Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1922. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1922
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Integration der partiellen Gleichung $s = \sin z$.

Von **F. Lindemann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 14. Januar 1922.

1. Das Quadrat des Linienelements einer Fläche von konstantem negativen Krümmungsmaße -1 läßt sich bekanntlich in der Form

$$(1) \qquad ds^2 = \cos^2 w \cdot du^2 + \sin^2 w \cdot dv^2$$

darstellen, wo u und v die Parameter die Krümmungslinien bedeuten; die Hauptkrümmungshalbmesser sind dann

$$(2) \qquad R_1 = -\operatorname{tg} w, \qquad R_2 = \operatorname{cotg} w,$$

während w der partiellen Gleichung

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = \tfrac{1}{2} \sin 2w$$

genügen muß, die durch die Substitution $p = u + v$, $q = u - v$ in die Form $4 \dfrac{\partial^2 (2w)}{\partial p\, \partial q} = \sin 2w$ gebracht wird.

Da auf Grund meiner Abhandlung über die Biegungsflächen einer gegebenen Fläche[1]) alle Flächen konstanter Krümmung angegeben werden können, so ist damit auch das allgemeine Integral der partiellen Gleichung (3) bekannt. Die noch nötigen Rechnungen lassen sich leichter durchführen,

[1]) Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-phys. Klasse, Bd. XXIX, 3, München 1921. Diese Arbeit wird im folgenden kurz als Abhandlung zitiert.

wenn man von Flächen mit der konstanten Krümmung $+1$ ausgeht. Man hat dann zu setzen[1]):

$$(4)\qquad R_1 = \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}, \qquad R_2 = \frac{e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}}{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}},$$
$$ds^2 = \tfrac{1}{4}\left[(e^{\vartheta} + e^{-\vartheta})^2\, du^2 + (e^{\vartheta} - e^{-\vartheta})^2\, dv^2\right],$$

wobei u und v wieder die Parameter der Krümmungslinien bedeuten, und es ist:

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = \tfrac{1}{4}\left(e^{-2\vartheta} - e^{2\vartheta}\right),$$

eine Gleichung, die aus (3) hervorgeht, wenn man w durch $i\vartheta$ und v durch iv ersetzt.

2. Wir stellen kurz die wichtigsten Formeln der Abhandlung zusammen; wie dort in der Einladung bemerkt, kann man die Schlußformeln (83) leicht nachträglich bestätigen, wenn man kein Gewicht auf die Art der Ableitung legt. Gegeben sei also die Darstellung einer Fläche durch ihre Minimalkurven α, β in der (schon von Bour aufgestellten) Form:

$$(6)\qquad \begin{aligned} x &= i\int [W_\alpha \cos\lambda\, d\alpha - W_\beta \cos\mu\, d\beta], \\ y &= i\int [W_\alpha \sin\lambda\, d\alpha - W_\beta \sin\mu\, d\beta], \\ z &= \int [W_\alpha\, d\alpha + W_\beta\, d\beta]. \end{aligned}$$

Dann sind dx und dy vollständige Differentiale, sobald die Bedingungen:

$$(7)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\beta} = \operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial\beta}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\alpha} = -\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial\alpha}$$

erfüllt sind, wo $w = \lambda - \mu$ (vgl. a. a. O. den Schluß von § 2); und es folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$(8)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \frac{\partial w}{\partial\alpha} - \operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial\alpha}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\beta} = -\frac{\partial w}{\partial\beta} + \operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial\beta},$$

und durch Differenzieren (§ 1 der Abhandlung):

$$(9)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{2}\cdot\frac{\partial \lg W_\beta}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\,\partial\beta}.$$

---

[1]) Vgl. z. B. Darboux, Leçons, t. 3, p. 385.

