Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1939. Heft I und II

Sitzungen Januar–Juli

München 1939

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über das zweite Cousinsche Problem und die Quotientendarstellung meromorpher Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Von Karl Stein in Münster (Westf.).

Vorgelegt von Herrn C. Carathéodory in der Sitzung vom 6. Mai 1939.

Die Frage nach der Existenz analytischer Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Nullstellenmannigfaltigkeiten ist in der Literatur als das zweite Cousinsche Problem bekannt.[1] Genauer handelt es sich um folgendes: In dem (offenen) Bereich B^{2n} des Raumes der Veränderlichen $z_1, \ldots, z_n$ sei jedem Punkt P eine Umgebung $U(P)$ und eine dort reguläre Funktion $f_p(z_1, \ldots, z_n)$ zugeordnet. Im Durchschnitt $D(U[P], U[Q])$ der Umgebungen zweier Punkte P und Q sei $\frac{f_P}{f_Q}$ regulär und ungleich Null. Gesucht wird eine in B^{2n} reguläre, eindeutige Funktion F, so daß in $U(P)$ jeweils $\frac{F}{f_P}$ regulär und ungleich Null ist. Trifft für einen Bereich B^{2n} die Aussage, daß es zu jeder so zulässigen Verteilung von Ortsfunktionen f_P eine gesuchte Funktion F gibt, zu, so sagen wir, in B^{2n} gelte die zweite Aussage von Cousin.

In enger Beziehung zu dieser Aussage steht die folgende, als Aussage von Poincaré bekannte: Ist die Funktion $f(z_1, \ldots, z_n)$ in B^{2n} meromorph und eindeutig, so gibt es zwei in B^{2n} reguläre, eindeutige und teilerfremde Funktionen g und h, so daß in B^{2n} gilt

$$f = \frac{g}{h}.$$

---

[1] Wegen des Literaturnachweises vergleiche man H. Behnke und K. Stein, Analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen zu vorgegebenen Null- und Polstellenflächen. Jber. der D.M.V. 47, 1937, S. 177. Während der Niederschrift der vorliegenden Note erschien noch: K. Oka, Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables complexes III, Deuxième problème de Cousin, Journ. Sci. Hirosima Univ. A 9, 1939, S. 7–19.

Es ist leicht zu sehen, daß die Aussage von Poincaré sicher in allen Bereichen B^{2n} zutrifft, in denen die zweite Cousinsche Aussage gilt.

Seit den grundlegenden Untersuchungen von Cousin[1] ist die Frage nach dem genauen Geltungsbereich der beiden formulierten Aussagen ein offenes Problem. Cousin selbst hat seine Aussage für Zylinderbereiche bewiesen, von deren Projektionen höchstens eine mehrfach zusammenhängend ist. Später zeigte T. H. Gronwall[2] an einem Beispiel, daß sie sicher für Zylinderbereiche falsch wird, wenn mehr als eine Projektion mehrfach zusammenhängt. Das Gronwallsche Beispiel ist insofern überraschend, als das sogenannte erste Cousinsche Problem, nämlich die Aufgabe, zu vorgegebenen Polstellen eine meromorphe Funktion zu konstruieren, in allen Zylinderbereichen lösbar ist. Doch lassen die Gronwallschen Überlegungen keinen tieferen Grund für die Schwierigkeiten erkennen, die das zweite Cousinsche Problem vor dem ersten auszeichnen.

In der vorliegenden Note sollen nun einige Resultate mitgeteilt werden, die zeigen, daß diese Schwierigkeiten vor allem topologischer Natur sind.[3] Wir ordnen jeder in einem Bereich B^{2n} vorgegebenen Cousinschen Verteilung V von Nullstellenmannigfaltigkeiten gewisse charakteristische Schnittzahlen zu. Höchstens dann, wenn diese Schnittzahlen alle Null sind, existiert zu V eine Lösungsfunktion. Hieraus ergibt sich eine Bedingung für die Möglichkeit, eine in B^{2n} gegebene meromorphe Funktion als Quotient teilerfremder regulärer Funktionen darzustellen. Weiter zeigen wir, daß die angegebenen notwendigen Bedingungen für Zylinderbereiche auch hinreichend sind. Wir können ferner jede in einem solchen Bereich gegebene Cousinsche Ver-

[1] P. Cousin, Sur les fonctions de n variables complexes, Acta math. Bd. 19, 1895.

