Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1912. Heft III
November- und Dezembersitzung

München 1912
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Berührungstransformationen der geodätischen Linien.

Von Heinrich Liebmann.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 7. Dezember 1912.

Die vorliegende Arbeit behandelt eine Reihe von Berührungstransformationen, zu deren Untersuchung der Verfasser durch die weiter unten genannten Arbeiten von Blaschke angeregt worden ist, der seinerseits an Study anknüpft.

In § 1 werden umfangstreue Berührungstransformationen auf beliebigen Flächen in Zusammenhang gebracht mit den flächentreuen Punkttransformationen und den Berührungstransformationen der Optik.

§ 2 und 3 befassen sich im besonderen mit der nichteuklidischen Geometrie, und zwar mit der Abbildung der Speere der hyperbolischen Ebene auf die Punkte eines Zylinders, d. h. der aus lauter auf einer Ebene senkrecht stehenden Geraden gebildeten Fläche, welche diese Grundebene in den Punkten eines Kreises schneiden (§ 2) und einer besonders einfachen äquilongen Speertransformation, welche Zyklen in Zyklen überführt und einer vom Verfasser früher untersuchten Kreisverwandtschaft genau entspricht (§ 3).

§ 1. *Umfangstreue Berührungstransformationen.*

Nach einem von Herrn W. Blaschke angegebenen Verfahren[1]) können die umfangstreuen Berührungstransformationen der euklidischen Ebene den flächentreuen Punkttransformationen auf dem euklidischen Kreiszylinder zugeordnet werden.

[1]) Über einige unendliche Gruppen von orientierten Berührungstransformationen in der Ebene. Math. Ann. 69 (1909), S. 204—217.

Zu diesem Zweck muß jede Kurve durch ihre „magische Gleichung" dargestellt werden, d. h. durch die Gleichung zwischen den Polarkoordinaten p und φ, welche die Fußpunktkurve (F) der Kurve darstellt, den Ort der Fußpunkte der vom Koordinatenanfang O auf die Tangenten gefällten Lote. Dabei sind die Tangenten zu „orientieren", d. h. mit einem Durchlaufungssinn zu versehen, und es unterscheiden sich zwei entgegengesetzt orientierte zusammenfallende Gerade dadurch, daß p in $-p$ und φ in $\varphi + \pi$ übergeht.

Durch Einführung dieser orientierten Linienkoordinaten (oder Speerkoordinaten) ergibt sich eine Zerlegung des Bogenelementes der umhüllten Kurve in

$$ds = (p + p'')\,d\varphi = p\,d\varphi + dp',$$

und da für eine geschlossene Kurve (K)

$$\int\limits_K ds = \int\limits_K p\,d\varphi + \int\limits_K dp' = \int\limits_K p\,d\varphi$$

ist, so kann der Umfang jeder geschlossenen Kurve durch die Abbildung der Speere (p, φ) auf die Punkte des Zylinders

$$\xi^2 + \eta^2 = 1$$

sofort als Flächeninhalt gedeutet werden, wobei die Abbildung hergestellt wird durch die Gleichungen

$$\xi = \cos\varphi, \quad \eta = \sin\varphi, \quad \zeta = p.$$

Blaschke weist nach[1]), daß jede Berührungstransformation, welche „im weiteren Sinne umfangstreu" ist, d. h. jede Kurve K^0, deren Umlaufszahl λ, definiert durch das längs der geschlossenen Kurve zu erstreckende Integral

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\int d\varphi$$

den Wert Null hat, notwendig eine Transformation der Speere (p, φ) sein muß. Dies gilt dann a fortiori auch für die im engeren Sinne umfangstreuen Berührungstransformationen.

---

[1]) A. a. O., S. 214.

welche den Umfang jeder geschlossenen Kurve ungeändert lassen. Außerdem ist der Beweis auf jede Fläche übertragbar, da er nur von der Eigenschaft der Geraden Gebrauch macht, kürzeste Linie zu sein; d. h. es gilt der Satz:

Jede umfangstreue Berührungstransformation auf einer Fläche muß eine Transformation der (orientierten) geodätischen Linien sein.

Dies vorausgesetzt, stellen wir die naheliegende Frage:

Können jeder Fläche andere Flächen zugeordnet werden, derart, daß den (im weiteren Sinne) umfangstreuen Berührungstransformationen der ersten Fläche flächentreue Punkttransformationen der zugeordneten Flächen entsprechen?

Die Berührungstransformationen müssen jedenfalls Transformationen der geodätischen Linien sein, und es wird sich wieder darum handeln, die zweifach unendlich vielen geodätischen Linien auf die Punkte der zugeordneten Fläche (wie z. B. oben des geraden Kreiszylinders) abzubilden.

Um eine geeignete Darstellung des Bogenelementes zu finden, führen wir auf der gegebenen Fläche geodätische Polarkoordinaten (p, φ) ein, in denen das Bogenelement gegeben ist durch

$$ds^2 = dp^2 + f^2(p, \varphi)\, d\varphi^2$$

und diese Koordinaten verwenden wir als Koordinaten der (orientierten) geodätischen Tangenten der Kurven, dem Gedankengang von Blaschke folgend: Ist $OF(OF_1)$ das von O auf die geodätische Tangente der umhüllten Kurve im Punkte $P(P_1)$ gefällte geodätische Lot, und bezeichnet man die Abschnitte vom Fußpunkt bis zum Berührungspunkt mit

$$q = FP, \quad q_1 = q + dq = F_1 P_1,$$

trägt man endlich von F_1 aus auf der benachbarten Tangente noch die Strecke q ab,

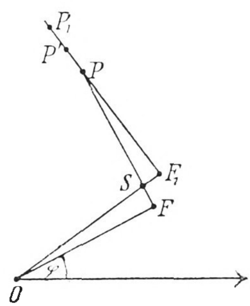

Fig. 1.

$$F_1P' = q,$$

so ergibt sich für das Bogenelement PP_1 der umhüllten Kurve:

$$ds = PP_1 = PP' + P'P_1 = PP' + dq.$$

Ist ferner S der Schnittpunkt von OF_1 mit FP, so ist nach dem bekannten Satz von Gauß, demzufolge die Orthogonaltrajektorien der von einem Punkt (P) ausgehenden geodätischen Linien auf ihnen gleiche Stücke abschneiden, PS gleich PF_1, und demnach

$$PP' = q - F_1P = q - SP = FP - SP = FS = f(p, \varphi)\,d\varphi,$$

also

1) $$ds = dq + f(p, \varphi)\,d\varphi.$$

Damit ist die für das Folgende maßgebende lineare Zerlegung des Bogenelementes — die Abspaltung eines vollständigen Differentials dq bewiesen.

