Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1918. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1918
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Weierstrass' „Abelsche Transzendenten" und ihre Weiterführung.

Von **Robert König** in Tübingen.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 9. Februar 1918.

In einer Reihe von Arbeiten[1]) ist es mir gelungen, an Weierstraß' klassische Vorlesung über Abelsche Transzendenten (Ges. Werke, Bd. IV, Berlin 1902) anzuknüpfen und den ganzen ersten und zweiten Teil derselben von den Abelschen Transzendenten (algebraischen Funktionen und ihren Integralen) auf die Riemannschen Transzendenten (Funktionen mit gegebener Monodromiegruppe und ihre Integrale) auszudehnen. Auch die grundlegende Arbeit von M. Noether „Zur Theorie der Abelschen Differentialausdrücke und Funktionen", Math. Ann. 37 (1890) erscheint hiedurch zum Teil erweitert. Ich versuche im folgenden, mit wenigen Strichen einen Überblick über den systematischen Aufbau der Theorie zu geben.

---

[1]) I. Zur arithmetischen Theorie der auf einem algebraischen Gebilde existierenden Funktionen, Leipzig 19. V. 1911; Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Math.-phys. Klasse, Bd. 63 (1911), S. 348—368.

II. Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale, Leipzig 26. I. 1914; Crelles Journal, Bd. 146 (1916), S. 161—184.

III. Grundzüge einer Theorie der Riemannschen Funktionenpaare, Tübingen 22. VII. 1915; Math. Annalen, Bd. 78 (1917), S. 63—93.

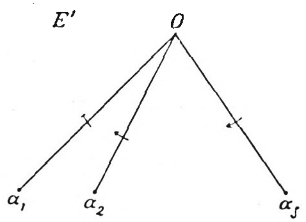
IV. Über die Perioden der Integrale multiplikativer Funktionen (Voranzeige), Tübingen 10. II. 1916; Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig, Bd. 68 (1916), S. 56.

V. Riemannsche Funktionen- und Differential-Systeme in der Ebene, Berlin 11. XI. 1916; Crelles Journal, Bd. 148 (1918).

I. Abschnitt. **Grundlagen.**

I. Die Klasse.

Den Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden Systeme von n Funktionen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — $n \geqq 1$ —, welche auf n Exemplaren E_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ der — wie nebenstehend schematisch angedeutet — zerschnittenen komplexen z-Ebene E' eindeutig und bis auf Pole regulär ausgebreitet sind und bei analytischer Fortsetzung über die von O nach den Punkten a gezogenen Schnitte lineare homogene Substitutionen $A = (a_{ik})$ mit dem Produkt 1 erfahren: $y^* = Ay$. Alle Funktionensysteme $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oder kürzer „Funktionen" y mit denselben A bilden nach Riemann eine Klasse (K). Neben den Funktionen betrachte ich auch ihre Integrale bzw. die zugehörigen „Differentiale" $dJ = y dz = (y_1 dz, y_2 dz, \ldots, y_n dz)$. Die Funktionensysteme $\breve{y} = (\breve{y}_1, \breve{y}_2, \ldots, \breve{y}_n)$, welche die zu den A komplementären Substitutionen $\breve{A} = (A^{-1})$ erfahren, bilden die komplementäre Klasse $(\breve{K})$; $d\breve{J} = \breve{y} dz$ seien die zugehörigen Differentiale.



VI. Die Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten und andere Theoreme, Berlin 6. II. 1917; Jahresber. d. Deutschen Math. Ver., Bd. 26 (1918).

VII. Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme, Berlin 27. II. 1917; Gött. Nachr. (1917), S. 240/6.

VIII. Die Elementartheoreme und die Vertauschungstheoreme 1. Ordnung bei den Riemannschen Transzendenten, Berlin 6. VI. 1917.

IX. Funktionen- und zahlentheoretische Analogieen, Berlin 27. VI. 1917; Archiv f. Math. u. Phys. (1918).

X. Neue Beiträge zur Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten, Berlin 4. IX. 1917. Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver.

XI. Die Vertauschungstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten, Berlin 26. IX. 1917.

XII. Die Reduktions- und Reziprozitätstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten, Berlin 24. XI. 1917. Math. Ann. 1918.

Die „Klasseneigenschaft" — z. B. der Funktionen von (K) — besteht darin, daß mit $y, y^{(1)}, y^{(2)}$ auch $y^{(1)} + y^{(2)}$, $R(z) \cdot y$, $\frac{dy}{dz}$ in der Klasse vorkommen, wenn $R(z)$ eine rationale Funktion ist. Ich setze (K) als „nicht zerfallend" voraus, d. h. der Matrizenkomplex A möge nicht in Partialsysteme zerfallen; sonst könnten wir mehrere Systeme von weniger als n Funktionen betrachten.

