Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft III

November- bis Dezembersitzung

München 1911
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Cesàroschen Kurven.

Von **E. Salkowski.**

Vorgelegt von A. Voss in der Sitzung am 2. Dezember 1911.

Wenn das Hauptdreikant einer Raumkurve K sich längs der Kurve bewegt, so gibt es immer gerade Linien, und zwar ∞^1 euklidische und zwei isotrope Geraden, die mit dem Dreikant fest verbunden sind und von denen jede bei der Bewegung die Tangentenfläche einer Raumkurve beschreibt. Die euklidischen Geraden, die diese Eigenschaft besitzen, sind die Parallelen zur Tangente der Kurve, die in der rektifizierenden Ebene liegen; sie umhüllen die zu K parallelen geodätischen Linien ihrer gemeinsamen rektifizierenden Fläche. Die Minimalgeraden, die bei der Bewegung Minimalkurven einhüllen, liegen in der Normalebene der Kurve K und schneiden sich in der Spitze des Dreikants, ihre Hüllkurven sind die von E. Study so genannten „Begleiter" der Kurve K.

Nur für besondere Klassen von Raumkurven gibt es außer diesen Geraden noch andere, die mit dem Hauptdreikant fest verbunden sind und bei seiner Bewegung Raumkurven einhüllen, und Cesàro, dem wir diese Problemstellung verdanken und nach dem daher diese kinematische Bedingung als Cesàrosche Bedingung bezeichnet sei, hat gezeigt, daß sie zu denjenigen Kurven gehören, für die zwischen der Krümmung $\varkappa = \frac{1}{\varrho}$ und der Torsion $\tau = \frac{1}{r}$ eine quadratische Gleichung von der Form

$$A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau \tag{1}$$

besteht.

In der wenig umfangreichen Literatur des Gegenstandes, die kürzlich von O. Joachimi[1]) übersichtlich zusammengestellt ist, findet sich indessen nicht mit genügender Klarheit betont, daß die Gleichung (1) für die Kurven, die die Cesàrosche Bedingung erfüllen, keineswegs charakteristich ist, und man hat daher unterschiedslos diese wie auch die sie einschließende Klasse der Kurven (1) als Cesàrosche Kurven bezeichnet. Um der aus der naheliegenden Verwechslung schon tatsächlich entstandenen Verwirrung zu entgehen, seien die Kurven (1) Cesàrosche Kurven schlechthin, die geometrisch definierte Kurvenklasse eigentliche Cesàrosche Kurven genannt. Diese Bezeichnungsweise rechtfertigt sich wohl durch die analoge im besonderem Falle der Bertrandschen Kurven, zu denen man alle Kurven zu rechnen pflegt, bei denen zwischen Krümmung und Torsion eine lineare Gleichung besteht, obwohl die geometrische Definition den Fall

$$A(\varkappa \pm i\tau) = 1$$

nicht umfaßt. Wenn man für diese Kurven, die geodätischen Linien auf den Serretschen Biegungsregelflächen der Kugel, die geometrische Konstruktion ausführt, die im allgemeinen Falle auf die zugeordnete Bertrandsche Kurve führt, so erhält man keine Kurve derselben Art, sondern eine Minimalkurve, und zwar diejenige, auf der die Mittelpunkte aller Kugeln liegen, als deren (partielle) Hüllfläche die Serretsche Fläche aufgefaßt werden kann.

Für jede mehr als oberflächliche Einsicht ist erforderlich, die Bedingung der eigentlichen Cesàroschen Kurven zu präzisieren, d. h. alle Kurven (1), die der Cesàroschen Bedingung nicht genügen, auszusondern. Sodann wird es darauf ankommen, eine rationelle Klassifikation der eigentlichen Cesàroschen Kurven zu gewinnen, d. h. also die verschiedenen Typen wohl

[1]) O. Joachimi, Über Kurven, bei denen die beiden Krümmungen durch eine quadratische Beziehung verknüpft sind. Diss. Münster 1911. In der Literaturübersicht fehlen die Arbeiten von N. Hatzidakis, Ann. der Akademie Athen, 1906 und Andrade, C. R. 122, 1110—1113, 1896.

charakterisierter Kurvenfamilien aufzustellen, die in ihren Bereich fallen. Eine erschöpfende Behandlung dieser beiden Aufgaben, die geleistet werden muß, ehe man an Spezialstudien gehen kann, liegt bisher noch nicht vor, und die Literatur enthält neben bemerkenswerten Einzelergebnissen doch auch manche unzutreffenden Behauptungen.