Man kann diese wichtige Zerlegung auch als Spezialfall allgemeinerer Untersuchungen und ohne von dem Gaußschen Satze Gebrauch zu machen, in sehr einfacher Weise zeigen[1]): Ist eine Maßbestimmung gegeben mit dem Bogenelement

$$ds = \omega(x, y, y')\,dx,$$

so wird der Unterschied (PP') zweier von den Linienelementen x, y, y' und $x + dx,\ y + dy,\ y' + dy'$ ausgehenden geodätischen Linien bis zum Schnittpunkt

$$\omega(x, y, y')\,dx + (dy - y'\,dx)\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y'}.$$

In unserem Fall ist zu setzen

$$x = \varphi,\quad y = p,\quad \omega(x, y, y') = \sqrt{(p')^2 + f^2(p, \varphi)},$$

außerdem aber, weil die geodätische Linie FP auf OF senkrecht steht,

[1]) Vgl. F. Engel, Über Kurvenscharen, die zu einem gegebenen Differentialausdruck kovariant sind (D. M. V. XIX, 1910, S. 112—120). Ich verdanke den hier wiedergegebenen Beweis einer brieflichen Mitteilung des Verfassers.

$$p' = 0,$$

und hieraus folgt wieder:

$$PP' = \sqrt{(p')^2 + f^2} \cdot d\varphi + \frac{p'}{\sqrt{(p')^2+f^2}}(dp - p'd\varphi) = f(p, \varphi)\, d\varphi.$$

Wir fahren jetzt in der allgemeinen Betrachtung fort. Für jede geschlossene Kurve K ist der Umfang

$$\int_K ds = \int_K dq + \int_K f(p, \varphi)\, d\varphi.$$

Das erste Integral ist gleich Null. Das zweite aber läßt sich schreiben:

$$\int_K f(p, \varphi)\, d\varphi = \int d\varphi \int_0^p \frac{\partial f(p, \varphi)}{\partial p}\, dp,$$

kann also auf jeder Fläche mit dem Bogenelement

$$ds_1^2 = e_1\, dp^2 + 2 f_1\, dp\, d\varphi + g_1\, d\varphi^2$$

als Flächeninhalt gedeutet werden, sobald die Beziehung besteht:

$$\sqrt{e_1 g_1 - f_1^2} = \frac{\partial f}{\partial p}. \tag{2}$$

Dabei müssen natürlich für e_1, f_1 und g_1 Funktionen von p und φ gewählt werden, die in φ periodisch sind mit der Periode 2π, und diese Periodizität muß auch den rechtwinkligen Koordinaten

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(p, \varphi), \\ \eta &= \eta(p, \varphi), \\ \zeta &= \zeta(p, \varphi) \end{aligned} \tag{3}$$

der Fläche auferlegt werden, welche der zugeordneten Klasse angehört. Dann aber folgt der Satz:

Jede flächentreue Punkttransformation

$$\begin{aligned} p_1 &= P(p, \varphi) \\ \varphi_1 &= \Phi(p, \varphi) \end{aligned} \tag{4}$$

auf einer der durch die Forderungen 2 und 3 definierten Fläche (F) ergibt eine (im weiteren Sinne) umfangstreue Berührungstransformation auf der ersten Fläche und umgekehrt.

(Verlangt man, daß die Berührungstransformation auch im engeren Sinne, d h. für geschlossene Kurven mit von Null verschiedener Umlaufszahl umfangstreu wird, so entspricht ihr nicht notwendig eine flächentreue Punkttransformation, es muß vielmehr die nur im weiteren Sinne umfangstreue Berührungstransformation erst noch durch eine Dilatation[1]) korrigiert werden, welche bewirkt, daß dem Punkt O bei der Aufeinanderfolge beider Transformationen eine Kurve mit dem Gesamtumfang Null entspricht.)

Syntaktische (optische) Berührungstransformationen. In den Untersuchungen Blaschkes bilden „syntaktische“ Berührungstransformationen den Ausgangspunkt, d. h. solche orientierte Berührungstransformationen, bei denen syntaktische Paare von Linienelementen — Paare gleich orientierter Elemente mit gemeinsamer Normale — in eben solche Paare übergehen, also jede Schar von Parallelkurven in eine eben solche Schar. Diese Transformationen sind mit den Berührungstransformationen der Optik identisch.

Wir wollen jetzt nachweisen, daß der von Blaschke[2]) entwickelte Zusammenhang zwischen umfangstreuen (genauer gesagt, die Umfänge mit einem konstanten Faktor multiplizierenden) Berührungstransformationen und syntaktischen Transformationen keineswegs auf die euklidische Ebene beschränkt ist, eine Beziehung, deren allgemeine Gültigkeit doch noch einer besonderen Begründung bedarf.

Wir nennen zwei gleich orientierte Elemente syntaktisch, wenn die kürzeste Verbindungslinie ihrer Punkte auf allen beiden senkrecht steht. Eine syntaktische Berührungstransformation soll jedes syntaktische Paar in ein syntaktisches Paar

[1]) Vgl. Blaschke, a. a. O., S. 211.
[2]) A. a. O., S. 208.