II. Der erweiterte Funktionsbegriff.

Ist y eine Funktion von (K), so gehören zu jeder Stelle $\mathfrak{p}$ von E' bzw. zu den n daselbst übereinander liegenden Punkten $\mathfrak{p}_i$ n Funktionselemente der Form $y_i = P_i(t) \left(z_t = p + t \text{ bzw. } \frac{1}{t}\right)$. Das gilt auch noch für die Randstellen von E' mit Ausnahme der Punkte a. Hier läßt sich nach Frobenius[1]) aus A eine Substitution L herstellen (und zwar noch auf verschiedene Arten), welche A in die (bzw. eine) Normalform

$$1) \qquad B = L^{-1} A L = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} e_1 = e^{2 i \pi a_1}, \; . \; . \; . \\ a_1 = a_1' + i a_1'', \; . \; . \; . \\ 0 \leq a_1' < 1, \; . \; . \; . \end{array}$$

überführt[2]). Ich wähle eine derselben und lege damit ein zu a gehöriges System von Funktionselementen der Form

$$\overset{a}{y_i} = L^{-1} y = t^{a_i} P_i(t)$$

fest[3]). Es gehören alsdann zu jeder Stelle des abgeschlossenen Bereiches E' n eindeutig bestimmte Funktionselemente y_i bzw. $\overset{a}{y_i}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$. Ich operiere im folgenden — *und es ist*

---

[1]) Über den Rang einer Matrix, Sitz.-Ber. d. K. Pr. Akad. d. Wiss. 1911, II, S. 20—29.

[2]) Der Einfachheit halber nehme ich an, daß B diese Form hat, also keine mehrgliedrigen „Ketten" vorkommen.

[3]) $P(t)$ bedeutet mit Weierstraß immer eine Potenzreihe mit höchstens endlich vielen negativen Potenzen; das gehört für die Stellen a noch mit zur Voraussetzung über y.

das ein neuer und für das Folgende grundlegender Schritt mathematischer Freiheit — mit der Gesamtheit der Funktionselemente $(y_i, \overset{a}{y_i})$ von (K) und der Differentiale $(dJ_i, d\overset{a}{J_i}) = (y_i\,dz, \overset{a}{y_i}\,dz)$ von (K); daneben betrachte ich die Gesamtheit der Funktionselemente $(y_i, \overset{\dot{a}}{\breve{y}_i})$ von $(\breve{K})$ und der Differentiale $(d\breve{J}_i, d\overset{\dot{a}}{\breve{J}}) = (y_i\,dz, \overset{\dot{a}}{\breve{y}_i}\,dz)$ von $(\breve{K})$, wobei

$$2)\qquad \overset{\dot{a}}{\breve{y}_i} = \breve{L}^{-1}\breve{y} = t^{\breve{\alpha}_i} P_i(t),$$

$$3)\qquad \breve{B} = \breve{L}^{-1}\breve{A}\breve{L} = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{e_1} & & & \\ & \frac{1}{e_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{e_n} \end{matrix}\right\} \qquad \begin{matrix} \frac{1}{e_1} = e^{2i\pi\breve{\alpha}_1}, \ldots \\ \breve{\alpha}_1 = \breve{\alpha}_1' + i\breve{\alpha}_1'', \ldots \\ 0 \leqq \breve{\alpha}_1' < 1, \ldots \end{matrix}$$

ist. Auf diese „Funktionen" und „Differentiale" beziehen sich alle folgenden Aussagen.

Die „reduzierten Exponenten" α_i von (K) und $\breve{\alpha}_i$ von $(\breve{K})$ stehen in dem Zusammenhang:

$$4)\qquad \breve{\alpha}_i = -\alpha_i + \varepsilon_i, \text{ wo } \varepsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \alpha_i' = 0 \\ 1 & \phantom{\text{wenn }} \alpha_i' > 0. \end{cases}$$

III. Der Begriff des Multiplums.

Es handelt sich in erster Linie darum, die Begriffe Nullstelle und Pol auf obige Funktionen und Differentiale sinngemäß auszudehnen. Dazu dient folgende Definition. Ist $\mathfrak{a}\ldots$ eine von den Stellen $z = a$, $\mathfrak{b}\ldots$ eine davon verschiedene Stelle von E' und bedeuten λ_i, $\varkappa_i$ beliebige ganze Zahlen, dann heißt das Aggregat von Punkten und Exponenten

$$\mathfrak{Q} = \left\{\begin{matrix} \mathfrak{a}_1^{\lambda_1} \ldots & \mathfrak{b}_1^{\varkappa_1} \ldots \\ \mathfrak{a}_2^{\lambda_2} \ldots & \mathfrak{b}_2^{\varkappa_2} \ldots \\ \vdots & \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\lambda_n} \ldots & \mathfrak{b}_n^{\varkappa_n} \ldots \end{matrix}\right.$$

ein „Divisor"[1]). Sind alle λ, $\varkappa$ gleich Null, schreibe ich kurz: $\mathfrak{Q} = 1$, sind sie entgegengesetzt gleich: $\mathfrak{Q}^{-1} = \dfrac{1}{\mathfrak{Q}}$. Nun stelle ich folgende Definition auf:

Die Funktion $(y_i, \overset{a}{y_i})$ von (K) heißt ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn für die Umgebung

$$5)\quad \begin{array}{l} \text{der Stelle } \mathfrak{a}\ (\overset{a}{z_t} = a + t)\colon \dfrac{\overset{a}{y_i}(\overset{a}{z_t})}{t^{\alpha_i}} = t^{\lambda_i}\mathfrak{P}_i(t) \\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \text{der Stelle } \mathfrak{b}\ \left(z_t = b + t \text{ bzw. } \dfrac{1}{t}\right)\colon y_i(\overset{b}{z_t}) = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t) \\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

ist und für eine in $\mathfrak{Q}$ nicht explicite vorkommende Stelle $\mathfrak{a}' \ldots$ bzw. $\mathfrak{b}' \ldots$ einfach

$$\frac{\overset{a'}{y_i}(\overset{a'}{z_t})}{t^{\alpha'_i}} = \mathfrak{P}_i(t) \text{ bzw. } y_i(\overset{b'}{z_t}) = \mathfrak{P}_i(t)$$

ist. $\mathfrak{P}(t)$ ist hiebei das Zeichen für eine für $t = 0$ reguläre Potenzreihe.