[2] T. H. Gronwall, On the expressibility of a uniform function of several complex variables as the quotient of two functions of entire charakter, Amer. Math. Soc. Trans. Bd. 18, 1917.

[3] In der oben zitierten Arbeit geht Herr K. Oka ebenfalls auf die topologische Seite des zweiten Cousinschen Problems ein. Sein Hauptresultat lautet: Wenn eine Lösung topologisch möglich ist, so auch analytisch. Unsere Resultate liefern Bedingungen für die Existenz solcher topologischen Lösungen.

teilung V zu einer zweiten V' ergänzen, deren charakteristische Schnittzahlen sämtlich Null sind. Daraus folgt, daß jede in einem Zylinderbereich meromorphe Funktion eine Quotientendarstellung durch reguläre Funktionen besitzt, die dann allerdings nicht teilerfremd zu sein brauchen. Zum Schluß nutzen wir unsere Überlegungen zur Konstruktion schlichter nichtrungescher Regularitätsbereiche aus, d. h. solcher Regularitätsbereiche, in denen die Approximation regulärer Funktionen durch rationale nicht immer möglich ist.

Auf die ausführliche Begründung und Ausdehnung dieser Resultate beabsichtigt Verfasser an anderer Stelle einzugehen.

In der folgenden Darstellung beschränken wir uns auf Funktionen zweier komplexer Veränderlichen w, z, doch bietet eine Übertragung auf n Veränderliche keine wesentlichen Schwierigkeiten.

§ 1.

Notwendige Bedingungen für die Lösbarkeit der Probleme von Cousin und Poincaré.

Wir orientieren zunächst die w-Ebene E_w^2 und die z-Ebene E_z^2 durch Festlegung eines positiven Drehungssinns, und zwar setzen wir wie üblich die Linksdrehung als positiv fest. Dadurch ist auch dem R^4 als dem topologischen Produkt $E_w^2 \times E_z^2$ eine Orientierung aufgeprägt. Es sei nun $\mathfrak{F}^2$ ein analytisches Flächenstück und $w = f(z)$ seine Darstellung. Dabei ist $f(z)$ über E_z^2 regulär, doch möglicherweise verzweigt. Wir nennen diejenige Orientierung von $\mathfrak{F}^2$ positiv, die durch die Abbildung $w = f(z)$ von E_z^2 auf $\mathfrak{F}^2$ erzeugt wird. Man erhält dieselbe Orientierung, wenn man durch $z = f^{-1}(w)$ die Orientierung von E_w^2 auf $\mathfrak{F}^2$ überträgt.

Im folgenden betrachten wir nun einen festen Bereich B^4 des R^4 und in ihm eine Cousinsche Verteilung V von Ortsfunktionen f_p. Dadurch ist in B^4 eine Menge M^2 von analytischen Flächenstücken $\mathfrak{F}^2$ definiert, denen durch die f_p jeweils eine bestimmte, positiv ganzzahlige Vielfachheit zugeordnet ist. Wir denken uns die $\mathfrak{F}^2$ außerdem in der angegebenen Weise orientiert. Ist dann weiter K^2 eine geschlossene zweidimensionale singuläre Kette[1] in B^4, die sich zu den $\mathfrak{F}^2$ von M^2 in allgemeiner Lage befindet, so ist die Schnittzahl $S(K^2, M^2)$ wohldefiniert. Wir behaupten nun:

Zu V existiert höchstens dann eine Cousinsche Lösungsfunktion, wenn $S^2(K^2, M^2) = 0$ ist.

Zum Beweise entferne man aus K^2 geeignete genügend kleine Umgebungen der Schnittpunkte mit M^2 und erhält so eine berandete singuläre Kette $\tilde{K}^2$. Existiert zu V eine Lösungsfunktion $F(w, z)$ und ist gleichzeitig $S(K^2, M^2) \neq 0$, so hat das durch $\tau = F(w, z)$ vermittelte Bild von $\mathfrak{Rd}\tilde{K}^2$ in der τ-Ebene eine von Null verschiedene Verschlingungszahl mit dem Nullpunkt. Dann aber müßte $F(w, Z)$ nach dem Kroneckerschen Existenzsatz[2] auch noch auf K^2 Nullstellen haben, was nicht möglich ist.

Die Schnittzahl $S(K^2, M^2)$ ändert sich nicht, wenn man K^2 durch eine in B^4 homologe, zu M^2 in allgemeiner Lage befindliche singuläre Kette ersetzt. Es hat also einen Sinn, von der Schnittzahl $S(H^2, M^2)$ einer Homologieklasse H^2 von B^4 mit M^2 zu sprechen.