überführen, also jedes System von Orthogonaltrakjetorien geodätischer Linien wieder in ein solches System. Ein Paar solcher geodätischer Parallelkurven wollen wir als **geodätischen Parallelstreifen** bezeichnen, und **Breite** q dieses Parallelstreifens möge der konstante Abschnitt heißen, den sie auf den orthogonalen geodätischen Linien ausschneiden.

Jedem Parallelstreifen von der Breite q entspricht dann ein Streifen von der Breite q', wobei q' von q allein abhängen und von der Lage der syntaktischen Paare unabhängig sein muß, es ist also

$$q' = f(q).$$

Wir wollen zeigen, daß diese Funktion die Form haben muß

$$f(q) = kq.$$

Lassen wir nämlich aus einem syntaktischen Paare L_1, L_2 von Linienelementen, deren geodätischer Abstand $(L_1 L_2)$ gleich q ist, einen Parallelstreifen herauswachsen, der in seinem Verlauf die geodätische Linie $(A_1 A_2) = q_1 = nq$ gerade n-mal gleichsinnig durchsetzt, wobei $A_1 A_2$ wieder zwei syntaktische

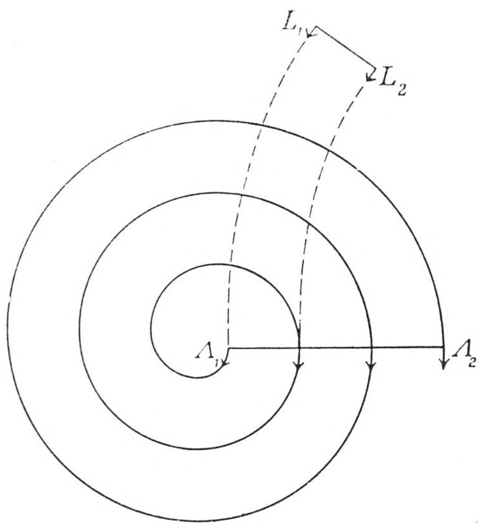

Fig. 2.

Elemente sind[1]), so entsprechen den Paaren $L_1 L_2$ und $\Lambda_1 \Lambda_2$ zwei Paare $L_1' L_2'$ und $\Lambda_1' \Lambda_2'$ und es ist offenbar auch

$$q_1' = n q',$$

wie die Konstruktion zeigt, also

$$\frac{q_1'}{q_1} = \frac{q'}{q} = k.$$

Jeder solchen syntaktischen Berührungstransformation ist dann weiter eindeutig eine Berührungstransformation der geodätischen Evoluten, d. h. der Umhüllungskurven der geodätischen Normalen zugeordnet, welche Kurven vom Umfang u und der Umlaufszahl Null in Kurven vom Umfang ku und der Umlaufszahl Null transformiert. In der euklidischen Ebene kann die Konstante k nachträglich durch Hinzufügung einer Ähnlichkeitstransformation gleich Eins gemacht werden, für beliebige Flächen versagt dieser Weg selbstverständlich. Wir begnügen uns daher mit dem Ergebnis:

Jeder syntaktischen Berührungstransformation mit der Konstanten $k = 1$ ist eine Berührungstransformation der geodätischen Evoluten eindeutig zugeordnet, die den im weiteren Sinne umfangstreuen Berührungstransformationen zugehört.

Umgekehrt gehören zu jeder im weiteren Sinne umfangstreuen Berührungstransformationen ∞' syntaktische Transformationen ($k = 1$), und jede solche syntaktische Transformation ist eindeutig bestimmt, wenn man angibt, welches zur geodätischen Linie g_0' (dem Bild einer beliebigen geodätischen Linie g_0 bei der umfangstreuen Transformation) senkrechte Linienelement L_0' einem beliebig vorgeschriebenen zu g_0 senkrechten Element L_0 entsprechen soll.

[1]) In Fig. 2 ist der Parallelstreifen der Übersichtlichkeit halber spiralisch geführt.

§ 2. Die Speere der hyperbolischen Ebene.

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die allgemein gehaltenen Betrachtungen im ersten Abschnitt des vorigen Paragraphen im besonderen für die hyperbolische Geometrie durchzubilden mit kurzem Ausblick auf die elliptische Geometrie. Beide Geometrien teilen mit der euklidischen Geometrie die Eigenschaft, daß sich unter den Flächen der Klasse F (S. 584, Z. 2) mit Leichtigkeit solche ausfindig machen lassen, die auf die hyperbolische (elliptische) Ebene abwickelbar sind, und daß wir die Abbildung der Speere der Ebene auf die Punkte von F durch sehr einfache Konstruktion herstellen können.

Orientierte Linienelementkoordinaten der hyperbolischen Ebene[1]).

Führt man geodätische Polarkoordinaten ein, so wird

$$ds^2 = \operatorname{Sin}^2 p\, d\varphi^2 + dp^2, \quad \text{d. h.} \quad f(p, \varphi) = \operatorname{Sin} p.$$

Die Gleichung der Geraden ist

$$x_1 \operatorname{Cos} p \cos\varphi + x_2 \operatorname{Cos} p \sin\varphi - x_3 \operatorname{Sin} p = 0,$$

wobei p und φ die Polarkoordinaten von F sind (Fig. 1).

Für die Weierstraßschen Koordinaten des Schnittpunkts P zweier unendlich benachbarten Speere $s(p, \varphi)$ und $s'(p + dp, \varphi + d\varphi)$ findet man hieraus leicht

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= -p' \sin\varphi + \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} p \cos\varphi \\ \lambda x_2 &= p' \cos\varphi + \operatorname{Cos} p \operatorname{Sin} p \sin\varphi \\ \lambda x_3 &= \operatorname{Cos}^2 p, \end{aligned}$$

wobei wegen der Beziehung

$$x_3^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1$$

zu setzen ist

$$\lambda = \sqrt{\operatorname{Cos}^2 p - (p')^2}.$$

[1]) Die analytischen Hilfsmittel sind dargestellt in dem Buch des Verfassers: Nichteuklidische Geometrie, Sammlung Schubert 49, 2. Aufl., 1912.