I. Analytische Darstellung.

Man könnte zunächst versuchen, die Diskussion an die endlichen Gleichungen der Kurven (1) anzuknüpfen, die sich durch die Methode der parallelen Zuordnung[1]) durch Quadraturen darstellen lassen.

Sind X, Y, Z die Koordinaten, K, T, S Krümmung, Torsion und Bogenlänge einer beliebigen Raumkurve, so ergeben sich die Gleichungen einer ihr durch parallele Tangenten zugeordneten Cesàroschen Kurve (1) in der Form:

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
x &= \int \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT} \, dX \\
y &= \int \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT} \, dY \\
z &= \int \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT} \, dZ.
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung versagt nur für $P = Q = 0$; dann aber zerfällt die Cesàrosche Kurve in ein Paar allgemeiner Schraubenlinien, deren endliche Gleichungen wohlbekannt sind.

Die Gleichungen (2) lassen eine bemerkenswerte Umformung zu, wenn man die Identität

$$
(3) \qquad \frac{AK^2 + BT^2 + CKT}{PK + QT} = \alpha K + \beta T + \frac{\gamma KT}{PK + QT}
$$

benutzt, in der

$$
\alpha = \frac{A}{P} \qquad \beta = \frac{B}{Q} \qquad \gamma = C - \frac{AQ}{P} - \frac{BP}{Q}
$$

[1]) Vgl. Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 4, 64–69, 1905.

zu setzen ist. Die Cesàrosche Kurve zerfällt dann und nur dann, wenn

$$A Q^2 + B P^2 - C P Q = 0$$

ist, sie degeneriert dabei in eine Bertrandsche Kurve

$$\frac{A}{P} \varkappa + \frac{B}{Q} \tau = 1$$

und eine allgemeine Schraubenlinie

$$\frac{\tau}{\varkappa} = - \frac{P}{Q}.$$

Die Gleichungen (2) stellen dann nur den ersten Bestandteil dar, während die Schraubenlinie eine gesonderte Behandlung verlangt.

Abgesehen von diesem Ausnahmefall, in dem $\gamma = 0$ wird, kann man die Cesàrosche Kurve (1) stets in der Form darstellen:

$$(4) \qquad \begin{gathered} x = \lambda x_1 + \mu x_2 \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 \\ z = \lambda z_1 + \mu z_2 \\ (\lambda + \mu = 1), \end{gathered}$$

wobei die Gleichungen

$$(5) \qquad x_1 = \frac{1}{\lambda} \int (\alpha K + \beta T)\, d x$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

eine Bertrandsche Kurve, die Gleichungen

$$(6) \qquad x_2 = \frac{1}{\mu} \int \frac{\gamma K T}{P K + Q T}\, d x$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

eine Kurve der Klasse

$$a \varrho + b r = 1$$

explizit ergeben. Man erhält so den Satz:

Bezieht man eine Bertrandsche Kurve und eine Kurve, deren Krümmungsradius eine lineare ganze Funktion des Torsionsradius ist, durch parallele Tangenten aufeinander, so liegen alle Punkte, die die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte in einem beliebigen konstanten Verhältnis teilen, auf einer allgemeinen Cesàroschen Kurve.

Von dieser Darstellung sind diejenigen Kurven ausgeschlossen, für die entweder P oder Q verschwindet; in diesen Fällen ist eine Bertrandsche Kurve mit einer Kurve

$$\tau = \varkappa^2$$

bzw.

$$\varkappa = \tau^2$$

in Beziehung zu setzen. Das hier angewandte Verfahren, das übrigens noch verschiedentlich variiert werden kann, ist eine Verallgemeinerung der bekannten Methode, aus einer Kurve konstanter Krümmung und einer parallelen Kurve konstanter Torsion alle zu ihnen parallelen Bertrandschen Kurven zu konstruieren[1]).