Die Fundamentalgröße F und das Krümmungsmaß K sind (a. a. O., § 2):

$$F = 2 \cdot \cos^2 \frac{w}{2} \cdot W_\alpha W_\beta, \quad K = -\frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{F \cdot \cos^2 \frac{w}{2}} = -\frac{1}{F} \frac{\partial^2 \log F}{\partial \alpha \, \partial \beta}\text{[1]}. \tag{10}$$

Nach einem in § 3 angegebenen Verfahren kann man aus den Gleichungen (7) und (9) die Funktion w eliminieren und statt derselben die Funktion F einführen; so wurde die auch von Bour aufgestellte Differentialgleichung

$$\begin{gathered} W_{\alpha\alpha} W_{\beta\beta} - W_{\alpha\beta}^2 + W_\alpha W_\beta \frac{F_\alpha F_\beta}{F^2} - W_{\alpha\alpha} W_\beta \frac{F_\beta}{F} - W_{\beta\beta} W_\alpha \frac{F_\alpha}{F} \\ = \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta} (F - 2 W_\alpha W_\beta) \end{gathered} \tag{11}$$

abgeleitet, die nichts anderes ist als ein besonderer Fall der allgemeinen Gleichung, welcher (nach Darboux und Enneper) die Koordinaten eines Flächenpunktes genügen müssen, wenn die drei Fundamentalgrößen E, F, G gegeben sind. Die Behauptung ist nun, daß ein Punkt ξ, η, ζ der allgemeinsten Biegungsfläche der Fläche (6) in folgender Form erhalten wird:

$$\begin{aligned} \xi &= \int [R \cdot \cos \Phi \cdot W_\alpha \, d\alpha + R' \cdot \cos \Psi \cdot W_\beta \, d\beta], \\ \eta &= \int [R \cdot \sin \Phi \cdot W_\alpha \, d\alpha + R' \cdot \sin \Psi \cdot W_\beta \cdot d\beta], \\ \zeta &= i \int [R \cdot W_\alpha \, d\alpha - R' \cdot W_\beta \, d\beta], \end{aligned} \tag{12}$$

wo Φ zu Ψ, R zu R' konjugiert sein soll. Der Beweis ist folgender: Damit $d\zeta$ ein vollständiges Differential sei, muß die Bedingung:

$$R_\beta W_\alpha + R'_\alpha W_\beta + (R + R') W_{\alpha\beta} = 0 \tag{13}$$

erfüllt sein; ferner sind $d\xi$ und $d\eta$ vollständige Differentiale infolge der beiden Bedingungen, die zu obigen Gleichungen (7) analog sind:

---

[1]) Die Identität beider Ausdrücke für K ist eine Folge des Gaußschen Satzes über die Determinante $DD'' - D'^2$; zum Beweise kann man sich auch der Gleichungen in § 3 der Abhandlung bedienen; vgl. unten den „Nachtrag“.

$$(14)\quad \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} = \operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{W}}{2}\cdot\frac{\partial \lg (R\,W_\alpha)}{\partial \beta},\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = -\operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{W}}{2}\cdot\frac{\partial \lg R'\,W_\beta}{\partial \alpha},$$

wo $\mathfrak{W} = \Phi - \Psi$, und aus denen sich die weiteren, zu (8) analogen Gleichungen

$$(14\,\mathrm{a})\quad \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \alpha} - \operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{W}}{2}\,\frac{\partial \lg (R'\,W_\beta)}{\partial \alpha},\\ \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} &= -\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \beta} + \operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{W}}{2}\,\frac{\partial \lg (R\,W_\alpha)}{\partial \beta} \end{aligned}$$

ergeben, die aber nichts neues aussagen, da sie einfach aus der Definition von $\mathfrak{W}$ folgen. Mit Hilfe derselben erhält man die zu (9) analoge Differentialgleichung:

$$(15)\quad \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{W}}{2}\cdot\frac{\partial \lg \zeta_\alpha}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\operatorname{cotg}\frac{\mathfrak{W}}{2}\cdot\frac{\partial \lg \zeta_\beta}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 \mathfrak{W}}{\partial \alpha\,\partial \beta}.$$

Die Fundamentalgröße F^* und das Krümmungsmaß K^* der Fläche (12) werden nach (10):

$$(16)\quad F^* = 2\cdot\operatorname{cosin}^2\frac{\mathfrak{W}}{2}\cdot\zeta_\alpha\,\zeta_\beta,\qquad K^* = -\frac{\Phi_\alpha\,\Psi_\beta - \Phi_\beta\,\Psi_\alpha}{F^*\cdot\operatorname{cosin}^2\dfrac{\mathfrak{W}}{2}}.$$