Die Strecke q ist als Entfernung des Punktes F mit den Koordinaten

$$y_1 = \mathfrak{Sin}\, p \cos\varphi, \quad y_2 = \mathfrak{Sin}\, p \sin\varphi, \quad y_3 = \mathfrak{Cof}\, p$$

von P leicht zu finden nach der Formel

$$\mathfrak{Cof}\, q = x_3 y_3 - x_1 y_1 - x_2 y_2 = \frac{\mathfrak{Cof}\, p}{\lambda},$$

und hieraus

$$\mathfrak{Tg}\, q = \frac{p'}{\mathfrak{Cof}\, p}$$

oder

$$dp\, \mathfrak{Cof}\, q - d\varphi\, \mathfrak{Sin}\, q\, \mathfrak{Cof}\, p = 0.$$

Diese Formel drückt analytisch die Bedingung dafür aus, daß zwei unendlich benachbarte Linienelemente (φ, p, q) und $(\varphi + d\varphi,\ p + dp,\ q + dq)$ vereinigt liegen, und sie geht für kleine Werte von p und q natürlich in die von Blaschke für die euklidische Geometrie gegebene Formel[1])

$$dp - q\, d\varphi = 0$$

über.

Das Linienelement der umhüllten Kurve kann direkt berechnet werden, und man findet

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2 = \left\{ \mathfrak{Sin}\, p + \frac{p''\, \mathfrak{Cof}\, p - (p')^2\, \mathfrak{Sin}\, p}{\mathfrak{Cof}^2 p - (p')^2} \right\}^2 d\varphi^2.$$

und daraus leicht die Zerlegung

$$ds = \mathfrak{Sin}\, p\, d\varphi + \frac{1}{2}\, d \log \frac{\mathfrak{Cof}\, p + p'}{\mathfrak{Cof}\, p - p'}.$$

Der erste Teil gibt das Bogenelement des geodätischen Kreises, der zweite ist, wie man sofort bestätigen kann, das Differential von q — ganz im Einklang mit den allgemeinen Ergebnissen des ersten Paragraphen.

Sind die beiden unendlich benachbarten Speere parallel, so wird

---

[1]) Blaschke, a. a. O., S. 205.

$$q = \pm\infty, \quad \mathfrak{Tg}\, q = \pm 1, \quad (p')^2 - \mathfrak{Cof}^2 p = 0,$$

ist aber

$$(p')^2 > \mathfrak{Cof}^2 p,$$

so haben wir eine gemeinsame Senkrechte, deren Weierstraßsche Linienkoordinaten $u_1\, u_2\, u_3$ durch dieselben Formeln gegeben werden, wie oben die Koordinaten des Schnittpunktes, nur mit dem Unterschied, daß λ zu ersetzen ist durch

$$\mu = \sqrt{(p')^2 - \mathfrak{Cof}^2 p}.$$

Für den Abstand r des Schnittpunktes der gemeinsamen Senkrechten mit dem Speer (p, φ) vom Fußpunkt F findet man

$$\mu\, \mathfrak{Cof}\, r = -u_1 \sin\varphi + u_2 \cos\varphi = p',$$

daher

$$\mathfrak{Tg}\, r = \frac{\mathfrak{Cof}\, p}{p'}.$$

Wir führen in aller Kürze auch die Ergebnisse in der elliptischen Geometrie an. In Polarkoordinaten (p, φ) bekommt man für das Bogenelement

$$ds^2 = \sin^2 p\, d\varphi^2 + dp^2$$

und aus der Gleichung der Geraden

$$x_1 \cos p \cos\varphi + x_2 \cos p \sin\varphi - x_3 \sin p = 0$$

findet man leicht für das Bogenelement der umhüllten Kurve

$$ds = \left(\sin p + \frac{p'' \cos p + (p')^2 \sin p}{(p')^2 + \cos^2 p}\right) d\varphi$$

$$= \sin p\, d\varphi + d \operatorname{arctg} \frac{p'}{\cos p},$$

während andererseits für $q = FP$ (Fig. 1) hier leicht zu berechnen ist

$$\operatorname{tang} q = \frac{p'}{\cos p}.$$

Die Gleichung

$$dp \cos q - d\varphi \cos p \sin q = 0$$

ist hier die Bedingung für die vereinigte Lage zweier Nachbarelemente.

Der Ausdruck für die Strecke $q(FP)$ ist für die weitere Dartellung erforderlich, daher war auch eine an sich nicht notwendige Bestätigung der Formel (1) von § 1 angebracht. Als wichtigstes und selbstverständlich ohne die Berechnung von q bereits angebbares Resultat haben wir erhalten:

In allen drei Geometrien mit dreigliedriger Bewegungsgruppe kann der von

$$
\begin{aligned}
ds &= dq + f\,d\varphi \\
f &= p \,(\text{euklidische Geometrie}) \\
f &= \sin p \,(\text{elliptische Geometrie}) \\
f &= \mathfrak{Sin}\, p \,(\text{hyperbolische Geometrie})
\end{aligned}
$$

sich abspaltende Teil $f\,d\varphi$ als Inhalt eines von der Abszissenachse $p = 0$ zwei Ordinaten und einem Bogenelement begrenzten Streifens gedeutet werden in einer anderen Ebene mit der gleichen Maßbestimmung.

In der Tat sind ja

$$p\,d\varphi, \quad \sin p\,d\varphi, \quad \mathfrak{Sin}\, p\,d\varphi$$

die Maßzahlen für den Inhalt eines Streifens.