Durch Spezialisierung der Raumkurve (X, Y, Z) erhält man beliebig viele Beispiele von Cesàroschen Kurven; eins von ihnen, das analytisch leicht zu verfolgen und auch geometrisch von Interesse ist, bieten diejenigen Kurven (1), die auf Böschungsflächen (Tangentenflächen von allgemeinen Schraubenlinien) geodätische Linien sind. Die Untersuchung gestaltet sich dabei ganz analog wie für den Fall der Bertrandschen Kurven, den Verfasser bei früherer Gelegenheit behandelt hat[2]).

So geeignet sich dies Verfahren auch erweist, wenn es sich um Spezialuntersuchungen handelt, so wenig erscheint es brauchbar, die allgemeine Diskussion zu fördern, die jenen vorangehen muß. Es sei daher im folgenden das kinematische Problem direkt behandelt.

[1]) Sitzungsber. der Berliner Math. Ges. 4, 64—69.
[2]) Math. Annalen 67, 560—578.

II. Bestimmung und Klassifikation der eigentlichen Cesàroschen Kurven.

Es sei (x, y, z) ein Punkt einer Raumkurve, a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' der Reihe nach die Richtungscosinus der Tangente, Binormale und Hauptnormale, $\varkappa, \tau, s$ Krümmung, Torsion und Bogenlänge. Dann sind die Gleichungen einer Geraden, die mit dem Hauptdreikant fest verbunden ist:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x_1 &= x + (pa + qa' + ra'') + \mu(\alpha a + \beta a' + \gamma a'') \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wobei p, q, r beliebige Konstanten und α, β, γ die konstanten Richtungscosinus der Geraden in Bezug auf die Kanten des Dreikants bedeuten.

Die Gerade beschreibt die Tangentenfläche einer Raumkurve, wenn

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} a + (p\varkappa + q\tau)a'' - r(a\varkappa + a'\tau), & \ldots, & \ldots \\ \alpha a + \beta a' + \gamma a'', & \ldots, & \ldots \\ (\alpha\varkappa + \beta\tau)a'' - \gamma(a\varkappa + a'\tau), & \ldots, & \ldots \end{vmatrix} = 0$$

wird, wenn also eine Gleichung von der Form

$$(3)\qquad A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau$$

besteht, eine Gleichung, in der

$$(4)\qquad \begin{aligned} \sigma A &= \beta(p\gamma - r\alpha) \\ \sigma B &= \alpha(\beta r - q\gamma) \\ \sigma C &= -\alpha(p\gamma - r\alpha) - \beta(\beta r - q\gamma) \\ \sigma P &= -\alpha\beta \\ \sigma Q &= -(\beta^2 + \gamma^2) \end{aligned}$$

zu setzen ist. Dazu kommt noch die Gleichung

$$(5)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

oder

$$(5\,\mathrm{a})\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0,$$

je nachdem die betrachtete Gerade eine euklidische oder eine Minimalgerade ist.

Die Gleichung (3) ist identisch erfüllt, wenn

$$A = B = C = P = Q = 0 \tag{6}$$

ist. Dann besteht zwischen $\varkappa$ und τ keine Relation, und wir erhalten diejenigen Geraden, die, mit dem Dreikant einer beliebigen Raumkurve verknüpft, Tangentenflächen beschreiben. Eine einfache Diskussion des Gleichungssystems (4), (5), (6), die hier übergangen sein möge, ergibt, daß es nur in zwei Fällen bestehen kann:

$$\begin{array}{llll} 1.\ \alpha = 0 & \beta = \pm i\gamma, & p = 0 & q = \pm ir \\ 2.\ \alpha = 1 & \beta = \gamma = 0 & r = 0. & \end{array} \tag{7}$$

Im ersten Falle handelt es sich um die Minimalgeraden, die die Studyschen „Begleiter" einhüllen, im zweiten Falle haben wir die Parallelen zur Tangente, die in der rektifizierenden Ebene liegen.