Das Differential $(dJ_i, d\overset{a}{J_i}) = (y_i\,dz, \overset{a}{y_i}\,dz)$ von (K) heißt Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn

$$6)\quad \begin{array}{l} \text{für } \mathfrak{a}\ (\overset{a}{z_t} = a + t)\colon \dfrac{1}{t^{\alpha_i}}\dfrac{d\overset{a}{J_i}(\overset{a}{z_t})}{dt} = t^{\lambda_i - \varepsilon_i}\mathfrak{P}(t) \\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \text{für } \mathfrak{b}\ \left(\overset{b}{z_t} = b + t \text{ bzw. } \dfrac{1}{t}\right)\colon \dfrac{dJ_i(\overset{b}{z_t})}{dt} = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t) \\ \quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

und für eine in $\mathfrak{Q}$ nicht explicite vorkommende Stelle $\mathfrak{a}' \ldots$ bzw. $\mathfrak{b}' \ldots$ einfach

$$\frac{1}{t^{\alpha'_i}}\frac{d\overset{a'}{J_i}(\overset{a'}{z_t})}{dt} = t^{-\varepsilon'_i}\mathfrak{P}_i(t) \text{ bzw. } \frac{dJ_i(\overset{b'}{z_t})}{dt} = \mathfrak{P}_i(t) \text{ ist.}$$

---

[1]) In Verallgemeinerung des von Hensel-Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln, Leipzig 1902, eingeführten Begriffes.

Analog lauten die Definitionen für die Funktionen $(y', \overset{a}{\breve{y}})$ und Differentiale $(dJ, \overset{a}{d\breve{J}})$ von $(\breve{K})$.

Man sieht, diese Definitionen hängen im allgemeinen wesentlich von der Wahl von L ab.

Die Aussagen haben jetzt einen scharfen Sinn: eine Funktion bzw. ein Differential von (K) oder $(\breve{K})$ hat bei $\mathfrak{a}_1$ eine „Nullstelle h^{ter} Ordnung", einen „Pol h^{ter} Ordnung", oder „verhält sich daselbst regulär" usw., nämlich, wenn $\lambda_1 = +h$, $-h$ und $\mathfrak{P}_1(0) \neq 0$ ist oder wenn $\lambda_1 \geqq 0$ ist usw.

IV. Die wichtigsten Divisoren.

Die wichtigsten, dem Klassenpaar (K), $(\breve{K})$ eigentümlichen Divisoren sind die folgenden: der „Verzweigungsteiler $\mathfrak{Z}$" und der „Differentialteiler $\mathfrak{W}$":

$$\mathfrak{Z} = \Pi \begin{Bmatrix} \mathfrak{a}_1^{\varepsilon_1} \\ \mathfrak{a}_2^{\varepsilon_2} \\ \vdots \\ \mathfrak{a}_n^{\varepsilon_n} \end{Bmatrix}, \quad \mathfrak{W} = \mathfrak{Z} \cdot \frac{1}{\mathfrak{N}_z^2}, \quad \mathfrak{N}_z = \begin{Bmatrix} \mathfrak{p}_{\infty 1} \\ \mathfrak{p}_{\infty 2} \\ \vdots \\ \mathfrak{p}_{\infty n} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

In $\mathfrak{Z}$ ist das Produkt über alle Stellen $\mathfrak{a}$ zu erstrecken; ε_i sind die in 4) eingeführten Zahlen; $\mathfrak{p}_\infty$ ist die unendlich ferne Stelle der Ebene. $\mathfrak{Z}$ kommt für eine beliebige Klasse (K) dieselbe Bedeutung zu wie dem bekannten „Verzweigungsdivisor" in einem algebraischen Funktionskörper oder der „Differente" in einem algebraischen Zahlkörper[1]).

V. Die wichtigsten, (K) eigentümlichen Zahlen.

Es sind dies

1. die Anzahl der l. u. überall endlichen Funktionen: τ,
2. „ „ „ „ „ „ „ Differentiale: σ,
3. das „Geschlecht" $p = \Sigma\Sigma a - n + 1$.

Ebenso für $(\breve{K})$ die entsprechenden Zahlen: $\breve{\tau}$, $\breve{\sigma}$, $\breve{p}$.

---

[1]) Vgl. hiezu „IX".

Die Anzahl τ bzw. σ der linear unabhängigen Funktionen $(y, \overset{a}{y})$ bzw. Differentiale $(dJ, \overset{a}{dJ})$ von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q} = 1$ sind, hängt ebenso wie die Zahl p nicht von der Wahl von L ab, sondern ist ausschließlich durch die Klasse selbst bestimmt.

In dem speziellen algebraischen Fall, — wie in jedem andern, wo $\tau = 1$ ist — fallen wegen der Relation:

$$\breve{\sigma} = \tau + p - 1 \quad (\sigma = \tau + \breve{p} - 1)$$

die beiden Zahlen $\breve{\sigma}$, p zusammen und *es übernimmt die Riemannsche Geschlechtszahl oder die Weierstraßsche Rangzahl*[1]) *gleichzeitig die Rolle von $\breve{\sigma}$ und p, während im allgemeinen diesen beiden Zahlen ganz verschiedene Rollen zukommen.* Es ist von hohem Interesse, das durch die ganze Theorie zu verfolgen.