Die Abbildung auf dem Kreiszylinder. Errichtet man in allen Punkten eines Kreises vom Radius a, dessen Mittelpunkt O ist, die Senkrechten zur Ebene der Speere, so erhält man einen Zylinder, und für den Flächenstreifen, der von einem Element des Grundkreises, zwei Mantellinien und einem Element einer auf dem Zylinder gelegenen Kurve begrenzt ist, die Werte

$$df = a p\,d\varphi, \quad df = \sin a \sin p\,d\varphi, \quad df = \mathfrak{Sin}\, a\, \mathfrak{Sin}\, p\,d\varphi.$$

Hierdurch wird die (von Blaschke in etwas anderer Form[1]) für die euklidische Geometrie gegebene) Abbildung der Speere auf die Punkte des Zylinders nahegelegt, welche die umfangs-

[1]) Blaschke, a. a. O., S. 210.

treuen Berührungstransformationen in die flächentreuen Punkttransformationen verwandelt.

Man bringt die orientierte Normale des Speeres zum Schnitt mit dem Grundkreis des Zylinders. Dabei ist derjenige Schnittpunkt zu wählen, in dem die orientierte Normale den Grundkreis von innen nach außen durchdringt. Von diesem Punkt aus ist dann die mit Vorzeichen behaftete Strecke p auf der hindurchgehenden Mantellinie abzutragen.

Damit sind die Speere eindeutig abgebildet auf die Punkte des Zylinders, und zwei der Lage nach zusammenfallende Speere bilden sich auf zwei Punkten ab, deren Verbindungslinie durch den Koordinatenanfang geht.

Setzt man $\sin a = 1$, so artet der Zylinder einfach in eine elliptische Ebene aus (und die konformen Punkttransformationen werden, wie eine einfache Überlegung zeigt, direkt den äquilongen Transformationen zugeordnet).

Eingehender verweilen wollen wir bei dieser Abbildung in der hyberbolischen Geometrie unter der Voraussetzung

$$\mathfrak{Sin}\, a = 1 .$$

Der zur Strecke a als Parallelwinkel[1]) gehörige Winkel $\Pi(a)$ ist dann gleich $\frac{1}{4}\pi$. Wir werden sogleich sehen, daß die Abbildung der Speere auf die Punkte des Zylinders dann zu geometrisch leicht deutbaren Ergebnissen führt.

Einem Speer $s(p, \varphi)$ der Ebene entspricht der Punkt mit den Weierstraßschen Koordinaten

$$x_1 = \mathfrak{Cos}\, p \cos\varphi, \quad x_2 = \mathfrak{Cos}\, p \sin\varphi, \quad x_3 = \mathfrak{Sin}\, p$$
$$x_4 = \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \mathfrak{Cos}\, p \cdot \sqrt{2}$$

auf dem Zylinder

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 .$$

Das Bogenelement eines Parallelkreises ist gleich

$$\mathfrak{Cos}\, p \cdot d\varphi$$

[1]) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, S. 80.

und das Element einer erzeugenden Geraden gleich dp, der Neigungswinkel τ eines Linienelementes auf dem Zylinder gegen den Parallelkreis also gegeben durch

$$\operatorname{tang}\tau = \frac{dp}{\mathfrak{Cof}\, p\, d\varphi} = \mathfrak{Tg}\, q \quad \text{(S. 588).}$$

Man sieht, daß nur für $\operatorname{tang}^2 \tau < 1$ dem Linienelement auf dem Zylinder ein reelles Linienelement des Speeres entspricht, denn für reelle Werte von q ist stets

$$\mathfrak{Tg}^2 q \leqq 1.$$

Das Bild eines reellen Linienelementes des Speeres kann auch leicht konstruiert werden. Legt man im Bildpunkt S an den Parallelkreis die Tangente, trägt auf ihr von S aus die Strecke $ST = a$ ab und errichtet auf ST in T wieder die innerhalb der Tangentialebene gelegene Senkrechte von der Länge

$$TU = q,$$

so wird im rechtwinkligen Dreieck STU der Winkel bei S bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \sphericalangle TSU = \frac{\mathfrak{Tg}\, q}{\mathfrak{Sin}\, a} = \mathfrak{Tg}\, q,$$

also ist

$$\sphericalangle TSU = \tau,$$

d. h. die Hypotenuse SU gibt im Punkt S die Richtung des Linienelementes an, das das Bild des Linienelementes (φ, p, q) ist.

Bezeichnen wir als „Pseudowinkel“ zweier Linienelemente in S die Differenz

$$\Delta q = \Delta\, \mathfrak{Arg}\, \mathfrak{Tg}\, (\operatorname{tang} \tau),$$

so sehen wir, daß den äquilongen Speertransformationen der hyperbolischen Ebene, denjenigen Berührungstransformationen also, welche den Abstand der Punkte je zweier Linienelemente desselben Speeres ungeändert lassen, die pseudokonformen Punkttransformationen unseres Zylinders entsprechen. Als Winkelmaß q dient dabei einfach die einem Winkel τ (vom

Parallelkreis und Bogenelement) gegenüberliegende Kathete des rechtwinkligen Dreiecks STU, dessen andere Kathete TU gleich q ist.

Den Linienelementen, für die

$$\operatorname{tang}^2 \tau = 1$$

ist, entsprechen die unendlich fernen Linienelemente des Speeres.

Wird $\operatorname{tang}^2 \tau > 1$, so entspricht dem Linienelement in S (auf dem Zylinder) kein reelles Linienelement des Speeres mehr, doch läßt sich die Konstruktion leicht so abändern, daß sie eine reelle Bedeutung behält, wir müssen nur an Stelle des rechtwinkligen Dreiecks das Viereck mit drei rechten Winkeln nehmen bei unserer in der Tangentialebene des Zylinders ausgeführten Konstruktion.