Wir wenden uns jetzt zu den Cesàroschen Kurven und fragen, wann das System der Gleichungen (4) und (5) bzw. (4) und (5a) auflösbar ist, vorausgesetzt, daß nicht alle Koeffizienten von (3) verschwinden, Dabei seien zuerst zwei Sonderfälle erledigt, deren Eigenart bei der Diskussion des allgemeinen Falles leicht übersehen werden kann.

1. $A = 0.$

Dies kann nur eintreten, wenn entweder $\beta = 0$ oder $p\gamma - r\alpha = 0$ vorausgesetzt sind. Ist $\beta = 0$, so fordert die Cesàrosche Bedingung, die mit dem Bestehen der Gleichungen (4) äquivalent ist, daß gleichzeitig P verschwindet. Dann aber zerfällt die Cesàrosche Kurve in eine ebene

$$(C_1) \qquad \tau = 0$$

und eine Bertrandsche Kurve

$$(C_2) \qquad C\varkappa + B\tau = Q.$$

Die Auflösung der Gleichungen ergibt ∞^1 Geraden, von denen zwei Minimalgeraden sind. Sie bilden die eine Regelschar eines Paraboloids, deren Geraden parallel zur Schmiegungsebene der Bertrandschen Kurve C_2 sind. Von der Existenz dieser ∞^1 Geraden kann man sich — falls die Betrachtung auf das reelle Gebiet beschränkt wird — leicht eine geometrische Vorstellung verschaffen. Die Kurve C_2 ist die Striktionslinie einer Biegungsfläche eines Rotationshyperboloids. Denkt man sich das Rotationshyperboloid auf seiner Biegungsfläche abrollen, so fällt das Hauptdreikant der Kurve C_2 mit dem jeweiligen Hauptdreikant des Kehlkreises zusammen. In Bezug auf dieses aber haben die Tangenten an die Parallelkreise der Fläche längs der Erzeugenden durch den Scheitel des Dreikants eine invariante Lage; diese sind es daher, die beim Abrollen des Hyperboloids auf seiner Biegungsfläche abwickelbare Flächen beschreiben. Die Gratlinien dieser Flächen sind also die Kurven, in die die Parallelkreise eines Hyperboloids bei der Biegung der Fläche übergehen [1]).

Eine Bemerkung fordert die ebene Kurve C_1. Es ist geometrisch evident, daß für eine ebene Kurve jede der ∞^3 zu ihrer Ebene parallelen Geraden eine abwickelbare Fläche beschreibt, während hier zunächst nur ∞^1 Geraden erhalten werden. Da aber $\tau = 0$ als Faktor in ∞^2 Gleichungen der vorgegebenen Form auftreten kann (B, C, Q können willkürlich gewählt werden), d. h. geometrisch die Kurve als der eine Zweig von ∞^2 solchen ausgearteten Cesàroschen Kurven angesehen werden kann, so ergeben sich schließlich doch alle derartigen Geraden.

Verschwindet A infolge der Relation

$$p\gamma - r\alpha = 0,$$

so folgt aus dem sich wesentlich vereinfachenden Gleichungssystem (4) nach leichter Rechnung

---

[1]) Diese geometrische Bedeutung scheint bisher noch nicht bemerkt zu sein. Die Existenz dieser paraboloidischen Regelschar ebenso wie die der zweiten zum komplementären Hyperboloid in derselben Beziehung stehenden Schar, die an dieser Stelle nicht hervortreten kann, ist schon von Cesàro erkannt.

$$(8)\quad \begin{aligned} \sigma &= \frac{C}{PB - QC} \\ \alpha &= \sqrt{\frac{PB}{PB - QC}} \\ \beta &= -\frac{C}{B}\alpha \\ \gamma &= \pm\sqrt{\frac{-C(PC + QB)}{B(PB - QC)}}. \end{aligned}$$

Dabei kann das Vorzeichen von α willkürlich festgelegt werden, da dies nur auf eine Orientirung der Geraden hinauskommt. Es existieren also zwei (reelle oder komplexe) euklidische Geraden, die der Cesàroschen Bedingung genügen, da man nach Bestimmung von σ, α, β, γ die Koordinaten p und q eindeutig als Funktionen von r finden kann.