VI. Spezialfälle.

Ein besonders wichtiger Spezialfall ist der, daß die Klasse (K) „transitiv" ist, d. h. daß die Funktionen $(y_1, y_2, \ldots y_n)$ eines Systemes Zweige einer monogenen analytischen Funktion sind[2]). Er liegt insbesondere dann vor, wenn die gegebenen Substitutionen eine Vertauschungsgruppe bilden; wir erhalten alsdann eine Theorie der irreduziblen algebraischen Systeme und ihrer Differentiale, aus welcher durch Spezialisierung (d. h. durch geeignete Wahl von L) und durch Übergang von den n Blättern E_i zur geschlossenen Fläche die gewöhnliche Theorie der algebraischen Funktionen gewonnen werden kann[3]).

Aus dieser Einordnung entspringt dreierlei:

1. man erkennt, daß fast der ganze Inhalt der Lehre von den algebraischen Funktionen und Differentialen allein auf ihrer

[1]) S. Weierstraß, a. a. O., 4. und 5. Kap.

[2]) Auf ihn allein beziehen sich die formentheoretischen Untersuchungen über Scharen von E. Ritter, Math. Ann., Bd. 47 (1897), s. S. 197.

[3]) Vgl. hiefür insbesondere: „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen", Bericht von Brill und Noether, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver., Bd. III (1894), VII. Abschnitt. Den reduziblen Fall behandelt M. Noether in Acta Math., Bd. 8 (1886).

Klasseneigenschaft beruht und nur ganz weniges aus ihrer (gegen den allgemeinen Fall) neu hinzutretenden Körpereigenschaft fließt[1]); es bietet ein gewisses philosophisches Interesse, das eine von dem andern scharf zu scheiden.

2. dadurch, daß im algebraischen Fall $(K) = (\breve{K})$ ist und es nur eine überall endliche Funktion, die Konstante, gibt, rückt vieles zusammen (s. oben V), was wir auf dem Wege von der allgemeinen Theorie her ganz klar auseinander legen können, und es wird die Stellung der Funktionen und Differentiale eine sehr ungleichartige, während im allgemeinen Falle beide völlig gleichberechtigt sind.

3. und das ist der bedeutungsvollste Umstand — stehen jetzt nicht mehr die einzelnen Gebiete der Riemannschen Funktionentheorie isoliert (wenn auch analog) nebeneinander, sondern sie entwickeln sich aus dem allereinfachsten Gebiet, dem der rationalen Funktionen, organisch auseinander[2]) — ein Körper und ein denselben beherrschendes arithmetisches Gesetz.

II. Abschnitt.

Die Funktionen und Differentiale einer Variabeln.

Aus der Klasseneigenschaft folgen der Reihe nach die zwölf Sätzegruppen, welche den elementaren Teil der Theorie ausmachen.

I. Die arithmetische Sätzegruppe[3]).

Die *drei Basissätze (Satz der Klassenbasis, der Idealbasis, der Multipla-Basis)* besagen, daß 1. alle Funktionen der Klasse (K), 2. die Funktionen von (K), welche Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ im Endlichen sind (d. h. die Funktionen des Ideals $J(\mathfrak{Q})$), 3. die Funktionen von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, durch eine Basis dargestellt werden können und daß eine solche

---

[1]) Z. B. daß die Anzahl der Pole und Nullstellen gleich ist.

[2]) S. „VI", § 1. [3]) S. „V".

für 2. und 3. aus der für 1 durch endliche algebraische Prozesse gewonnen werden kann[1]).

Der *Diskriminantensatz* ist die Verallgemeinerung des bekannten Kroneckerschen Satzes über die Zerfällung der Diskriminante eines algebraischen Körpers in einen wesentlichen und außerwesentlichen Teiler.

Der *Komplementensatz* besagt: Bilden die Funktionen $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}, \ldots \xi^{(n)}$ von (K) eine Basis für das Ideal $J(\mathfrak{Q})$, so bilden die Funktionen $\breve{\xi}^{(1)}, \ldots \breve{\xi}^{(n)}$ von $(\breve{K})$ eine Basis für das Ideal $J\left(\frac{1}{\mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{Z}}\right)$; hiebei ist

$$\breve{\Xi}_{ik} = (\overline{\Xi_{ik}^{-1}}),\quad \Xi_{ik} = (\xi_i^{(k)}),\quad \breve{\Xi}_{ik} = (\breve{\xi}_i^{(k)}),\quad i, k = 1, 2, \ldots n.$$

Er ist das Analogon zu dem Satz von Dedekind, Hilbert, Hensel-Landsberg in der Theorie der algebraischen Zahl- bzw. Funktionenkörper[2]).

Der *Geschlechtersatz*: $p + \breve{p} = w + 2$, wo w die Ordnung von $\mathfrak{W}$ ist, der im algebraischen Fall in die Gleichung $2p - 2 = w$ übergeht, verallgemeinert die Tatsache, daß die Anzahl der Nullstellen eines überall endlichen Abelschen Differentials gleich $2p - 2$ ist.

II. Die 3 Anzahltheoreme[3]).

Das *erste Anzahltheorem* gibt die fundamentale Anzahlbeziehung zwischen den Funktionen von (K), welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind und den Differentialen von $(\breve{K})$, welche Multipla von $\mathfrak{Q}^{-1}$ sind

$$\breve{V}_{\mathfrak{Q}^{-1}} = U_{\mathfrak{Q}} + p + q - 1$$

und kann als Verallgemeinerung des Satzes von Riemann-Roch aufgefaßt werden[4]).