Auf der Tangente des Parallelkreises tragen wir wieder die Strecke

$$ST = a$$

ab, errichten dann in T auf ST die Senkrechte von der Länge $TR = r$, wobei

$$\mathfrak{Tg}\, r = \frac{\mathfrak{Cos}\, p}{p'} (< 1)$$

ist. In R errichten wir nochmals auf TR die Senkrechte und fällen auf sie vom Bildpunkt S das Lot SU. Die Bestimmungsstücke des Vierecks $STRU$, das nur bei S einen spitzen Winkel hat, sonst lauter rechte, sind dann

$$TR = r, \quad ST = a \quad (\mathfrak{Sin}\, a = 1),$$

und der spitze Winkel wird bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \sphericalangle TSU = \frac{\mathfrak{Sin}\, a}{\mathfrak{Tg}\, r} = \frac{p'}{\mathfrak{Cos}\, p} = \operatorname{tang} \tau,$$

d. h. es ist wieder

$$\sphericalangle TSU = \tau.$$

r ist in diesem Fall gerade der Abstand des Fußpunktes F vom Schnittpunkt der gemeinsamen Senkrechten der einander jetzt nicht reell schneidenden Speere $s(p, \varphi)$ und $s'(p + dp)$.

$\varphi + d\varphi$), mit dem Speer s (S. 589, Z. 13) und damit hat das sich nicht reell abbildende Linienelement von SU in S seine reelle Deutung in der hyperbolischen Ebene gefunden.

Hiermit ist dann für jeden dem Speer $s(p, \varphi)$ unendlich benachbarten Speer $s'(p + dp, \varphi + d\varphi)$, möge er den ersten schneiden, zu ihm parallel sein oder ein gemeinsames Lot mit ihm haben, in der zylindrischen Abbildung der Speere dasjenige dem Bildpunkt S angehörige Linienelement durch eine sehr einfache Konstruktion gegeben, welches den Bildpunkt S' des unendlich benachbarten Speeres enthält[1]).

§ 3. Die komplementäre Speerinversion.

Wir verweilen noch bei den zuletzt besprochenen äquilongen Speertransformationen, und zwar bei denjenigen, welche Kreise in Kreise überführen. Während in der euklidischen Geometrie keine einfachen Beziehungen zwischen den äquilongen Berührungstransformationen und den (konformen) Punkttransformationen der Kreise bestehen, gilt für die nichteuklidische Geometrie die volle Dualität[2]).

Ferner aber ist schon die Theorie der Punkttransformationen der Kreise in der hyperbolischen Ebene ebenso einfach wie in der euklidischen, wenigstens kann die „Transformation durch komplementäre Ordinaten" in der hyperbolischen Geometrie durchaus der Transformation durch reziproke Radien an die Seite gestellt werden, und man bedarf zu der Ableitung ihrer Haupteigenschaften gar keiner metrischen Relationen[3]).

Im folgenden wollen wir eine ebenso einfach äquilonge Speertransformation behandeln, einzig und allein auf der

---

1) Blaschke führt in seiner Abhandlung: Über die Laguerresche Geometrie orientierter Geraden (Archiv d. Math. u. Phys. III, 18, S. 132 ff.) die „Pseudowinkel" und die „Pseudokonformität" für gerade Zylinder des euklidischen Raumes ein.

2) Beck, Am. Trans., Vol. XI, 4 (1910).

3) Liebmann, a. a. O., S. 45 ff.

Grundlage, welche die so fundamentale Zuordnung zwischen dem rechtwinkligen Dreieck und dem Spitzeck (Viereck mit drei rechten Winkeln) gibt, ein Ausgangspunkt, der sich bei allen der hyperbolischen Geometrie eigentümlichen Konstruktionen immer wieder bewährt[1]).

Diese einfachste äquilonge Speertransformation wollen wir als komplementäre Speerinversion bezeichnen.

Jedem Speer p, φ wird der Speer p_1, φ_1 zugeordnet, dessen Koordinaten gegeben sind durch

$$\varphi_1 = \pi + \varphi$$
$$\Pi(p_1) = \frac{\pi}{2} + \Pi(p)$$

oder

$$p_1 = -p',$$

wenn man Strecken, deren Parallelwinkel sich zu einem rechten ergänzen, Komplementärstrecken", also durch Akzente, unterscheidet, außerdem aber die bereits von Lobatschepkij verwendete Festsetzung für den Parallelwinkel negativer Strecken gebraucht

$$\Pi(-p) = \pi - \Pi(p).$$

Wir haben zunächst zu zeigen, daß diese Linieninversion wirklich eine äquilonge Transformation ist. Aus der oben erwähnten Zuordnung folgt leicht, daß zu jedem rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c den Katheten a und b und den Winkeln λ und μ (gegenüber a und b) ein zugeordnetes Spitzeck mit dem Winkel

$$\frac{\pi}{2} - \lambda$$

gehört, dessen Seiten, vom Scheitel des spitzen Winkels aus gerechnet, der Reihe nach sind: m definiert durch

$$\Pi(m) = \mu$$

c', a und b'.

---

[1]) Vgl. die in diesem Jahrgang der Berichte, S. 273—287 veröffentlichte Arbeit.

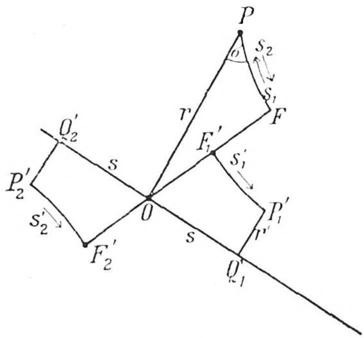

Fig. 3.

