Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Bemerkungen zu einem Satze über die Riemannsche ζ-Funktion.

Von **Hans Hamburger** (Berlin).

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 6. Mai 1922.

An anderer Stelle[1]) wurde der Satz bewiesen: *Es sei $f(s)$ gleich einer ganzen Funktion von endlichem Geschlecht dividiert durch ein Polynom; wenn außerdem*

1. *$f(s)$ für $\Re(s) > 1$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe vom Typus* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$,

2. *die Funktion*

$$g(1-s) = \pi^{\frac{1}{2}-s} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} f(s) \tag{1}$$

für $\Re(s) < -\alpha$ ($\alpha \geq 0$) durch eine absolut konvergente Reihe vom Typus $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^{1-s}}$ *dargestellt wird, so ist $f(s) = konst.\ \zeta(s)$.*

(Verlangt man statt **2.** die schärfere Bedingung

$$g(1-s) = f(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1-s}}, \tag{2'}$$

so besagt **2'.** nichts anders, als daß $f(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügen möge.)

---

[1]) H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (erste Mitteilung). Math. Zeitschr. **10**, S. 240—254 (1921). Im folgenden kurz mit I zitiert.

Einen neuen außerordentlich kurzen und eleganten Beweis dieses Satzes hat kürzlich Herr Siegel[1]) angegeben; wenn trotzdem in der folgenden Note noch einmal auf den ursprünglichen Beweis des Satzes (l. c., Fußnote [1]), S. 151) eingegangen wird, so besteht die Absicht, zu zeigen, daß auch dieser Beweis rasch zum Ziele führt, wenn man darauf verzichtet, die dort angegebenen Hilfssätze 1 und 2 (vgl. I, S. 242—245) zu benutzen. Diese Hilfssätze sind damals teils wegen ihres selbständigen Interesses herangezogen worden, teils um einen neuen Beweis dafür herzuleiten, daß die Funktion $\zeta(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügt (I, S. 253—254).

Dem Beweis schicken wir zwei einfache Integralformeln voraus.

Hilfssatz 1: Es ist[2])

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}x^{-s}\,ds=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(\cos 2x-1).$$

Beweis: Wie man leicht einsieht, ist das Integral linker Hand nach dem Cauchyschen Integralsatz gleich der Summe der Residuen der Funktion

$$x^{-s}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}\,(2x)^{-s}}{\Gamma(1-s)\sin\frac{\pi s}{2}}$$

---

[1]) C. Siegel, Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion. Math. Ann. **86** (1922), S. 276—279. Vgl. auch ebenda **85** (1922), S. 129—140 eine Note des Verfassers „Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind", die bereits den Hauptgedanken des Siegelschen Beweises enthält. Beide Noten sind völlig unabhängig voneinander entstanden.

[2]) Ähnliche Integrale betrachtet Herr E. Landau in seiner Arbeit: Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid). Sitzgsb. d. Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. **31** (1915), S. 458—476. Vgl. insbesondere S. 468—469. — Die Formel des Hilfssatzes ist nichts anderes als die Integralumkehrung der Formel (9) des Hilfssatzes 3 aus I, S. 246—247.

in der Halbebene $\Re(s) < -\frac{3}{4}$; mithin ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}-\infty i} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\cos 2x - 1).$$

W. z. b. w.

Hilfssatz 2:[1]) Es ist für $\beta > 0$ und positive y

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-s-\infty i}^{-s+\infty i}\frac{y^s}{(s-1)(s-2)}\,ds = \begin{cases} 0 & \text{für } y > 1 \\ y - y^2 & \text{für } y < 1. \end{cases}$$

Beweis: Diese Formel ist mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes unmittelbar zu verifizieren.

Beweis des Hauptsatzes: Man setze, indem man (1) benutzt (vgl. I, S. 248, Formel (17))

$$(2)\qquad G(s) = \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}\,g(1-s) = \pi^{\frac{5}{2}-s}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}\,f(s).$$

Aus der Relation

$$\lim_{|t|=\infty}\frac{|\Gamma(\sigma+it)|}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\,|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

folgt nach geeigneter Wahl positiver Konstanten T, C, C' für $\Re(s) = \frac{5}{4}$, $|t| > T$

$$(3)\qquad \left|\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}\right| < C\,|t|^{-\frac{5}{4}},\quad |G(s)| < C'\,|t|^{-\frac{5}{4}}.$$

Andererseits findet man für $\Re(s) = -\beta$, $(\beta > \alpha)$, da wegen der Voraussetzung 2. die Funktion $g(1-s)$ auf der Geraden $\sigma = -\beta$ beschränkt bleibt

$$(4)\qquad |G(s)| < C''\,|t|^{-2}.$$

[1]) Vgl. E. Landau, l. c., Fußnote 3), S. 467.