---

[1]) Vgl. für den algebraischen Fall das oben zit. Werk von Hensel-Landsberg.

[2]) Vgl. hiezu „IX“ sowie E. Landau, Gedächtnisrede auf Richard Dedekind, Gött. Nachr. (1917), S. 50—70.

[3]) S. „V“ und „VI“.

[4]) S. die Erweiterungen von M. Noether, Über die Schnittpunktsysteme einer algebraischen Kurve mit nicht adjungierten Kurven. Math. Ann., Bd. 15 (1879).

Das zweite Anzahltheorem gibt eine Anzahlbeziehung zwischen den Funktionen von (K) und den Funktionen von $(\breve{K})$.

Das dritte Anzahltheorem eine solche zwischen den Differentialen von (K) und den Differentialen von $(\breve{K})$ und kann als Verallgemeinerung des Reziprozitätssatzes von Brill und Nöther (Math. Ann., Bd. 7 (1874) aufgefaßt werden.

III. Das Invariantentheorem[1])

lehrt eine von $\mathfrak{Q}$ unabhängige, ausschließlich durch das Klassenpaar (K), $(\breve{K})$ bedingte Anzahlbeziehung kennen.

IV. Die Lückentheoreme[1]).

Es ist eine bekannte wichtige Entdeckung von Weierstraß, daß unter den an einer Stelle unendlich werdenden algebraischen Funktionen genau p Ordnungszahlen fehlen und dafür p Integrale 1. Gattung existieren, welche von diesen Ordnungen daselbst verschwinden. Im Gebiet der Riemannschen Transzendenten besteht ein viel allgemeineres Theorem einmal für die Funktionen und dann ein analoges auch für die Differentiale, für welches im algebraischen Gebiet noch kein Platz ist.

Es zeigt sich, daß die Quelle für diese Lückentheoreme tiefer und zugleich einfacher liegt als der Ausgangspunkt bei Weierstraß[2]); sie fließt aus dem 1. Anzahltheorem.

V. Die Residuensätze

lehren, daß für die Koeffizienten der Unendlichkeitsstellen einer Funktion bzw. eines Differentials von (K) σ bzw. $\breve{\tau}$ lineare homogene Relationen bestehen müssen. Für die Abelschen Differentiale gibt das letztere den Satz, daß die Residuensumme gleich Null ist.

VI. Die Vorbereitungssätze für die algebraische Charakterisierung der Funktionen und Differentiale.

Es läßt sich (auf unendlich viele Arten) ein Divisor $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{M}$ der Ordnung τ bzw. $\breve{\sigma}$ angeben derart, daß keine

1) S. „VI". 2) S. a. a. O. 9. Kap.

überall endliche Funktion von (K) bzw. kein überall endliches Differential von $(\breve{K})$ existiert, welches Multiplum von $\mathfrak{N}$ bzw. von $\mathfrak{M}$ ist[1]). Daraus entspringt das

Charakterisierungsschema:

	Klasse (K)		(Klasse $\breve{K}$)	
Funktionen:	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\mathfrak{M}\,:\,\breve{\sigma}}$	$\overbrace{\circ\ \circ \cdots \circ}^{\mathfrak{N}\,:\,\tau}$	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\breve{\mathfrak{M}}\,:\,\sigma}$	$\overbrace{\circ\ \circ \cdots \circ}^{\breve{\mathfrak{N}}\,:\,\tau}$
Differentiale:	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\breve{\mathfrak{N}}\,:\,\tau}$	$\overbrace{\circ\ \circ \cdots \circ}^{\breve{\mathfrak{M}}\,:\,\sigma}$	$\overbrace{\times\ \times\ \cdots\ \times}^{\mathfrak{N}\,:\,\tau}$	$\overbrace{\circ\ \circ \cdots \circ}^{\mathfrak{M}\,:\,\sigma}$

Die schrägen Kreuze besagen: es gibt (außer den ev. vorhandenen überall endlichen) keine Funktionen bzw. Differentiale, welche nur daselbst höchstens von der 1. Ordnung unendlich werden. Die Kreise besagen: es gibt keine überall endlichen Funktionen bzw. Differentiale, welche daselbst gleichzeitig mindestens von der 1. Ordnung verschwinden.

VII. Die Elementar-Funktionen und -Differentiale einer Variabeln von (K) und $(\breve{K})$.

Ihre Existenz, tatsächliche Aufstellung und algebraische Charakterisierung kann jetzt mit Hilfe des 1. Anzahltheorems, der Basissätze und VI erfolgen[2]). Es gehört z. B. (im allgemeinen) zu einer jeden Stelle $\mathfrak{d}_\delta$ von den E_i', wo δ eine Zahl der Reihe 1, 2, ... n ist, eine unbegrenzte Reihe von Elementarfunktionen h^{ter} Ordnung von (K)

$$\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(h)}}(z,\ \mathfrak{d}_\delta), \quad h = 1, 2, \ldots in\ inf,$$

wobei abgesehen von $\mathfrak{d}_\delta$ $(\mathfrak{E}_i^{(h)}, \overset{a}{\mathfrak{E}}{}_i^{(h)})$ Multiplum von $\mathfrak{M}^{-1}\cdot\mathfrak{N}$ ist, während es sich bei $\mathfrak{d}_\delta$ verhält wie:

$$\overset{d}{z}_t = d + t\colon\ \underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_\delta^{(h)}}(\overset{d}{z}_t,\ \mathfrak{d}_\delta) = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t);$$