Daß α, β die Parameter der Minimalkurven der Fläche (12) sind, ist evident. Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Verbiegung der Fläche (12) auf die Fläche (6) ist also: $F = F^*$, oder:

$$(17)\quad \operatorname{cosin}^2 w' = \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'\cdot R\,R',$$

wo zur Abkürzung $2\,w' = w$, $2\,\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}$. Differentiert man (17) logarithmisch, so ergibt sich:

$$(18)\quad \begin{aligned} \operatorname{tg} w'\cdot(\lambda_\alpha - \mu_\alpha) &= \operatorname{tg}\mathfrak{W}'\cdot(\Phi_\alpha - \Psi_\alpha) - \frac{\partial \lg R}{\partial \alpha} - \frac{\partial \lg R'}{\partial \alpha},\\ \operatorname{tg} w'\cdot(\lambda_\beta - \mu_\beta) &= \operatorname{tg}\mathfrak{W}'\cdot(\Phi_\beta - \Psi_\beta) - \frac{\partial \lg R}{\partial \beta} - \frac{\partial \lg R'}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

Nun war nach (7): $W_{\alpha\beta} = W_\alpha\cdot\lambda_\beta\cdot\operatorname{tg} w' = -W_\beta\,\mu_\alpha\cdot\operatorname{tg} w'$. Infolgedessen lassen sich die Gleichungen (14) in der Form

$$(19)\quad \Phi_\alpha \operatorname{tg}\mathfrak{W}' - \lambda_\alpha \operatorname{tg} w' = \frac{\partial \lg R}{\partial \alpha}, \quad \Psi_\beta \operatorname{tg}\mathfrak{W}' - \mu_\beta \operatorname{tg} w' = -\frac{\partial \lg R'}{\partial \beta}$$

schreiben, und aus (18) ergeben sich dann die weiteren Relationen:

$$(19\text{a})\quad \Phi_\beta \operatorname{tg}\mathfrak{W}' - \lambda_\beta \operatorname{tg} w' = \frac{\partial \lg R}{\partial \beta}, \quad \Psi_\alpha \operatorname{tg}\mathfrak{W}' - \mu_\alpha \operatorname{tg} w' = -\frac{\partial \lg R'}{\partial \alpha}.$$

Die letzten Gleichungen sagen also nichts neues aus, wenn die Bedingung (17) erfüllt ist. Die Integrabilitätsbedingung der Gleichungen (19) und (19a) für Φ_α und Φ_β einerseits, für Ψ_α und Ψ_β andererseits muß sich also auf die eine Gleichung (17) reduzieren. Das ist in der Tat der Fall, denn durch Bildung von $\Phi_{\alpha\beta}$ und $\Psi_{\alpha\beta}$ findet man die Relation:

$$(20)\qquad \frac{\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'} = \frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 w'},$$

welche nach (10), (16) und (17) aussagt, daß das Krümmungsmaß beider Flächen identisch ist, also dasselbe, was auch die Gleichung (17), d. h. $F = F^*$, aussagt. Die 4 Gleichungen (19) und (19a) sind die Gleichungen (79) der Abhandlung, die dort auf andere Weise abgeleitet wurden.

Um die allgemeinste Biegungsfläche von (6) in der Form (12) aufzustellen, hat man also folgende Schritte zu tun:

1. Man bestimme R, R' aus W mittels (13); es geschieht, indem man $R = U + iV$, $R' = U - iV$ setzt, U beliebig annimmt und V durch Quadratur berechnet; dann ist $d\zeta$ ein vollständiges Differential.
2. Man bestimme $\Phi - \Psi = \mathfrak{W} = 2\mathfrak{W}'$ aus (17) durch R, R' und w; dann ist $F^* = F$.
3. Man bestimme Φ und Ψ einzeln aus den Gleichungen (19); dann sind auch $d\xi$ und $d\eta$ vollständige Differentiale;

und damit ist die Aufgabe gelöst. Die Funktionen ξ, η, ζ sind hiernach verschiedene Formen der allgemeinen Lösung der Bourschen Differentialgleichung (11). Man könnte letztere auch wieder aus den Gleichungen (14) und (15) ableiten, wobei die Rechnungen genau wie in § 3 der Abhandlung durchzuführen wären.