Es seien $B_1^2, \ldots, B_{p2}^2$[3] homolog unabhängige singuläre Ketten, die in B^4 eine Homologiebasis darstellen und sich zu M^2 in allgemeiner Lage befinden. Wir wollen die Schnittzahlen $S(B_1^2, M^2), \ldots, S(B_{p2}^2, M^2)$ *die zur Basis $B^2 = (B_1^2, \ldots, B_{p2}^2)$ gehörigen charakteristischen Zahlen von V* nennen. Aus unseren Betrachtungen folgt dann:

Satz 1: *Zu einer Cousinschen Verteilung V von Ortsfunktionen im Bereich B^4 existiert höchstens dann eine Lösungsfunktion, wenn die zu einer zweidimensionalen Homologiebasis in B^4 gehörigen charakteristischen Zahlen von V sämtlich Null sind.*

Unsere Überlegungen zeigen darüber hinaus, daß es auch nicht eine nur stetige Lösungsfunktion gibt, falls eine der charakteristischen Zahlen von V nicht verschwindet.

Aus Satz 1 ergibt sich in einfacher Weise eine Bedingung dafür, daß eine in B^4 meromorphe Funktion $g(w, z)$ dort eine

[1] Wir benutzen die Terminologie des Lehrbuchs der Topologie von Seifert-Threlfall.

[2] Siehe Alexandroff-Hopf, Topologie S. 467.

[3] p^2 kann auch unendlich sein.

Darstellung als Quotient regulärer teilerfremder Funktionen gestattet. Es sei nämlich N_0^2 die Menge der orientierten, mit der richtigen Vielfachheit versehenen Nullstellenflächen von g. Wir denken uns N_0^2 durch eine Cousinsche Verteilung V von Ortsfunktionen gegeben. Ist nun eine gesuchte Quotientendarstellung von g in B^4 möglich, existiert also eine in B^4 analytische Funktion, die genau auf N_0^2 in der richtigen Ordnung verschwindet, so müssen nach Satz 1 alle Schnittzahlen $S(B_1^2, N_0^2), \ldots, S(B_{p^2}^2, N_0^2)$ Null sein.

Bezeichnet man die a-Stellenmannigfaltigkeit von g in B^4 mit N_a^2, so läßt sich überdies zeigen, daß die Schnittzahlen $S(B_\nu^2, N_a^2)$ nicht von a abhängen; es ist

$$S(B_\nu^2, N_0^2) = S(B_\nu^2, N_a^2), \quad \nu = 1, \ldots, p^2.$$

Die Zahlen $S(B_\nu^2, N_0^2)$ stellen gewissermaßen Strukturkonstanten von g in B^4 dar. Wir nennen sie *die zur Basis* $B^2 = (B_1^2, \ldots, B_{p^2}^2)$ *gehörigen charakteristischen Zahlen von* g.

Es gilt also

Satz 2: *Damit eine in B^4 meromorphe Funktion g dort eine teilerfremde Quotientendarstellung zuläßt, ist notwendig, daß die zu einer zweidimensionalen Homologiebasis in B^4 gehörigen charakteristischen Zahlen von g sämtlich Null sind.*

§ 2.

Die Probleme von Cousin und Poincaré in Zylinderbereichen.

Wir beschränken uns zunächst auf den von Gronwall betrachteten Bereich D^4: $(0 < |w| < \infty,\ 0 < |z| < \infty)$ und geben hier eine Cousinsche Verteilung von Ortsfunktionen an, zu der keine Lösungsfunktion existiert. Hierzu betrachten wir die analytische Fläche

$$\mathfrak{F}^2 : z = w^i = e^{i \log w}.$$

Sie liegt singularitätenfrei in D^4 und besitzt dort keine Verzweigungsstellen und Doppelpunkte. Eine in D^4 zulässige Verteilung V, durch die genau $\mathfrak{F}^2$ als Nullstellenfläche erster Ordnung vorgeschrieben wird, erhält man folgendermaßen: Liegt der Punkt P nicht auf $\mathfrak{F}^2$, so sei $f_P \equiv 1$ und die Umgebung $U(P)$ so klein, daß sie $\mathfrak{F}^2$ nicht trifft. Liegt dagegen P auf $\mathfrak{F}^2$, so sei $f_P \equiv z - w^i$ und $U(P)$ so klein, daß f_P dort eindeutig bleibt. (Es ist natürlich der in P verschwindende Zweig von $z - w^i$ gemeint.) Wir behaupten, daß zu V keine Lösungsfunktion existiert.