Endlich ist nach Voraussetzung $f(s)$ und damit auch $G(s)$ im Streifen $-\beta < \Re(s) \leq \frac{5}{4}$ bis auf endlich viele Pole regulär; folglich ergibt sich aus einem oft angewandten funktionentheoretischen Hilfssatze von Phragmén-Lindelöf[1]) — der gestattet, von der Größenordnung einer analytischen Funktion auf dem Rande eines Bereiches auf ihre Größenordnung im Innern zu schließen — wegen (3) und (4) die Existenz zweier positiver Konstanten T' und C''', derart, daß in dem ganzen Bereiche $-\beta < \Re(s) \leq \frac{5}{4}$, $|t| > T'$

$$(5) \qquad |G(s)| < C''' |t|^{-\frac{5}{4}} \text{ ist.}$$

Bezeichnet x eine positive Zahl, so bilde man das Integral

$$(6) \quad J(x) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} G(s)\, x^{-s+2}\, ds - \int\limits_{-\beta+\infty i}^{-\beta-\infty i} G(s)\, x^{-s+2}\, ds\right);$$

dann läßt sich wegen (5) $J(x)$ als ein Integral über den Rand des Streifens $-\beta < \Re(s) \leq \frac{5}{4}$ auffassen, und es ergibt sich nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$(7) \qquad J(x) = R(x),$$

unter $R(x)$ die Summe der Residuen von $G(s)$ an den endlich vielen Polen im Innern des Streifens verstanden; mithin ist

$$(8) \qquad R(x) = \sum_{\nu=1}^{m} x^{-s_\nu+2} P_\nu(\log x),$$

wenn $s_1, s_2, \ldots, s_\nu, \ldots, s_m$ die Pole von $G(s)$ im betrachteten Streifen, $P_1, \ldots, P_\nu, \ldots, P_m$ Polynome in $\log x$ bezeichnen.

Setzt man, indem man für $G(s)$ Formel (2) benutzt (vgl. I, S. 249, Formel (19))

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} G(s)\, x^{-s+2}\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i}\int\limits_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} f(s)\, (\pi x)^{-s+2}\, ds,$$

[1]) E. Phragmén und E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse, Acta Math. **31** (1908), S. 381—406, insb. S. 385.

so ergibt sich, wenn man für $f(s)$ die Dirichletsche Reihe aus Voraussetzung **1.** einsetzt und wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^s}$ für $\Re(s) = \frac{5}{4}$, die Reihenfolge von Summation und Integration vertauscht

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \int_{\frac{5}{4}-\infty i}^{\frac{5}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}-1\right)}{\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)} (\pi n x)^{-s+2}\, ds$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \int_{-\frac{3}{4}-\infty i}^{-\frac{3}{4}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} (\pi n x)^{-s}\, ds$$

(9) $$= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1) \qquad \text{(nach Hilfssatz 1).}$$

Substituiert man andererseits in das Integral

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} G(s)\, x^{-s+2}\, ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} \frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}\, g(1-s)\, x^{-s+2}\, ds$$

für $g(1-s)$ die Dirichletsche Reihe aus Voraussetzung **2.** und integriert dann gliedweise, so folgt aus Hilfssatz 2

$$\psi(x) = -4\pi^2 x^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^s}{(s-2)(s-1)}\, ds$$

(10) $$= -4\pi^2 \sum_{n=1}^{m} b_n (x-n) \qquad (m+1 \leq x < m).$$

Wegen (6) und (7) ist

(11) $$\varphi(x) - \psi(x) = R(x).$$

11*

$\varphi(x)$ ist aber, wie aus (9) hervorgeht, eine periodische Funktion mit der Periode 1. Mithin ergibt sich aus (11) und (10)

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad & R(x+1) - R(x) = \varphi(x) - \varphi(x+1) \\
& = 4\pi^2 \left(b_{m+1}(x-m) + \sum_{n=1}^{m} b_n \right) \qquad (\text{für } m < x \leqq m+1).
\end{aligned}
$$

Formel (8) läßt erkennen, daß $R(x+1) - R(x)$ für $x > 0$ einen stetigen Differentialquotienten erster Ordnung hat; damit dasselbe nun aber auch für die rechte Seite von (12) gilt, ist notwendig, daß alle Koeffizienten b_{m+1} gleich einer festen Konstanten b sind. Mithin ist

$$g(1-s) = b\,\zeta(1-s).$$

Setzt man diesen Wert für $g(1-s)$ in die Formel (1) ein, so folgt aus der Riemannschen Funktionalgleichung auch

$$f(s) = b\,\zeta(s).$$

W. z. b. w.