Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1938. Heft I
Januar-April-Sitzung

München 1938
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Eine Konstruktion am regelmäßigen $2n$-Eck.[1]

Von Dr. O. Nehring in Bitterfeld.

Vorgelegt von Herrn O. Perron in der Sitzung vom 15. Januar 1938.

Man verbinde in der Ebene eines regelmäßigen $2n$-Ecks einen beliebigen Punkt S mit dem Punkte A_i und trage in A_i an SA_i einen willkürlichen, aber beizubehaltenden Winkel β an. Dieselbe Konstruktion führe man am Punkte A_{i+1} unter Beachtung der Beibehaltung des Drehsinns für den angetragenen Winkel β aus. Den Schnittpunkt der freien Schenkel der beiden Winkel nenne man A'_i. Dann gelten in der für alle Punkte ausgeführten Konstruktionsfigur die folgenden Beziehungen:

1. Satz: Je zwei aufeinander folgende Geraden $A'_i\, A'_{i+n}$ $(i=1, 2 \ldots n)$ schneiden sich unter dem konstanten Winkel $\alpha = \frac{360^0}{2n}$.[2]

Beweis: Es seien die Punkte A_i des $2n$-Ecks festgelegt durch die Koordinatenzuordnung $A_i\,(x_i, y_i)$, $i = 1, 2 \ldots 2n$, und durch

$$A_{2n+1} = A_1,\; x_i^2 + y_i^2 = a^2,\; x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i = \Delta = \text{const.}$$

Ferner mögen für die weitere Rechnung folgende Abkürzungen gelten:

$$x_i - x_{i+1} = \mathfrak{x}_i,\quad y_i - y_{i+1} = \mathfrak{y}_i,\quad x^2 + y^2 - a^2 = k \text{ und}$$
$$(y_i - y_{i+1}) : (x_i - x_{i+1}) = m_i.$$

---

[1] Vgl. auch die unmittelbar anschließende Note des Herrn Perron.

[2] Mit diesem Satz ist gleichzeitig die Lösung der Aufg. 1326 der Ztschr. f. math. u. naturw. Unterricht gegeben. Diese Aufg. macht die Aussage für ein Rechteck bei Verwendung von rechten Winkeln für die Konstruktion in den Punkten A_i, ist also spezieller als die vorliegende Ausführung.

Die beliebige Gerade durch A_i sei gegeben durch

$$[\xi(x-x_i)+\eta(y-y_i)-xx_i-yy_i+a^2]$$
$$-\lambda[\xi(y-y_i)-\eta(x-x_i)+xy_i-yx_i]=0,$$

wobei ξ, η die laufenden Koordinaten, x, y die Koordinaten des Punktes S bedeuten und $\lambda = \operatorname{ctg}\beta$ ist.

Bringen wir die Gerade durch A_i zum Schnitt mit der durch A_{i+1}, so erhalten wir als die Koordinaten des Schnittpunktes

1. $\xi_{A_i'} = (A\bar{y}_i + B\bar{x}_i + C\Delta):N$ und $\eta_{A_i'} = \overline{A}\bar{y}_i + \overline{B}\bar{x}_i + \overline{C}\Delta):N.$

Dabei sind

$$A = -x^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 x^2 + k,\ B = \lambda k + xy - 2\lambda y^2 - \lambda^2 xy,$$
$$C = -x + 2\lambda y + \lambda^2 x,\ \overline{A} = \lambda k - xy - 2x^2\lambda + \lambda^2 xy,$$
$$\overline{B} = y^2 + 2\lambda xy - \lambda^2 y^2 - k,\ \overline{C} = -y - 2\lambda x + \lambda^2 y$$
$$\text{und } N = (1+\lambda^2)(x\bar{y}_i - y\bar{x}_i + \Delta).$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\bar{x}_i = -\bar{x}_{n+i},\quad \bar{y}_i = -\bar{y}_{n+i}$$

finden wir mit der Bezeichnung

$$M_i = (\eta_{A_i'} - \eta_{A_{n+i}'}):(\xi_{A_i'} - \xi_{A_{n+i}'})$$

das Ergebnis $\qquad M_i = (\lambda m_i - 1):(m_i + \lambda).$

Wir berechnen noch den Winkel, den zwei aufeinanderfolgende Geraden bilden, und erhalten

$$(M_i - M_{i+1}):(1 + M_i M_{i+1}) = (m_i - m_{i+1}):(1 + m_i m_{i+1}) = \operatorname{tg}\alpha$$

und damit die Bestätigung des ersten Satzes.