Um das zu zeigen, konstruieren wir zunächst eine in D^4 reguläre mehrdeutige Funktion, die genau $\mathfrak{F}^2$ zur Nullstellenfläche erster Ordnung hat. Die unendlichen Produkte

$$H_1(w,z) = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{e^{i\log w + \nu\cdot 2\pi}}\right),\; H_2(w,z) = \prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{z\cdot e^{-i\log w + \mu\cdot 2\pi}}\right)$$

konvergieren absolut und gleichmäßig für $0 < \rho_1 < |z| < \rho_2 < \infty$, w in einem einfach zusammenhängenden, den Nullpunkt nicht enthaltenden Bereich; sie stellen also in D^4 reguläre, mehrdeutige Funktionen dar. (Für $\log w$ soll in allen Faktoren derselbe Zweig des Logarithmus genommen werden!) Wir betrachten die Funktion

$$H(w,z) = e^{\frac{\log^2 w}{4\pi} + \frac{\log w}{1-i}} \cdot H_1(w,z)\cdot H_2(w,z);$$

sie verhält sich in D^4 folgendermaßen: Bei festem w und variablen z bleibt sie eindeutig, bei festem z und positivem Umlauf von w um den Nullpunkt erhält sie den Faktor z. Wir deuten diese Eigenschaften in folgender Weise symbolisch an:

$$\underset{w}{H}(w,z) \to z\cdot H(w,z),$$

$$\underset{z}{H}(w,z) \to H(w,z).$$

Außerdem besitzt $H(w,z)$ genau $\mathfrak{F}^2$ als Nullstellenfläche erster Ordnung. Gäbe es nun zu V eine in D^4 eindeutige reguläre Lösung $F(w,z)$, so wäre

$$G(w,z) = \frac{H(w,z)}{F(w,z)}$$

in D^4 ungleich Null, unbeschränkt regulär fortsetzbar und es gälte

$$\underset{w}{G}(w,z) \to z \cdot G(w,z),$$
$$\underset{z}{G}(w,z) \to G(w,z).$$

Wir benötigen jetzt den leicht beweisbaren

Hilfssatz: *Eine in D^4 unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion $\Phi(w,z)$ mit den Eigenschaften*

$$\underset{w}{\Phi}(w,z) \to z^{\nu} \cdot \Phi(w,z), \quad \nu \neq 0 \text{ und ganz},$$
$$\underset{z}{\Phi}(w,z) \to \Phi(w,z)$$

besitzt in D^4 Nullstellen.

Hiernach müßte auch $G(w, z)$ in D^4 Nullstellen haben, das ist aber, wie eben bemerkt, ausgeschlossen. Damit ist die Behauptung nachgewiesen.

Funktionen mit den Eigenschaften wie die im Hilfssatz betrachteten spielen für unser Problem eine wesentliche Rolle. Es läßt sich zeigen, daß jedes in D^4 vorgegebene Cousinsche Problem durch eine Funktion dieses Typus lösbar ist, und zwar gilt:

Satz 2: *In D^4 sei eine Cousinsche Verteilung V gegeben. Dann gibt es eine in D^4 unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion $F(w, z)$, die genau auf den durch V bestimmten analytischen Flächen in der richtigen Ordnung verschwindet und die außerdem folgende Eigenschaften hat:*

$$\underset{w}{F}(w,z) \to z^{\nu} \cdot F(w,z), \quad \nu \textit{ ganz}, \quad \underset{z}{F}(w,z) \to F(w,z).$$

Zum Beweise schneide man die w-Projektion von D^4 längs der positiv reellen Achse auf. In dem so entstehenden Bereich $\tilde{D}^4$ läßt sich nach Gronwall das vorgegebene Cousinsche Problem lösen, und zwar kann die Lösungsfunktion $G(w, z)$ so gewählt werden, daß sie bei Fortsetzung in die von Null verschiedenen Punkte der reellen w-Achse noch regulär bleibt. Aus $G(w, z)$ läßt sich sodann mittels einer dem Cousinschen Verfahren nachgebildeten Methode eine in D^4 reguläre Lösungsfunktion der gesuchten Art konstruieren.