1) S. „VI“. 2) S. „VIII“.

ebenso eine unbegrenzte Reihe von Elementardifferentialen h^{ter} Ordnung von (K)

$$\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}}.\,\breve{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{F}_i^{(h)}}(z_t,\, \mathfrak{d}_\delta)}{dt}, \quad h = 1, 2, \ldots,$$

wobei abgesehen von $\mathfrak{d}_\delta$ $\left(\frac{d\mathfrak{F}_i^{(h)}}{dt}, \frac{d\overset{a}{\mathfrak{F}}{}_i^{(h)}}{dt}\right)$ Multiplum von $\breve{\mathfrak{N}}^{-1} \cdot \breve{\mathfrak{M}}$ ist, während es sich bei $\mathfrak{d}_\delta$ verhält wie:

$$z_t^d = d + t\colon \frac{d\mathfrak{F}_\delta^{(h)}(z_t^d,\, \mathfrak{d}_\delta)}{dt} = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}(t).$$

Analog für die Klasse $(\breve{K})$.

Eine besondere Rolle spielen hiebei aber die Stellen von $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\breve{\mathfrak{M}}$, $\breve{\mathfrak{N}}$, $(\mathfrak{a}_j)$, $(\mathfrak{p}_{\infty j})$, $j = 1, 2, \ldots n$.

VIII. Die Partialbruchdarstellung[1])

einer beliebigen Funktion bzw. eines beliebigen Differentials mit Hilfe der obigen besteht ganz wie im algebraischen Fall.

IX. Die algebraische Charakterisierung der Funktionen und Differentiale mittels Polen und Hauptteilen[2]),

X. Die algebraische Charakterisierung der Funktionen und Differentiale mittels Polen und Nullstellen[3])

wird durch zwei Hauptsätze gegeben. Ein Teil des letzteren besagt: gibt man für eine Funktion von (K) $S \geqq \breve{\sigma}$ Pole, dann kann man noch $S - p$ Nullstellen willkürlich vorschreiben; gibt man für ein Differential von $(\breve{K})$ $S \geqq \tau$ Pole, dann kann man noch $S + p - 2$ Nullstellen willkürlich vorschreiben.

XI. Das verallgemeinerte Abelsche Theorem für Funktionen und Differentiale[4]).

Jede weitere Nullstelle für eine Funktion von (K), wofern eine solche noch vorhanden ist, zieht eine lineare, homogene

---

1) S. „XII“ und Weierstraß, a. a. O., 3. Kap.

2) S. „VI“. 3) S. „X“. 4) S. „X“.

Bedingungsgleichung nach sich. Im algebraischen Fall gibt es noch p Nullstellen, die also p Relationen genügen. Es ist das das *Abelsche Theorem in arithmetischer Fassung.* Ebenso muß jede weitere Nullstelle für ein Differential von $(\breve{K})$, wofern eine solche existiert, einer Gleichung genügen. Es ist das für die Differentiale ein völlig gleichberechtigtes Gegenstück zum Abelschen Theorem bei den Funktionen. — Jedes der beiden Theoreme kann auf dreifache Weise ausgesprochen werden: mittels Funktionen, Differentialen, Integralen; die beiden ersten sind transponierte Gleichungssysteme[1]).

XII. Die Umkehrprobleme.

Aus den Bedingungsgleichungen für die Nullstellen der Funktionen und der Differentiale entspringen zwei neue Umkehrprobleme, deren Lösung mir aber noch nicht gelungen ist.

III. Abschnitt.

Die Funktionen und Differentiale von zwei Variabeln.

Ein tieferes Eindringen in die Klasse wird erst ermöglicht durch die Aufstellung von Funktionen und Differentialen, welche außer von dem Argument noch von einem variabeln Parameter abhängen. *Wir stellen uns geradezu als Zielpunkt dieses höheren Abschnittes, alle Zusammenhänge zwischen den einzelnen Funktionen und Differentialen der Klasse zu erforschen.* Das geschieht der Reihe nach in den folgenden 6 Sätzegruppen.

I. Die Elementar-Funktionen und -Differentiale von zwei Variabeln.

Weierstraß beginnt in seiner Vorlesung gleich mit der Aufstellung der „Grundfunktion“ $H(xy, x'y')$[2]). Analog hiezu stelle ich die von dem Argument z und Parameter x abhängende Elementarfunktion 1. Ordnung von (K)

[1]) S. „X“. [2]) S. a. a. O. 2. Kap.

$$\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z,x) = \frac{\xi_i^{(1)}(z)\,\breve{\xi}_k^{(1)}(x) + \cdots + \xi_i^{(n)}(z)\,\breve{\xi}_k^{(n)}(x)}{z-x} + \cdots$$

auf[1]), von der ich nur den Hauptbestandteil hingesetzt habe. $\xi^{(1)}(z) \ldots \xi^{(n)}(z)$ sind dabei eine Basis für das Ideal $J(1)$ in (K), das komplementäre System $\breve{\xi}^{(1)}(x), \ldots \breve{\xi}^{(n)}(x)$ eine Basis für das Ideal $J\left(\frac{1}{\mathfrak{Z}}\right)$ in $(\breve{K})$. Bei festem x und k ist $E_{ik}^{(1)}(z,x)$ (d. h. die betr. Spalte) eine Funktion von (K); bei festem z und i ist $E_{ik}^{(1)}(z,x)$ (d. h. die betr. Zeile) eine Funktion von $(\breve{K})$. In ersterer Eigenschaft verhält es sich für $z = x$ und $i = k$ wie $\frac{1}{z-x}$ und ist im übrigen Multiplum von $\mathfrak{M}^{-1}\cdot\mathfrak{N}$; so erfolgt die Konstruktion, deren Unität nachgewiesen wird[2]).