3. Bedeuten R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche (6), so ist nach Gleichung (27) der Abhandlung, wo W_α durch $i R W_\alpha$, W_β durch $-i R' W_\beta$, $W_{\alpha\beta}$ durch $i(R_\beta W_\alpha + R W_{\alpha\beta}) = -i(R'_\alpha W_\beta + R' W_{\alpha\beta})$, w durch $\Phi - \Psi = \mathfrak{W}$, W durch $i \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ zu ersetzen ist, unter Benutzung von (7) und (17):

$$(21)\quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2 \frac{R_\beta - R \operatorname{tg} w}{\sin \mathfrak{W} \cdot R R'} \cdot \operatorname{cosin}^2 w = 2 \cdot \frac{R_\beta - R \operatorname{tg} w}{\sin \mathfrak{W} \cdot \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'} \cdot$$

Bezeichnet man also die rechte Seite mit M, so sind die Hauptkrümmungsradien der Fläche (12), da jetzt $R_1 R_2 = 1$ sein soll, die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(22)\qquad r^2 - M r + 1 = 0;$$

und auf Grund der Formeln (4) ist die allgemeine Lösung ϑ der Gleichung (5) aus den Gleichungen

$$(23)\qquad R_1 = i \operatorname{tg}(i \vartheta) \text{ oder } R_2 = -i \operatorname{cotg}(i \vartheta)$$

zu berechnen, wenn man noch die Parameter α, β durch die Parameter u, v ausgedrückt hat. Letzteres verlangt die Integration der Differentialgleichung der Krümmungslinien, die nach Lie durch Quadraturen geschehen kann[1]).

4. Nach Gleichung (26) der Abhandlung ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Fläche (12)

$$(24)\qquad \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \frac{\partial \Psi}{\partial \beta} d\beta^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} d\alpha^2 = 0,$$

wo Φ_α, Ψ_β aus (19) einzusetzen sind, und nach § 13 ist λ durch $\frac{\pi}{2} - 2\beta$, μ durch $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$, W durch $i \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, w' durch $\alpha - \beta$ zu ersetzen; es ergibt sich also:

$$(24\,\mathrm{a})\qquad i W_\alpha \operatorname{cotg} \mathfrak{W}' \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha} d\alpha^2 - \frac{\partial R'}{\partial \beta} d\beta^2 \right) = 0.$$

[1]) Vgl. Lie: Über Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind. Arch. for Mathem. og Naturvidenskab, Kristiania, Bd. 4, 1879.

Zur Integration kann man nach dem Vorgange von Bianchi[1]) in folgender Weise verfahren:

Es ist die linke Seite der Gleichung

$$\frac{1}{(EG - F^2)}\left[(ED' - FD)\,du^2 + (ED'' - GD)\,du\,dv \right.$$
$$\left. + (FD'' - GD')\,dv^2\right]$$

eine quadratische Differentialform mit der Krümmung Null, kann also gleich $dy_1\, dy_2$ gesetzt werden. Berechnet man die Größen E, F, G, D, D', D'' nach § 2 der Abhandlung, so entsteht die linke Seite der Gleichung (24), und diese ist mit (24 a) identisch. Es ist daher:

$$N^2 (R_\alpha\, d\alpha^2 - R'_\beta\, d\beta^2) = du\, dv, \tag{25}$$

wo $N^2 \cdot F^2 \cos^2(\alpha - \beta) = \operatorname{cotg} \mathfrak{W}'$, und

$$\begin{aligned} N \cdot du &= e^{\varkappa}\ \ (\sqrt{R_\alpha}\, d\alpha + \sqrt{R'_\beta}\, d\beta), \\ N \cdot dv &= e^{-\varkappa} (\sqrt{R_\alpha}\, d\alpha - \sqrt{R'_\beta}\, d\beta), \end{aligned} \tag{26}$$

wobei sich $\varkappa$ aus den Gleichungen:

$$B\frac{\partial \varkappa}{\partial \alpha} - A\frac{\partial \varkappa}{\partial \beta} = \quad \frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha},$$
$$-B\frac{\partial \varkappa}{\partial \alpha} - A\frac{\partial \varkappa}{\partial \beta} = -\frac{\partial B}{\partial \alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta}$$

oder:

$$A\frac{\partial \varkappa}{\partial \beta} = \frac{\partial B}{\partial \alpha}, \quad B\frac{\partial \varkappa}{\partial \alpha} = \frac{\partial A}{\partial \beta}$$

mittels einer Quadratur ergibt [wenn die linke Seite von (25) mit $A^2\, d\alpha^2 - B^2\, d\beta^2$ bezeichnet wird]. Durch weitere Quadraturen findet man die Parameter u, v der Krümmungslinien aus (26).