Der in Satz 3 auftretende Exponent ν ist auf Grund des oben angegebenen Hilfssatzes eindeutig bestimmt. Wir behaupten, daß ν gleich der Schnittzahl der durch V bestimmten Flächenmenge M^2 mit dem topologischen Produkt der beiden positiv durchlaufenen Einheitskreise K^1_w und K^2_z der w- und z-Ebene ist. Da $K^1_w \times K^1_z = B^2$ als Homologiebasis in D^4 genommen werden kann, so ist also ν nichts anderes als die zu dieser Basis gehörige (einzige) charakteristische Zahl von V. Unsere Behauptung folgt aus

Satz 4: *Sei $F(w, z)$ eine in D^4 unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion mit den Eigenschaften*

$$\underset{w}{F}\,(w, z) \to z^{\nu} \cdot F(w, z),\ \nu \text{ ganz}, \quad \underset{z}{F}\,(w, z) \to F(w, z).$$

Mit M^2 sei die Menge der orientierten, in richtiger Ordnung genommenen Nullstellenflächen von F bezeichnet. Dann ist

$$\nu = S(K^1_w \times K^1_z, M^2).$$

Um dies zu zeigen, überlege man zunächst, daß

$$S(K^1_w \times K^1_z, \mathfrak{F}^2) = +1$$

ist, dabei ist $\mathfrak{F}^2$ die oben betrachtete Fläche $z = w^i$ (die zugeordnete Nullstellenfunktion war mit $H[w, z]$ bezeichnet). Ist weiter $\tilde{\mathfrak{F}}^2$ die Fläche $z = w^{-i}$, so gilt entsprechend

$$S(K^1_w \times K^1_z, \tilde{\mathfrak{F}}^2) = -1;$$

eine zugeordnete Nullstellenfunktion ist

$$\tilde{H}(w, z) = H\left(\tfrac{1}{w}, z\right).$$

Wäre nun $\mu = S(K^1_w \times K^1_z, M^2) \neq \nu$, so bilde man

$$F^* = H^{-\nu} \cdot F, \quad \text{falls } \nu \leqq 0, \text{ und}$$
$$F^{**} = \tilde{H}^{\nu} \cdot F, \quad \text{falls } \nu > 0.$$

F^* bzw. F^{**} ist in D^4 eindeutig, ferner ist die Schnittzahl von

$K^1_w \times K^1_z$ mit der Nullstellenmannigfaltigkeit von F^* bzw. F^{**} gleich $\mu - \nu$. Nach Satz 1 muß aber $\mu - \nu = 0$, also $\mu = \nu$ sein.

Damit haben wir einen Überblick über die in D^4 möglichen Typen von Cousinschen Verteilungen gewonnen. Die in D^4 geltenden Sätze lassen sich nun auf allgemeine Zylinderbereiche übertragen. Es gilt:

Satz 5: *Es sei Z^4 ein Zylinderbereich im R^4, ferner Z^2_z seine z- und Z^2_w seine w-Projektion. In Z^4 sei eine Cousinsche Verteilung V von Ortsfunktionen vorgegeben. Dann gibt es eine in Z^4 unbeschränkt regulär fortsetzbare Funktion $F(w, z)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$F(w, z)$ verschwindet genau auf der durch V bestimmten Nullstellenmannigfaltigkeit M^2 in der richtigen Ordnung,*
2. *bei festem w und variablem z bleibt $F(w, z)$ eindeutig,*
3. *wird z festgehalten und durchläuft w eine orientierte geschlossene Kurve K^1_w in Z^2_w, so erhält F einen nur von z und der Homologieklasse von K^1_w abhängenden Faktor $f(z)$, dabei ist $f(z)$ in Z^2_z regulär, symbolisch:*

$$F(w, z) \underset{K^1_w}{\rightarrow} f(z) \cdot F(w, z).$$

Sei weiter K^1_z eine orientierte geschlossene Kurve in Z^2_z und $\tilde{K}^1_z$ das durch die Abbildung $\tau = f(z)$ erzeugte Bild von K^1_z in der τ-Ebene. Dann ist

$$S(K^1_w \times K^1_z, M^2) = \mathfrak{V}(\tilde{K}^1_z, 0),$$

dabei bedeutet $\mathfrak{V}(\tilde{K}^1_z, 0)$ die Verschlingungszahl von $\tilde{K}^1_z$ mit dem Nullpunkt der τ-Ebene.