Analog ist die Definition der Elementarfunktion $\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h)}}(z,x)$ h^{ter} Ordnung von (K), welche sich für $z = x$ und $i = k$ verhält wie $\frac{1}{(z-x)^h}$. Der Ableitungssatz I_h lehrt, daß $E^{(h+1)}$ aus $E^{(1)}$ durch $h$malige Differentiation nach dem Parameter x entsteht[3]).

$\underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(1)}}(x,z)$ und $\underset{\breve{\mathfrak{M}},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(h)}}(x,z)$ haben für die Klasse $(\breve{K})$ die analoge Bedeutung.

Entsprechend baue ich ein Elementardifferential 1. Ordnung von (K) auf

$$\frac{d\,\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{F_{ik}^{(1)}}(z_t, x_\tau)}{dz}\;\frac{dz}{dt}\;\frac{dx}{d\tau}$$

und der Ableitungssatz II_h lehrt wiederum, daß das Ele-

---

1) S. „VIII“ und „XII“.

2) Das Vorstehende soll nur dazu dienen, dem Leser anzudeuten, worum es sich handelt; es wird damit aber keine erschöpfende Darstellung gegeben.

3) S. „XII“.

mentardifferential $(h + 1^{te})^{ter}$ Ordnung $\dfrac{d \underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{F}}{}_{ik}^{(h+1)}(z, x)}{dz}$ durch h malige Differentiation nach dem Parameter x aus $\dfrac{dF^{(1)}}{dz}$ hervorgeht[1]).

$$\frac{d \underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{F}}{}_{ki}^{(1)}(x, z)}{dx} \quad \text{und} \quad \frac{d \underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{F}}{}_{ki}^{(h)}(x, z)}{dx}$$

haben für die Klasse $(\breve{K})$ die analoge Bedeutung.

II. Die Entwicklungstheoreme[2]).

Man beherrscht $E_{ik}^{(h)}(z, x)$ vollständig, wenn man die drei Fragen beantworten kann:

A) Wie lautet die Potenzentwicklung nach z und x gleichzeitig?

B) nach dem Parameter x allein?

C) nach dem Argument z allein?

Die Antwort auf die Frage B) für $h = 0$ — genauer die Entwicklung von $\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{E}{}_{ik}^{(1)}(z, x_\tau)\,\dfrac{dx_\tau}{d\tau}$ nach τ in der Umgebung jeder Stelle von den E_i' — wird durch das f u n d a m e n t a l e E n t w i c k l u n g s t h e o r e m I_1 gegeben, welches aussagt, daß als Entwicklungs-Koeffizienten genau alle in VII. aufgestellten Elementarfunktionen entspringen. Durch dieses wie E n t w i c k l u n g s t h e o r e m I_{h+1} werden *alle Zusammenhänge zwischen den Elementarfunktionen von zwei und von einer Variabeln* geliefert.

Für $\dfrac{dF_{ik}^{(h)}(z, x)}{dz}$ bzw. $\dfrac{d\breve{F}_{ki}^{(h)}(x, z)}{dx}$ liegen dieselben Fragen vor, von denen B) ebenfalls durch das f u n d a m e n t a l e E n t w i c k l u n g s t h e o r e m II_1 (II_{h+1}) in derselben überraschend schönen und vollständigen Weise beantwortet und damit der *Zusammenhang zwischen den Elementardifferentialen von zwei und von einer Variabeln gegeben wird.*

---

1) S. „XII". 2) S. „VIII" und „XII".

III. Die Vertauschungstheoreme[1]).

Der *Zusammenhang zwischen den Funktionen* $E_{ik}^{(h+1)}(z, x)$ *und den Differentialen* $\frac{d\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}{dx}\frac{dx}{d\tau}$ wird durch eine 1. Reihe von Vertauschungstheoremen (Vert. I_{h+1}) geliefert:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} + (-1)^h \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x_\tau, z_t)}{dx}\frac{dx_\tau}{d\tau} + \cdots = 0$$

insbesondere für $h = 0$:

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(1)}}(z_t, x_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} - \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(1)}}(x_\tau, z_t)}{d\tau} = 0.$$

Der *Zusammenhang zwischen den Funktionen* $E^{(h+1)}$ *und* $\breve{E}^{(h+1)}$ durch eine 2. Reihe von Vertauschungstheoremen (Vert. II_{h+1}) der Form

$$\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E_{ik}^{(h+1)}}(z, x) + (-1)^h \underset{\breve{\mathfrak{M}},\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{E}_{ki}^{(h+1)}}(x, z) + \cdots = 0^{2}),$$

wo die durch ... angedeuteten Glieder ebenso wie die beiden ersten Glieder bei gleichzeitiger Vertauschung von z und x, i und k, sowie aller Größen mit ihren komplementären ungeändert bleiben (bis auf den Faktor $(-1)^h$).