5. Die Integration der Differentialgleichung (5) erfordert also folgende Operationen: 1. man stelle die allgemeine Fläche konstanter Krümmung in der Form (12)

---

[1]) Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsch von Lukat, 2. Auflage, Leipzig 1910, S. 53 und 251 ff.

durch ihre Minimalkurven dar; 2. man berechne die Wurzeln R_1 und R_2 der Gleichung (22), wo M durch (21) definiert ist; 3. dann ist die Lösung ϑ aus (23) zu gewinnen, wenn man noch α, β mittels (26) durch die Parameter u, v der Krümmungslinien ausdrückt.

Nachtrag.

6. Die obige Gleichung (10) für das Krümmungsmaß K erhält man aus den Gleichungen (7) und (8) in folgender Weise: Aus der ersten Gleichung (10) folgt:

$$\frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{\partial^2 \lg W_\alpha}{\partial \alpha\, \partial \beta} + \frac{\partial^2 \lg W_\beta}{\partial \alpha\, \partial \beta} - \frac{2}{\operatorname{cosin}^2 w'} \cdot w'_\alpha w'_\beta - 2 \operatorname{tg} w' \cdot w'_{\alpha\beta},$$

wo $w' = \frac{w}{2}$. Nun ist nach (9):

$$\frac{\partial^2 \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha\, \partial \beta} \cdot \operatorname{cotg} w' - \frac{1}{\sin^2 w'} \left(w'_\alpha \frac{\partial \lg W_\beta}{\partial \alpha} + w'_\beta \frac{\partial \lg W_\alpha}{\partial \beta} \right) = 2\, w'_{\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial^2 \lg W_\alpha W_\beta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{1}{\sin w' \cdot \operatorname{cosin} w'} \left(w'_\alpha \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} + w'_\beta \frac{W_{\alpha\beta}}{W_\alpha} \right) + 2\, w'_{\alpha\beta} \cdot \operatorname{tg} w',$$

also unter Benutzung der ersten Gleichung (7) und der ersten Gleichung (8)

$$\frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \frac{W_{\alpha\beta}}{\sin w' \cdot \operatorname{cosin} w'} \left(\frac{w'_\alpha}{W_\alpha} + \frac{w'_\beta}{W_\beta} \right) - \frac{2\, w'_\alpha w'_\beta}{\operatorname{cosin}^2 w'}$$

$$= 2\, \frac{w'_\alpha \lambda_\beta + w'_\beta (w'_\alpha - \lambda_\alpha)}{\sin w' \cdot \operatorname{cosin} w'} \cdot \operatorname{tg} w' - \frac{2\, w'_\alpha w'_\beta}{\cos^2 w'} = - \frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 w'}$$

womit die verlangte Relation hergestellt ist. Sie erscheint hier als Folge der Gleichung (9), d. h. der Integrabilitätsbedingung für die Gleichungen (7) und (8) (nämlich $\lambda_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha}$ und $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$). Ist W reell, w rein imaginär (also λ und μ konjugiert imaginär), so ist diese Integrabilitätsbedingung immer identisch erfüllt. Bestimmt man nämlich λ durch Quadratur aus der Gleichung (7) für λ_β, so ergibt sich die zweite Gleichung (8), d. i. die Gleichung für μ_β, aus der Bedingung $w = \lambda - \mu$, und somit auch μ durch Quadratur konjugiert zu λ; bildet man dann λ_α durch Differentiation, so muß sich der zu μ_β konjugierte Wert ergeben; das ist aber gerade der in der ersten Gleichung (8) auftretende Wert. Die beiden Werte (für λ_α und λ_β) sind also miteinander verträglich, und somit ist die Gleichung (9) von selbst erfüllt.

In derselben Weise zeigt man, daß die Gleichungen (14) und (14 a) miteinander verträglich sind, daß folglich die Integrabilitätsbedingung (15) erfüllt sein muß.