Der Beweis stützt sich auf Verallgemeinerungen der zum Nachweis der Sätze 3 und 4 benutzten Methoden.

Lassen sich also nur zu sehr speziellen Cousinschen Verteilungen eindeutige Lösungsfunktionen finden, so kann man doch jede Verteilung V zu einer zweiten V' ergänzen, die eine eindeutige Lösung besitzt. Dies folgt aus

Satz 6: *Sei Z^4 ein Zylinderbereich im R^4, ferner $B^2_1, \ldots, B^2_n, \ldots$ eine zweidimensionale Homologiebasis in Z^4 und $a_1, \ldots, a_n, \ldots$*

eine beliebige Folge ganzer Zahlen. Dann gibt es in Z^4 eine Cousinsche Verteilung V, so daß für die durch V bestimmte Nullstellenmannigfaltigkeit M^2 gilt

$$S(B_\nu^2, M_\nu^2) = a_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

Unter speziellen Voraussetzungen über Z^4 kann man V so wählen, daß M^2 lediglich aus Stücken von Nullstellenflächen ganzer rationaler Funktionen besteht.

Aus Satz 6 folgt in einfacher Weise:

Satz 7: *Jede in einem Zylinderbereich Z^4 meromorphe Funktion läßt sich dort als Quotient von in Z^4 regulären, allerdings nicht notwendig teilerfremden Funktionen darstellen.*

§ 3.

Nichtrungesche Regularitätsbereiche.

Wir nennen einen Bereich B^4 im R^4 rungesch, wenn sich jede dort reguläre Funktion $f(w, z)$ durch eine Folge $R_n(w, z)$ von rationalen Funktionen gleichmäßig im Innern von B^4 approximieren läßt. Dabei kann diese Approximation in zweierlei Sinn gemeint sein. Entweder verlangt man von den $R_n(w, z)$, daß sie in ganz B^4 regulär sind, oder man läßt noch zu, daß sie in B^4 Polstellen haben (die dann allerdings mit wachsendem n gegen den Rand von B^4 gehen müssen).

Als Beispiele nichtrungescher Bereiche sind seit längerem die Bereiche mit nichtschlichter Regularitätshülle bekannt. In ihnen gibt es Funktionen, die weder im einen noch im anderen Sinne durch rationale Funktionen approximiert werden können. Auch Regularitätsbereiche, in denen eine Approximation im ersten Sinne nicht immer möglich ist, sind leicht angebbar. Man erhält sie z. B., wenn man aus einem Regularitätsbereich eine analytische Fläche herausnimmt, die nicht Nullstellenmannigfaltigkeit einer rationalen Funktion ist. Offen war dagegen bisher die Frage, ob Regularitätsbereiche existieren, die im zweiten (schärferen) Sinne nichtrungesch sind. Unsere Überlegungen setzen uns in den Stand, auch hierfür Beispiele zu konstruieren. Es gilt

Satz 8: *Es sei* B^4 *ein Regularitätsbereich und* K^2 *eine geschlossene zweidimensionale singuläre Kette in* B^4. *Ferner sei* $\mathfrak{F}^2$ *eine analytische Fläche in* B^4, *derart, daß* $S\ (K^2, \mathfrak{F}^2) \neq 0$ *ist und die Schnittzahlen in den einzelnen Schnittpunkten von* K^2 *und* $\mathfrak{F}^2$, *aus denen sich die algebraische Summe* $S\ (K^2, \mathfrak{F}^2)$ *zusammensetzt, sämtlich dasselbe Vorzeichen haben. Entfernt man* $\mathfrak{F}^2$ *aus* B^4, *so ist der Restbereich ein nichtrungescher Regularitätsbereich im schärferen Sinne.*

Ein konkretes Beispiel erhält man, wenn man aus dem Bereich D^4 in § 2 die Fläche $\mathfrak{F}^2$: $z = w^i$ herausnimmt. Der entstehende Bereich D^{4*} ist durch folgende Bedingungen festgelegt:

$$D^{4*} : (0 < |w| < \infty;\ 0 < |z| < \infty;\ z \neq w^i).$$

Eine nicht in D^{4*} rational approximierbare Funktion ist z. B.

$$G\ (w, z) = \frac{H\ (e^{\pi i}\, w, z)}{H\ (w, z)},$$

dabei ist $H\ (w, z)$ die zu $\mathfrak{F}^2$ gehörige, in § 2 konstruierte Nullstellenfunktion.