2. Satz: Die Geraden $A_i'A_{n+i}'$ schneiden sich im Punkte P, und dieser beschreibt bei einer kontinuierlichen Veränderung von λ einen Kreis mit dem Radius $r = \sqrt{x^2+y^2}$ um den Mittelpunkt des zum $2n$-Eck gehörigen Umkreises.

Beweis: Mit den Koordinaten des Punktes A_i' und der Richtung M_i der Geraden $A_i' A_{n+i}'$ erhalten wir ihre Gleichung

$$\xi(\lambda \bar{y}_i - \bar{x}_i) - \eta(\lambda \bar{x}_i + \bar{y}_i) = x(\lambda \bar{y}_i + \bar{x}_i) + y(\lambda \bar{x}_i - \bar{y}_i) = 0.$$

Unter Heranziehung der analogen Gleichung für $A_{i+1}' A_{n+i+1}'$ finden wir für P die Koordinaten

2. $$\xi_P = [x(\lambda^2 - 1) + 2\lambda y] : (1 + \lambda^2)$$

und $$\eta_P = [-2\lambda x + (\lambda^2 - 1)y] : (1 + \lambda^2).$$

ξ_P und η_P sind unabhängig von den Koordinaten der Punkte A_i, d. h. die Geraden $A_i' A_{n+i}'$ schneiden sich in einem Punkte.

Eliminieren wir aus 2. den Parameter λ, so finden wir die Gleichung

$$\xi_P^2 + \eta_P^2 = x^2 + y^2.$$

Hiermit ist der zweite Satz vollständig bewiesen.

3. Satz: Die Punkte A_i' liegen auf einem Kegelschnitt.

Beweis: Es mögen folgende Bezeichnungen gelten:

$$\bar{y}_i^2 + \bar{x}_i^2 = s^2 = \text{const und } \Delta : s = h.$$

Aus den Koordinaten von A_i' und P finden wir

$$\xi_{A_i'} - \xi_P = k(\bar{y}_i + \lambda \bar{x}_i) : \overline{N} \text{ und } \eta_{A_i'} - \eta_P = k(\lambda \bar{y}_i - \bar{x}_i) : \overline{N},$$

wobei ist

$$\overline{N} = (1 + \lambda^2)(x\bar{y}_i - y\bar{x}_i + \Delta).$$

Daraus ergibt sich für $R = A_i P$

$$R = sk : \overline{N}.$$

Setzen wir $\bar{y}_i : s = \sin\varphi$, $\bar{x}_i : s = \cos\varphi$, worin φ den Winkel bedeutet, den die Gerade $A_i A_{n+i}$ mit der positiven x-Achse bildet, so erhalten wir

$$R = \frac{K}{(1 + \lambda^2)(h + x\sin\varphi - y\cos\varphi)}.$$

Führen wir nun weiterhin ein

$$x \cdot \sin \varphi - y \cdot \cos \varphi = r \cdot \sin (\varphi - \varepsilon) \text{ und } r : h = q,$$

so bekommen wir

$$3. \qquad R = \frac{K}{h (1 + \lambda^2) (1 + q \sin (\varphi - \varepsilon))},$$

wobei $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{y}{x}$ ist. Damit haben wir auch den dritten Satz bewiesen.

4. Satz: Die Schnittpunkte $Q_i = A'_i \, A'_{i+1} \times A'_{n+i} A'_{n+i+1}$ liegen auf einer Geraden, deren Neigung gegen die große Achse des Kegelschnittes allein von λ abhängt, ihr Abstand von dem Brennpunkte P des Kegelschnittes zusätzlich von dem Quotienten $k : r$.

Beweis: Nach der Konstruktionsbeschreibung ist $A'_i \, A'_{i+1}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} &[\xi (x - x_{i+1}) - \eta (y - y_{i+1}) - x x_{i+1} - y y_{i+1} + a^2] \\ &- \lambda [\xi (y - y_{i+1}) - \eta (x - x_{i+1}) + x y_{i+1} - y x_{i+1}] = 0. \end{aligned}$$