7. Im Beispiel der Minimalflächen ist nach § 12 der Abhandlung $\lambda = 2\alpha$, $\mu = 2\beta$, $W = A + B$

$$x = i \int [\operatorname{cosin} 2\alpha \cdot A' \, d\alpha - \operatorname{cosin} 2\beta \cdot B' \, d\beta],$$
$$y = i \int [\sin 2\alpha \cdot A' \, d\alpha - \sin 2\beta \cdot B' \, d\beta], \qquad z = A + B$$

und die allgemeinste Biegungsfläche ist:

$$\xi = \int [P_\alpha \cdot \operatorname{cosin} \Phi \cdot d\alpha - P_\beta \cdot \operatorname{cosin} \Psi \cdot d\beta],$$
$$(27) \qquad \eta = \int [P_\alpha \cdot \sin \Phi \cdot d\alpha - P_\beta \cdot \sin \Psi \cdot d\beta], \quad \zeta = i \int [P_\alpha \, d\alpha + P_\beta \, d\beta],$$

wo P eine beliebige rein imaginäre Funktion von α, β bezeichnet, und Φ, Ψ durch die Gleichungen bestimmt sind:

$$\Phi_\alpha = -i \frac{\partial \lg P_A}{\partial \beta} \cdot M, \quad \Phi_\beta = -i \left[2 \operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \frac{\partial \lg P_A}{\partial \beta} \right] \cdot M,$$
$$\Psi_\beta = i \frac{\partial \lg P_B}{\partial \alpha} \cdot M, \quad \Psi_\alpha = i \left[-2 \operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \frac{\partial \lg P_B}{\partial \beta} \right] \cdot M,$$
$$(28) \qquad M^2 = \frac{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)}{P_A P_B + \operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)}.$$

Die drei Koordinaten ξ, η, ζ müssen der obigen Gleichung (11) genügen, in der z. B. W durch iP zu ersetzen ist, d. h. der Gleichung

$$- P_{\alpha\alpha} P_{\beta\beta} + P_{\alpha\beta}^2 - P_\alpha P_\beta \frac{F_\alpha F_\beta}{F^2} + P_{\alpha\alpha} P_\beta \frac{F_\beta}{F} + P_{\beta\beta} P_\alpha \frac{F_\alpha}{F}$$
$$(29) \qquad = (F + 2 P_\alpha P_\beta) \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta}.$$

Hat man P beliebig angenommen, so ist $\Phi - \Psi$ durch die Gleichung (17), d. h. durch

$$(30) \qquad \tfrac{1}{2} F^* = - P_\alpha P_\beta \operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}' = A' B' \operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta) = \tfrac{1}{2} F,$$

wo $$\mathfrak{W}' = \tfrac{1}{2} (\Phi - \Psi),$$

bestimmt, und durch Differentiation ergeben sich die Gleichungen (28), welche zugleich aussagen, daß in (27) unter den Integralzeichen vollständige Differentiale stehen. Die rechte Seite von (29) ist wegen (30)

$$(31) \qquad = 2 P_\alpha P_\beta \sin^2 \mathfrak{W}' \cdot \frac{\partial^2 \lg F}{\partial \alpha \, \partial \beta} = 4 P_\alpha P_\beta \frac{\sin^2 \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)}$$

Aus (30) folgt ferner:

$$\frac{P_{\alpha\alpha}}{P_\alpha} + \frac{P_{\alpha\beta}}{P_\beta} - 2 \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{W}'_\alpha = \frac{F'_\alpha}{F},$$

$$\frac{P_{\alpha\beta}}{P_\alpha} + \frac{P_{\beta\beta}}{P_\beta} - 2 \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{W}'_\beta = \frac{F'_\beta}{F}.$$

Setzt man diese Werte in die linke Seite von (29) ein, so wird dieselbe

$$= 2 \operatorname{tg} \mathfrak{W}' \cdot (P_{\alpha\beta} P_\beta \mathfrak{W}'_\alpha + P_{\alpha\beta} P_\alpha \mathfrak{W}'_\beta - 2 P_\alpha P_\beta \mathfrak{W}'_\alpha \mathfrak{W}'_\beta \operatorname{tg} \mathfrak{W}')$$
$$= 2 P_\alpha P_\beta \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W}' (\Phi_\beta \mathfrak{W}'_\alpha - \Psi_\alpha \mathfrak{W}'_\beta - 2 \mathfrak{W}'_\alpha \mathfrak{W}'_\beta)$$
$$= P_\alpha P_\beta \cdot \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W}' \cdot (\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha).$$