Bilden wir den (linksdrehenden) Speer s_1 ab (Fig. 3) und errichten auf OP in O die Senkrechte, so zeigt sich auf Grund der Zuordnung, daß das Bild s_1' des Speeres und diese Senkrechte ein gemeinsames Lot haben $P_1' Q_1'$. Im einzelnen findet man, wenn gesetzt wird

$$OF = p, \quad FP = q; \quad OP = r,$$
$$\sphericalangle\, OPF = \sigma,$$

für das Viereck $O Q_1' P_1' F'$ die Stücke

$$OF_1' = p', \quad F_1' P_1' = q, \quad Q_1' P_1' = r', \quad O Q_1' = s.$$

Hieraus folgt, daß den (linksdrehenden) Speeren durch P die (rechtsdrehenden) Speere s_1' entsprechen, welche die Abstandslinie

$$Q_1' P_1' = r' = \text{const}$$

berühren und dem Linienelement des Speeres s_1 in P das Linienelement des Speeres s_1' in P_1'. Die Transformation ist also wegen

$$q = FP = F_1' P_1'$$

eine äquilonge Speertransformation. Dem zu s_1 entgegengesetzt orientierten, mit ihm zusammenfallenden Speer s_2 entspricht dann s_2' (vgl. die Figur) und den Linienelementen eines Punktes $P (OP = r)$ die Linienelemente einer Abstandslinie, deren beide Äste konstanten Abstand $Q_1' P_1' = Q_2' P_2' = r'$ von derjenigen Geraden haben, die in O auf OP senkrecht steht. Diese Gerade nennen wir die Mittellinie der Abstandslinie.

Aus derselben Figur folgt, wenn wir s festhalten und r' variieren:

Den zu einer Geraden t senkrechten Linienelementen (d. h. den Linienelementen, deren Punktort t ist und die auf t senkrecht sind) entsprechen wieder Linienelemente, deren Punktort eine Gerade ist (OP) und die mit dieser Geraden einen konstanten Winkel einschließen.

Die zweite Gerade geht durch O und ist senkrecht zu dem von O auf t gefällten Lot $OQ_1' = s$, der Winkel, den die abgebildeten Linienelemente mit ihrem Punktort einschließen, ist $\sigma = \Pi(s)$.

Betrachten wir jetzt alle orientierten Zyklen, die in O eine bestimmte Gerade berühren, also lauter orientierte Zyklen mit einem gemeinsamen Linienelement in O, so schneidet eine Gerade durch O alle diese Zyklen unter demselben Winkel. Aus der soeben festgestellten Abbildung folgt dann, daß die Bilder dieser Zyklen Orthogonaltrajektorien einer Geradenschar sind, und zwar besteht diese Schar aus der Gesamtheit aller Speere, welche parallel sind zu dem Speer durch den Punkt O, den man erhält, wenn man die gemeinsame orientierte Tangente der Zyklen um einen rechten Winkel dreht im Sinne des Uhrzeigers (nach rechts), d. h.:

Jedem orientierten Zykl durch O entspricht ein Grenzkreis und einem Berührungsbüschel mit gemeinsamer Tangente in O eine Schar konzentrischer (koaxialer) Grenzkreise.

Die folgende Betrachtung zeigt uns dann, welcher Art die Bilder von Zyklen sind, die zwei reelle Tangenten durch den Punkt O senden. Betrachtet man eine Schar konzentrischer Grenzkreise und auf jeder von ihnen den Punkt, der an einer bestimmten Achse einen gegebenen Abstand u hat, legt man ferner in diesen Punkten die Tangenten an die Grenzkreise, so werden sie, sobald er hinreichend groß ist $\left(\Pi(u) < \frac{\pi}{4}\right)$, eine Abstandslinie umhüllen, d. h. sie müssen, weil sie ja alle denselben Winkel mit u einschließen, auch denselben kürzesten Abstand von jener bestimmten Achse haben, und es sind die Tangentenabschnitte von den Berührungspunkten mit dieser Abstandslinie bis zu den Berührungspunkten mit allen konzentrischen Grenzkreisen gleichlang; die Mittellinie der Abstandslinie gehört selbst mit zu den Achsen dieser Schar von Grenzkreisen.

Diese Beziehung zwischen konzentrischen Grenzkreisen und den Abstandslinien, deren Mittellinie eine gemeinsame Achse der Grenzkreise ist, wenden wir an[1]).

Um das Bild eines Zykls (k) zu finden, der einen Speer durch O in T berührt, beachten wir, daß der Zykl außer OT mit jedem Zykl des den Speer in O berührenden Büschels von Zyklen noch eine zweite gemeinsame Tangente hat, deren Länge ebenfalls gleich OT ist. Dem Berührungsbüschel entspricht ein Büschel koaxialer Grenzkreise, dem Zykl (k) eine Kurve, deren Tangenten die Grenzkreise berühren, und die Abschnitte auf allen Tangenten zwischen den beiden Berührungspunkten müssen gleichlang sein. Aus dem zuvor Gesagten folgt dann, daß diese Kurve eine Abstandslinie sein muß und so findet man das Ergebnis:

Jedem Zykl, der zwei reelle Tangenten durch O sendet, entspricht eine Abstandslinie. (Ihre Mittellinie ist die Verbindungslinie der unendlich fernen Punkte der Bilder derjenigen beiden Speere, welche auf den genannten Tangenten im Berührungspunkt senkrecht stehen, wobei die Orientierung zu beachten ist.)

Es bleibt noch der Nachweis zu erbringen, daß auch die Bilder von Zyklen, die keine reellen Tangenten durch O senden, wieder Zyklen sind; er ist mit den Hilfsmitteln der Geometrie der hyperbolischen Ebene nicht so einfach zu leisten wie die bisher betrachteten Fälle, weil auf noch mehr Einzelheiten eingegangen werden müßte.