Die Geraden sind dann und nur dann reell, wenn die Koeffizienten der Gleichung (3) so beschaffen sind, daß α und γ den Bedingungen

$$0 < \alpha^2 < 1, \qquad 0 < \gamma^2 < 1$$

genügen. Es bietet kein Interesse, die ohne Schwierigkeiten angebbare explizite Form dieser Ungleichungen hinzuschreiben.

Die beiden Geraden könnten nur dann zusammenfallen, wenn $\gamma = 0$, also

$$(9)\qquad PC + QB = 0$$

wäre. Soll die Cesàrosche Bedingung erfüllt sein, so müßte notwendig auch r verschwinden, und hieraus würde

$$B = C = 0$$

folgen. Ist dies nicht der Fall, besteht dagegen die Gleichung (9), so werden die Cesàroschen Geraden illusorisch. Formt man durch (9) die Gleichung (3) so um, daß nur noch die beiden unabhängigen Konstanten auftreten, so ist das Ergebnis folgendermaßen auszusprechen:

Die Kurven, die eine natürliche Gleichung von der Form

$$(\mathrm{I}) \qquad (P\tau - Q\varkappa)\tau = P(P\varkappa + Q\tau)$$

besitzen, gehören nicht zu den eigentlichen Cesàroschen Kurven.

Die Rechnung, die zu den Gleichungen (8) führte, ist nur dann gültig, wenn der in σ, α und γ auftretende Nenner nicht verschwindet. Ist dagegen

$$(10) \qquad PB - QC = 0,$$

die natürliche Gleichung der Kurve also

$$(B\tau - Q)(P\varkappa + Q\tau) = 0,$$

so existieren Minimalgeraden, die eine Minimalkurve einhüllen. Die Cesàrosche Kurve, die in eine allgemeine Schraubenlinie und eine Kurve konstanter Torsion zerfällt, ist daher zu den eigentlichen zu rechnen. Sowohl die Schraubenlinien als auch die Kurven konstanter Torsion für sich sind mit ∞^1 derartigen Minimallinien invariant verbunden. Letztere schneiden alle die Binormale der Kurve und erfüllen eine leicht explizit angebbare Fläche, deren spezielles Studium hier nicht beabsichtigt ist.

Bei der ganzen Untersuchung war vorausgesetzt, daß B und C von Null verschieden sind. Nun kann C nur dann verschwinden, wenn entweder β oder $(\beta r - \gamma q)$ gleich Null ist, und die Cesàrosche Bedingung erfordert dann das gleichzeitige Verschwinden von P bzw. B. In derselben Weise ergibt sich, daß die Bedingungen (4) für $B = 0$ nur dann gleichzeitig erfüllt sind, wenn $C = 0$ bzw. $P = 0$ ist. Alle die Fälle, in denen der Cesàroschen Bedingung genügt wird, führen auf zerfallende Kurven.

Für die Kurven

$$(\mathrm{II}) \qquad B\tau^2 = P\varkappa + Q\tau \qquad (B,\ P \neq 0)$$

und

$$(\mathrm{III}) \qquad C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau \qquad (C,\ P \neq 0)$$

ist die Cesàrosche Bedingung nicht erfüllt.

2. Ist

$$B = 0,$$

so ist entweder $\alpha = 0$ oder $\beta r - \gamma q = 0$.

Im ersten Falle ist die Cesàrosche Bedingung erfüllt, wenn auch $P = 0$ ist. Wir haben es dann mit den Kurven

$$A\varkappa + C\tau = Q\frac{\tau}{\varkappa} \tag{11}$$

zu tun bzw. mit der zerfallenden Kurve

$$\varkappa(A\varkappa + C\tau) = 0, \tag{12}$$

die kein Interesse darbietet. Für die Kurven (11) existieren dann ∞^1 euklidische Geraden, die zur Normalebene parallel sind und abwickelbare Flächen einhüllen. Auf diese in mancher Hinsicht interessante Kurvenklasse haben Cesàro und Andrade schon gelegentlich hingewiesen.