Wegen (31) geht also die Gleichung (29) über in

$$P_\alpha P_\beta \operatorname{tg}^2 \mathfrak{W}' (\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha) = 4 P_\alpha P_\beta \frac{\sin^2 \mathfrak{W}'}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)},$$

oder, da $\lambda = 2\alpha$, $\mu = 2\beta$ ist:

$$\frac{\Phi_\alpha \Psi_\beta - \Phi_\beta \Psi_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 \mathfrak{W}'} = \frac{4}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)} = \frac{\lambda_\alpha \mu_\beta - \lambda_\beta \mu_\alpha}{\operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)},$$

was nach Nr. 6 wieder mit der Gleichung $F = F^*$ identisch ist. **Die Funktion P genügt also in der Tat der Gleichung (29).**

Die Biegungsflächen (27) der gegebenen Minimalfläche findet man demnach in folgender Weise: 1. Man wähle P als beliebige rein imaginäre Funktion von α, β; dann ist $d\zeta$ ein vollständiges Differential; 2. man bestimme sodann $\Phi - \Psi$ aus der Gleichung (30); 3. sodann Φ und Ψ einzeln aus den Gleichungen (28); dann sind auch $d\xi$, $d\eta$ totale Differentiale; 4. diese vier Gleichungen (28) sind miteinander verträglich; setzt man nämlich $\Phi = R + iS$, also $\Psi = R - iS$, wo R und S reell sind, so folgt: $\Phi_\alpha = R_\alpha + iS_\alpha$, $\Psi_\beta = R_\beta - iS_\beta$, $\Psi_\alpha = \Phi_\alpha - (\Phi - \Psi)_\alpha = R_\alpha - iS_\alpha$, und konjugiert dazu $\Phi_\beta = \Psi_\beta + 2iS_\beta = R_\beta + iS_\beta$; folglich $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\beta\alpha}$; ebenso $\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\beta\alpha}$, so daß die Gleichung (9), und folglich auch (11) erfüllt ist, sobald $\Phi - \Psi$ rein imaginär ist; 5. die Bedingungen für α, β als Parameter der Minimalkurven sind dann identisch erfüllt; 6. wegen (30) ist $\xi_\alpha \xi_\beta + \eta_\alpha \eta_\beta + \zeta_\alpha \zeta_\beta = 2 P_\alpha P_\beta \cdot \cos^2 \mathfrak{W}' = 2 A' B' \operatorname{cosin}^2 (\alpha - \beta)$, d. h. $F = F^*$, so daß die Bedingung der Biegung erfüllt ist.

8. Ich benutze diese Gelegenheit, um noch folgende Druck- oder Schreibfehler in meiner größeren Abhandlung zu verbessern:

S. 9, Zeile 8 v. u.: Lies $-$ statt $=$.

S. 14 zu (37 a): Lies $\{z, z\}$ statt $\{x, z\}$.

S. 19, Zeile 10 v. u.: Lies $(W_1)_\alpha$ statt $(W_1)\alpha$.

S. 19, Zeile 10 v. u.: Lies $\operatorname{cotg} w_1'$ statt $\operatorname{tang} w$.

S. 30, Zeile 13 v. o.: Lies $\mathfrak{W}$ statt W.

S. 32: In Gleichung (88) sind α und β miteinander zu vertauschen.

S. 33, Zeile 1 v. u.: Die Quadratwurzel ist aus dem Nenner in den Zähler zu setzen.

S. 34: In der zweiten Gleichung (93 a) sind α und β miteinander zu vertauschen.

S. 36: In dem zweiten Ausdrucke für Ψ ist i durch $-i$ zu ersetzen.

S. 37, Zeile 12 v. o.: Lies „zweiter“ statt „dritter“.

S. 42, Zeile 7 v. u.: Der Zusatz zu Gleichung (25) ist zu streichen.