In Verbindung mit der analogen Gleichung für $A'_{n+i} \, A'_{n+i+1}$ finden wir

$$\begin{aligned} \xi_{Qi} &= [(- y_{i+1} k - x \Delta_{Si+1}) + \lambda (- x_{i+1} k + 2 y \Delta_{Si+1}) + \lambda^2 x \Delta_{Si+1}] \\ &\qquad : N_{i+1} \text{ und} \\ \eta_{Qi} &= [(x_{i+1} k - y \Delta_{Si+1}) - \lambda (y_{i+1} k + 2 x \Delta_{Si+1}) + \lambda^2 y \Delta_{Si+1}] : N_{i+1}, \end{aligned}$$

wobei N_{i+1} und Δ_{Si+1} definiert sind durch

$$N_{i+1} = (1 + \lambda^2) \Delta_{Si+1} \text{ und } \Delta_{Si+1} = y x_{i+1} - x y_{i+1}.$$

Es läßt sich leicht übersehen, daß die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} \xi_{Qi} & \eta_{Qi} & 1 \\ \xi_{Qi+1} & \eta_{Qi+1} & 1 \\ \xi_{Qi+2} & \eta_{Qi+2} & 1 \end{vmatrix}$$

die Form annimmt

$$D = \begin{vmatrix} y_{i+1} - \lambda x_{i+1} & x_{i+1} - \lambda y_{i+1} & \Delta_{Si+1} \\ y_{i+2} - y x_{i+2} & x_{i+2} - x y_{i+2} & \Delta_{Si+2} \\ y_{i+3} - x\lambda_{i+3} & x_{i+3} - \lambda y_{i+3} & \Delta_{Si_{+3}} \end{vmatrix}$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß diese Determinante verschwindet, und damit ist der erste Teil des 4. Satzes bewiesen.

Für den weiteren Beweis bilden wir die Ausdrücke $\eta_{Qi} - \eta_{Qi+1}$, $\xi_{Qi} - \xi_{Qi+1}$ und erhalten

$$\begin{aligned} \eta_{Qi} - \eta_{Qi+1} = \{k\,[(x_{i+1}\,\Delta_{Si+2} - x_{i+2}\,\Delta_{Si+1}) \\ - \lambda\,(y_{i+1}\,\Delta_{Si+2} - y_{i+2}\,\Delta_{Si+1})]\} : \overline{N}_{i+1} \text{ und} \\ \xi_{Qi} - \xi_{Qi+1} = \{k\,[(-y_{i+1}\,\Delta_{Si+2} + y_{i+2}\,\Delta_{Si+1}) \\ - \lambda\,(x_{i+1}\,\Delta_{Si+1} - y_{i+2}\,\Delta_{Si+1})]\} : \overline{N}_{i+1}, \end{aligned}$$

dabei ist $\overline{N}_{i+1}$ gegeben durch

$$\overline{N}_{i+1} = (1 + \lambda^2)\,\Delta_{Si+1}\,\Delta_{Si+2}.$$

Nach einer kurzen Umformung finden wir dann

$$(\eta_{Qi} - \eta_{Qi+1}) : (\xi_{Qi} - \xi_{Qi+1}) = -\frac{x - \lambda y}{y + \lambda x}.$$

Da nun die Richtung der großen Achse des Kegelschnittes bestimmt war durch $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{y}{x}$, so erhalten wir

4. $$\operatorname{tg} \chi = -\frac{1}{\lambda},$$

wobei χ den Neigungswinkel der Geraden $Q_i\,Q_{i+1}$ gegen die große Achse bedeutet. So ist auch der zweite Teil des 4. Satzes bewiesen.

Mit Hilfe von 4. und den errechneten Koordinaten Q_i läßt sich die Gleichung der Geraden $Q_i\,Q_{i+1}$ nach kurzer Umformung aufstellen. Man findet

5. $$\xi\,(x - \lambda y) + \eta\,(y + \lambda x) + a^2 = 0.$$

Bringt man diese Gleichung auf die Hessesche Normalform und setzt die Koordinaten des Brennpunktes P des Kegelschnittes ein, so liefert dies:

$$6. \qquad p = \frac{K}{r\sqrt{1+\lambda^2}}$$

Das ist aber der dritte Teil des vierten Satzes.

Es sei noch zusätzlich bemerkt, daß sich der Neigungswinkel φ_1 der Geraden PM gegen die Gerade MS ergibt aus

$$7. \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = 2\lambda : (\lambda^2 - 1).$$

Dabei bedeutet M den Mittelpunkt des zum $2n$-Eck gehörigen Umkreises. Jetzt können wir aus den bisherigen Sätzen und ihren Beweisen eine interessante Folgerung ziehen:

5. Satz: Jedem Kegelschnitte ist eine zweifach unendliche Zahl von Kreisen zugeordnet, aus denen er sich nach dem angegebenen Konstruktionsverfahren ableiten läßt.