Wenn dagegen

$$\beta r - \gamma q = 0$$

ist, so erhält man Cesàrosche Minimalgeraden, sobald die Bedingung

$$AQ - PC = 0$$

erfüllt ist, d. h. wenn die Kurvengleichung die Gestalt

$$(C\varkappa - Q)(P\varkappa + Q\tau) = 0$$

besitzt. Die Kurve zerfällt dann in eine allgemeine Schraubenlinie und eine Kurve konstanter Krümmung. Ebenso wie die Schraubenlinien und die Kurven konstanter Torsion sind also auch die Kurven konstanter Krümmung mit ∞^1 Minimalgeraden verbunden, die bei der Bewegung Minimalkurven umhüllen. Alle diese Geraden schneiden die Tangente der Kurve und bilden eine Fläche, deren Eigenschaften der Untersuchung leicht zugänglich sind.

Ist

$$PC - QA \neq 0,$$

so findet man

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
\sigma &= \frac{A}{PC - AQ} \\
\alpha &= \sqrt{\frac{PC}{PC - AQ}} \\
\beta &= -\frac{A}{C}\,\alpha \\
\gamma &= \pm\sqrt{\frac{-A(PA + QC)}{PC - AQ}}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen bestimmen immer zwei (reelle oder komplexe) Cesàrosche Geraden, wenn gleichzeitig $A \neq 0$, $C \neq 0$ und $PA + QC \neq 0$. Der Fall $A = 0$ ist schon vorher diskutiert worden. Für $A \neq 0$, $C = 0$ können die Cesàroschen Bedingungen (4) nur erfüllt sein, wenn auch $P = 0$. Daraus ergibt sich:

Die Kurven der Klasse

$$
(\text{IV})\qquad A\varkappa^2 = P\varkappa + Q\tau \qquad (A,\ P,\ Q \neq 0)
$$

sind keine eigentlichen Cesàroschen Kurven.

Ist endlich

$$
(14)\qquad PA + QC = 0,
$$

so folgt aus (13) $\gamma = 0$. Dies fordert aber wieder $r = 0$, und die Gleichungen (4) können nur erfüllt werden, wenn $A = C = 0$ ist.

Die Kurven

$$
(\text{V})\qquad \varkappa(Q\varkappa - P\tau) = Q(P\varkappa + Q\tau)
$$

gehören nicht zu den eigentlich Cesàroschen Raumkurven.

3. Es bleibt nun noch der allgemeine Fall zu diskutieren, in dem $A \neq 0$ und $B \neq 0$. Dann ist sicher auch $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$; damit die Gleichungen (4) bestehen können, muß also $P \neq 0$ sein; d. h.

Die Kurvenklasse

$$\text{(VI)} \qquad A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = Q\tau \qquad (Q \neq 0)$$

enthält keine eigentlichen Cesàroschen Kurven.

(Die von Cesàro (Natürliche Geometrie, deutsche Ausgabe, S. 228) gemachte Bemerkung über eine spezielle Kurve der Klasse $2a\varkappa^2 + a\tau^2 = \tau$ ist daher zu berichtigen.)

In allen anderen Fällen kann man aus der Gleichung

$$A\alpha^2 + C\alpha\beta + B\beta^2 = 0,$$

die eine einfache Folgerung aus dem System (4) ist,

$$\text{(14)} \qquad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4AB}}{2A}$$

finden. Nach leicht durchführbarer Rechnung ergibt sich:

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{P(-C \pm H)}{2AQ + P(-C \pm H)}} \\ \beta &= \frac{2A}{-C \pm H}\alpha \\ \gamma &= \pm\sqrt{\frac{2A[Q(-C \pm H) - 2PA]}{(-C \pm H)[P(-C \pm H) + 2AQ]}} \end{aligned}$$

$$(H^2 = C^2 - 4AB).$$

Diese Gleichungen bestimmen vier (reelle und imaginäre) Cesàrosche Geraden, die paarweise zusammenfallen, wenn

$$H^2 = 0$$

wird. Die Realität der Geraden ist bedingt durch gewisse Koeffizientenrelationen, die sich aus den Bedingungen

$$0 < \alpha^2 < 1, \qquad 0 < \gamma^2 < 1$$

leicht herleiten lassen, in ihrer wenig einfachen Form indessen nur geringes Interesse bieten.

