigen Polygonwinkel; $P_k$ ist der Punkt der Halbebene $Y > 0$, der dem $k$ten Brennpunkt zugeordnet wird, $Q_k$ der konjugierte Punkt der Halbebene $Y < 0$; $\beta_i$, $\delta_k$, $\delta'_k$ bezeichnen gewisse Konstante, die mit den Größen $A_i$, $P_k$, $Q_k$ durch gewisse Relationen verbunden sind, nämlich

$$\Sigma \beta_i + \Sigma(\delta_k + \delta'_k) = 0,$$

$$\Sigma A_i \beta_i + \Sigma P_k \delta_k + \Sigma Q_k \delta'_k = \tfrac{1}{2} \Sigma(\lambda_i^2 - 1) - \tfrac{1}{2} N,$$

$$\Sigma A_i^2 \beta_i + \Sigma P_k^2 \delta_k + \Sigma Q_k^2 \delta'_k = \tfrac{1}{2} \Sigma(\lambda_i^2 - 1) A_i - \tfrac{3}{8} \Sigma(P_k + Q_k),$$

wo $N$ die Anzahl der in Betracht kommenden Brennpunkte bezeichnet.