Beweis: Durch die Vorgabe des Kegelschnittes sind uns laut 3. bekannt

$$m = \frac{K}{h(1+\lambda^2)} \quad \text{und} \quad q = r:h.$$

Daraus ergibt sich die Gleichung

$$8. \qquad r^2 - a^2 = m(1+\lambda^2)\, r:q,$$

in der also nur m und q bekannt sind. Damit ist auch der letzte Satz bewiesen.

Bemerkung: Die Gerade $Q_i\, Q_{i+1}$ darf 1. durch ihre Neigung zur Achse des Kegelschnittes oder 2. durch den Abstand des Brennpunktes von ihr gegeben sein. Im ersten Falle ist λ durch die Formel 5. bekannt, im zweiten Falle läßt sich aus 6. und 8. der Wert von λ errechnen. Gemeinsam dürfen Abstand und Neigung nicht gegeben sein.

Bemerkung zur vorstehenden Arbeit des Herrn Nehring.

Von Oskar Perron.

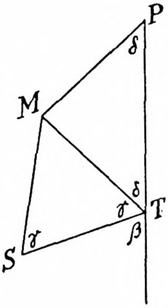
Vorgelegt in der Sitzung vom 15. Januar 1938.

Die ersten beiden Sätze gehören der Elementarmathematik an und fordern dazu heraus, den analytischen viele Zwischenrechnungen dem Leser überlassenden Beweis durch einen elementargeometrischen zu ersetzen. Hier ist er:

Der Umkreis des $2n$-Ecks sei k: der Winkel β werde an $\overrightarrow{A_i S}$ etwa nach links angetragen. Die Punkte S, A_i, A_{i+1}, A'_i liegen nach dem Satz vom Peripheriewinkel auf einem Kreis k_i. Die Kreise k_i und k_{i+n} schneiden sich außer in S noch in einem zweiten Punkt T. Da die drei Kreise k, k_i, k_{i+n} zwei parallele Chordalen $A_i\, A_{i+1}$ und $A_{i+n}\, A_{i+n+1}$ (als gegenüberliegende Seiten des $2n$-Ecks) haben, ist auch die dritte Chordale ST parallel zu $A_i\, A_{i+1}$. Der Satz vom Peripheriewinkel, angewandt auf den Kreis k_i bzw. k_{i+n}, lehrt, daß die Gerade TA'_i bzw. TA'_{i+n} entsteht, indem man an $\overrightarrow{TS}$ nach links den Winkel β anträgt. Das heißt, daß die Gerade TA'_i mit TA'_{i+n}, also auch mit $A'_i\, A'_{i+n}$ identisch ist und daß diese Gerade $A'_i\, A'_{i+n}$ mit TS, also mit $A_i\, A_{i+1}$ den festen Winkel β bildet. Da sich zwei aufeinanderfolgende $2n$-Eckseiten $A_i\, A_{i+1}$ und $A_{i+1}\, A_{i+2}$ unter dem Winkel $\dfrac{360^0}{2n}$ schneiden, so folgt daraus sofort Satz 1.

Die Mittelpunkte der drei Kreise k, k_i, k_{i+n} liegen auf einer Geraden, die senkrecht zu den drei parallelen Chordalen steht. Die Punkte T und S liegen spiegelbildlich in bezug auf diese Gerade. Daher ist, wenn der Mittelpunkt von k mit M bezeichnet wird, $MT = MS$. Auf der Geraden $A'_i\, A'_{i+n}$ gibt es dann außer T noch einen zweiten Punkt P so, daß auch $MP = MT = MS$ ist. Aus dem Viereck $STPM$ (das sich auch überschlagen kann) folgt dann, daß der Winkel SMP gleich $360^0 - 2\gamma - 2\delta$

$= 2\,[180^0 - (\gamma + \delta)] = 2\beta$ ist (vgl. die Figur); und zwar entsteht $\overrightarrow{MP}$ in allen Fällen (auch wenn sich das Viereck überschlägt oder wenn 2β größer als 180^0 ist), indem man an $\overrightarrow{MS}$ nach links den Winkel 2β anträgt und $MP = MS$ macht. Der Punkt P ist also unabhängig vom Index i, so daß alle n Geraden $A'_i\,A'_{i+n}$ durch



ihn hindurchgehen. Zugleich sieht man, daß, wenn β von 0^0 bis 360^0 wächst, der Punkt P einen Kreis mit dem Mittelpunkt M von S an links herum genau zweimal durchläuft. Das ist der Inhalt von Satz 2 und noch etwas mehr.