Eine besondere Rolle spielt der Fall, daß

$$\text{(16)} \qquad AQ^2 - CPQ + BP^2 = 0$$

*

ist. Hier sind die Cesàroschen Geraden Minimalgeraden, die Kurve aber zerfällt, wie gleich im Eingang gezeigt wurde, in eine Schraubenlinie

$$P\varkappa + Q\tau = 0$$

und eine Bertrandsche Kurve

$$AQ\varkappa + PB\tau = PQ. \tag{17}$$

Da eine Bertrandsche Kurve mit jeder beliebigen Schraubenlinie zu einer Cesàroschen Kurve kombiniert werden kann, so existieren bei ihr ebenso wie bei den Kurven konstanter Krümmung und konstanter Torsion ∞^1 Minimalgeraden, die die Cesàrosche Bedingung erfüllen.

Die Ergebnisse der Diskussion lassen sich nun folgendermaßen zusammenfassen:

Abgesehen von den Gleichungsformen (I)...(VI existieren für alle Kurven, die eine natürliche Gleichung

$$A\varkappa^2 + B\tau^2 + C\varkappa\tau = P\varkappa + Q\tau$$

besitzen, vier reelle oder komplexe, verschiedene oder paarweise zusammenfalllende Cesàrosche Geraden. Es existieren deren unendlich viele bei den Kurven

$$A\varkappa + C\tau = Q\frac{\tau}{\varkappa}$$

sowie bei den Bertrandschen Kurven und ihren Grenzfällen. Bei den letzteren gibt es außer diesen regulären Cesàroschen Geraden noch unendlich viele Minimalgeraden, die der Cesàroschen Bedingung genügen.

III. Spezielle Fälle.

Es bietet keine Schwierigkeit, die mit einer eigentlichen Cesàroschen Kurve verknüpften abwickelbaren Flächen, die durch die invarianten Cesàroschen Geraden beschrieben werden, aufzustellen, ihre Gratlinien zu bestimmen und die ganze Konfiguration nach wohlbekannten Methoden zu untersuchen.

Von besonderem Interesse sind diejenigen Kurven, für welche die Anzahl der invarianten Tangentenflächen unendlich groß ist. Zu ihnen gehören die Bertrandschen Kurven, für die indessen nur noch die ∞^1 invarianten Tangentenflächen von Minimalkurven zu untersuchen sind, da die Konfiguration der regulären Cesàroschen Geraden als wohlbekannt gelten kann. Zu ihnen gehören ferner die Kurven der von Cesàro und Andrade bemerkten Klasse

$$A\varkappa + B\tau = C\frac{\tau}{\varkappa},$$

deren Gleichung sich passend in die Form

$$\text{(A)} \qquad \varkappa\cos\alpha + \tau\sin\alpha = \frac{1}{a}\frac{\tau}{\varkappa}$$

setzen läßt. Die Cesàroschen Geraden der Kurve (A) schneiden sich paarweise in den Punkten einer Geraden der rektifizierenden Fläche, die mit der Tangente den Winkel α bildet. Die Punkte der Gratlinien der von den Geraden beschriebenen abwickelbaren Flächen liegen stets in der Parallelebene zur rektifizierenden Ebene, die den Krümmungsmittelpunkt der Kurve (A) enthält; dieser ist der Mittelpunkt der von den Gratlinienpunkten gebildeten Hyperbel. Läßt man das Hauptdreikant längs der Kurve (A) gleiten, so beschreiben die Cesàroschen Geraden eine Linienkongruenz, deren eine Brennfläche die Hüllfläche einer veränderlichen Hyperbel ist, deren Mittelpunkt der Krümmungsmittelpunkt von (A) ist und deren Ebene der rektifizierenden Ebene von A parallel ist.