Abbildung der komplementären Linieninversion auf den Raum. Auf einen Schlag erhalten wir alle Ergebnisse der Linieninversion, wenn wir genau wie bei der Trans-

[1]) Vgl. Nichteuklidische Geometrie, S. 48, wo die analoge Eigenschaft der Abstandslinien benützt wird, daß sie Isogonaltrajektorien konzentrischer Grenzkreise sind.

formation durch komplementäre Ordinaten den Raum als Hilfsmittel benützen[1]).

Errichtet man in P auf der Grundebene die Senkrechte PP_∞ und zieht durch O die Parallele OP_∞, legt ferner durch O die zu OP_∞ senkrechte Ebene und sucht auf der Grundebene die Fußpunkte der Geraden, welche zur soeben konstruierten Ebene senkrecht stehen (das „Randbild" auf der Grundebene), so erhält man genau die oben schon konstruierte Abstandslinie, welche dem Punkt P bei der Linieninversion zugeordnet ist, denn die Schnittgerade der beiden Ebenen steht auf OP in O senkrecht und der konstante Abstand des Randbilds von dieser Schnittgeraden wird gerade die zu OP komplementäre Strecke.

Hiermit ist eine Beziehung zwischen komplementärer Linieninversion auf der einen Seite und der Zuordnung der durch O gehenden Geraden OP_∞ zu den auf OP_∞ in O senkrechten Ebenen gegeben, die nur ausgebaut zu werden braucht, um in einfachster Weise die Bilder aller Zyklen bei der Transformation der Grundebene zu finden.

Wir konstruieren zu einem orientierten Zykl (z. B. einem Kreis k vom Radius r) zunächst die Ebene E_k, deren Randbild er ist, wir errichten also im Mittelpunkt des Kreises nach der Seite hin, von der aus gesehen der Drehungssinn positiv ist, die Senkrechte auf der Grundebene und tragen die Länge r' ab, durch den Endpunkt legen wir dann die zu r' senkrechte Ebene E_k. Sodann ist von O aus das Lot auf E_k zu fällen und der Rotationskegel (OE_k) zu konstruieren, dessen Erzeugende parallel sind zur Ebene E_k. Um das Bild des Kreises zu finden, hat man den Rotationskegel zu konstruieren, der von den zu den Erzeugenden des Kegels (O, E_k) senkrechten Ebenen durch O umhüllt wird, dann die Ebene $E_{k'}$ zu konstruieren, zu der jener Umhüllungskegel asymptotisch ist, und endlich das Randbild k' der Ebene $E_{k'}$ auf der Grundebene zu zeichnen. Durch die Reihenfolge (Zykl k, Ebene E_k, Ebene $E_{k'}$ und Randbild k') wird die Abbildung vermittelt. Die einge-

[1]) Nichteuklidische Geometrie, S. 62—64.

schalteten Rotationskegel sind nicht nötig, geben aber den Zusammenhang mit der polaren Abbildung der Strahlen durch O auf die zu ihnen senkrechten Ebenen durch O, von der wir ausgingen, deutlich an.

Noch durchsichtiger sind die komplementären Linieninversionen, wenn wir sie mit Hilfe der letzten Überlegung ausbauen zu einer komplementären Ebeneninversion. Bei dieser Transformation wird der Ebene des Raumes, deren Abstand von O gleich $OF = p$ ist, eine der beiden Ebenen zugeordnet, welche auf OF senkrecht stehen und auf dieser Geraden O von abgerechnet die Strecke p' abschneiden, welche zu p komplementär ist. Die Ebenen sind noch zu orientieren, d. h. mit einem Drehungssinn um F zu versehen; die Senkrechte OF orientieren wir so, daß sie die Ebene von der Seite her durchdringt, wo der Sinn der Drehung negativ (rechtsdrehend) erscheint, und bezeichnen mit α, β, γ die Winkel der so orientierten Normale mit drei zueinander senkrechten Achsen, mit p den mit Vorzeichen versehenen Abstand der Ebene von O. Dann sind α, β, γ, p orientierte Ebenenkoordinaten, und es entspricht einer Ebene $(\alpha, \beta, \gamma, p)$ die Ebene

$$\alpha_1 = \pi + \alpha, \quad \beta_1 = \pi + \beta, \quad \gamma_1 = \pi + \gamma, \quad p_1 = -p'.$$

Die Abbildung der orientierten Zyklen der Grundebene aufeinander bei der komplementären Linieninversion erhält man dann einfach, indem man vom orientierten Zykl zur orientierten Ebene E_k übergeht, deren Randbild der Zykl ist, dann zur Ebene $E_{k'}$, dem Bild von E_k bei der komplementären Inversion orientierter Ebenen und endlich von hier wieder zum Randbild k' in der Grundebene.

Je nachdem k ein Kreis, ein Grenzkreis oder eine Abstandslinie ist, wird E_k mit der Grundebene ein gemeinsames Lot haben, einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt oder eine gemeinsame Sekante, das Bild $E_{k'}$ aber wird die Grundebene dann und nur dann schneiden, wenn sich von O aus zwei reelle Tangenten an k legen lassen, $E_{k'}$ wird mit der Grundebene einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt haben („Zwischen-ebene" sein), wenn k durch O geht; und endlich wird $E_{k'}$ mit der Grundebene ein gemeinsames Lot haben, wenn sich von O aus an k keine reellen Tangenten legen lassen. Dies alles ergibt sich sehr leicht, wenn man die zur Konstruktion gebrauchten Hilfsebenen alle mit der Ebene schneidet, welche auf der Grundebene senkrecht steht und eine Symmetrieachse des abzubildenden Zykls k enthält.

Die komplementäre Ebeneninversion ist ihrerseits eine äquilonge Speertransformation, welche Sphären (Kugeln, Grenzflächen, Abstandsflächen) des hyperbolischen Raumes wieder in Sphären überführt und kann selbstverständlich auch elementargeometrisch weiter untersucht werden wie die Linieninversion.