Der *Zusammenhang zwischen den Differentialen* $dF^{(h+1)}$ *und* $d\breve{F}^{(h+1)}$ durch eine 3. Reihe von Vertauschungstheoremen (Vert. III_{h+1}) der Form:

$$\frac{d\underset{\breve{\mathfrak{N}},\breve{\mathfrak{M}}}{F_{ik}^{(h+1)}}(z, x)}{dz} + (-1)^h \frac{d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_{ki}^{(h+1)}}(x, z)}{dx} + \cdots = 0^{2}),$$

wobei ... usw. Insbesondere für $h = 1$ liefert Vert. III_2 bzw. sein Korollar III_2^* im algebraischen Fall den *Vertauschungs-*

---

[1]) S. „XI" und „XII".

[2]) Die durch ... angedeuteten Glieder sind jeweils Produkte aus einer Elementarfunktion von (K) und $(\breve{K})$ bzw. einem Elementardifferential von (K) und $(\breve{K})$.

satz von Weierstraß[1]) und M. Noether[2]). Allgemein stellt III_2 das funktionentheoretische Gegenstück zu den *berühmten* (formalen) *Vertauschungsidentitäten von Abel, Jacobi u. a.* bei den linearen Differentialgleichungen dar[3]).

IV. Die Reduktionstheoreme[4]).

In den drei Arten von Vertauschungstheorem denke ich mir die vorkommenden Funktionen und Differentiale in der Umgebung jeder Stelle von den E_i' entwickelt und zwar einmal nach dem Argument z (bezw. t), das andere mal nach dem Parameter x (bzw. τ). Ich suche den Koeffizienten der Potenz t^r bzw. τ^s, was mit Hilfe der Entwicklungstheoreme gelingt; dieser gleich Null gesetzt, liefert *sechs Arten von Reduktionstheoremen*, Red. I_{h+1} (t^r), Red. I_{h+1} (τ^s) — Red. III_{h+1} (τ_s), wodurch alle *Zusammenhänge zwischen den Elementar-Funktionen und -Differentialen von einer Variabeln* gegeben werden. Von der größten Wichtigkeit für die Einsicht in den Aufbau der Klasse sind Red. II_2 (τ^s) und Red. III_2 (t^r). Das letztere besagt insbesondere, daß alle Elementardifferentiale beliebiger Ordnung von $(\breve{K})$ ausgedrückt werden können 1. durch Elementardifferentiale 1. Ordnung, 2. eine endliche Anzahl ganz bestimmter unter ihnen und 3. die Ableitung einer Funktion. 2. besteht in dem Spezialfall, daß keine rein imaginären Exponenten a vorkommen aus den $\breve{\sigma}$ überall endlichen Differentialen und den σ zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Elementardifferentialen 2. Ordnung. Dieser Spezialfall liegt insbesondere vor, wenn $(K) = (\breve{K})$ eine algebraische Klasse ist und dann geht Red. III_2 (t^r) über in den Reduktionssatz von Weierstraß[5]).

V. Die Reziprozitätstheoreme[6]).

Indem ich in den 3 Arten von Vertauschungstheoremen jetzt den Koeffizienten von $t^r \tau^s$ aufsuche und gleich Null setze,

[1]) A. a. O., 11. Kap., S. 254. [2]) Math. Ann. 37 (1890), S. 459.

[3]) S. L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, 2. Bd., I. Teil, Leipzig 1897, S. 411.

[4]) S. „XII". [5]) A. a. O.. 12. Kap., S. 263. [6]) S. „X" und „XII".

erhalte ich 3 Reihen von Reziprozitätstheorem $(h+1)^{\text{ter}}$ Stufe: Rez. I_{h+1}, Rez. II_{h+1}, Rez. III_{h+1}. Diese geben alle *Zusammenhänge zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Elementar-Funktionen und -Differentiale* an beliebigen Stellen von E_i'. Rez. I_1 besagt insbesonders: Der r^{te} Entwicklungskoeffizient der zur Stelle $\mathfrak{b}_\beta$ gehörigen Elementarfunktion $(s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle $\mathfrak{b}_\delta$ ist entgegengesetzt gleich dem s^{ten} Entwicklungskoeffizienten des zur Stelle $\mathfrak{b}_\delta$ gehörigen Elementardifferentials $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung an der Stelle $\mathfrak{b}_\beta$.

VI. Der allgemeine Reduktionssatz für Funktionen und Differentiale[1]).

Ich nehme schließlich eine beliebige Funktion bzw. ein beliebiges Differential, mache die Partialbruchzerlegung desselben — was nach Weierstraß mit Hilfe von $E_{ik}^{(1)}(z, x)$ mit einem Schlage geschehen kann — und wende auf alle auftretenden Elementardifferentiale gleichzeitig das Red. III_2 (t^r) an. Dann erhalte ich den allgemeinen Reduktionssatz für die Differentiale dahingehend, daß sich jedes Differential durch gewisse, genau angebbare einfachste Typen und die Ableitung einer Funktion darstellen läßt. Die Integralform des Satzes lehrt zweierlei: 1. was durch die Integrale Neues zu den Funktionen der Klasse hinzutritt; 2. wann sich ein Integral auf eine Funktion der Klasse reduziert. Als letzter Ausfluß erscheint im algebraischen Fall der Satz, daß sich jedes Abelsche Integral 2. Gattung durch $2p$ Fundamentalintegrale darstellen läßt.

Schlußbemerkung.

Seither ist es mir auch gelungen, den ganzen 2. Abschnitt der Weierstraßschen Vorlesung auf die Riemannschen Transzendenten auszudehnen[2]).

---

[1]) S. „XII" und Weierstraß, a. a. O, S. 264.

[2]) S. Die Integrale der Riemannschen Transzendenten. Berlin, 19. III. 1918, Math. Ann.