

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1911. Heft III

November- bis Dezembersitzung

München 1911

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Konstruktionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen.

Von **Ludwig Burmester.**

Mit einer lithogr. Tafel.

Vorgetragen in der Sitzung am 1. Juli 1911.

I. Vorbemerkungen.

Um die beschleunigenden Kräfte bei zusammengesetzten Mechanismen zu ermitteln, ist die Konstruktion der Beschleunigungen ihrer Glieder erforderlich; denn die beschleunigenden Kräfte ergeben sich als das Produkt aus der betreffenden Beschleunigung und der zugehörigen Masse. Infolge schneller Bewegung können an Gliedern eines Mechanismus sehr große Beschleunigungen entstehen, so daß die beschleunigenden Kräfte auf den Mechanismus störend und auch gefährlich einwirken. Dies kann z. B. eintreten bei komplizierten Steuerungsmechanismen schnellgehender Lokomotiven und Dampfmaschinen. Deshalb ist es zweckmäßig, vor der praktischen Ausführung eines derartigen Mechanismus in seinem Entwurf die Beschleunigungen seiner Glieder in ihren verschiedenen Lagen zu konstruieren und die Wirkung der beschleunigenden Kräfte zu untersuchen.

Es kommt in zusammengesetzten, zwangläufigen Mechanismen vor, die Beschleunigungen eines Gliedes zu bestimmen, das durch drei führende Glieder mit je einem anderen Gliede mittels kinematischer Elementenpaare verbunden ist. Die Lösung dieser klassischen kinematischen Aufgabe ist zwar

nicht einfach aber doch nicht schwierig; denn die Ausführung erfordert schließlich die Konstruktion des selbstentsprechenden Punktes zweier in einer Geraden liegenden, ähnlichen Punkt-reihen, die durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt sind, oder die Konstruktion eines geradlinigen geometrischen Ortes. Dadurch werden die Beschleunigungen bei vielen zusammengesetzten Mechanismen und deren speziellen Fällen in gemeinsamer Weise vermittelt.

Wegen der Allgemeinheit der kinematischen Untersuchung der ebenen Mechanismen, bei denen die Punkte der Glieder sich in parallelen Ebenen bewegen, betrachten wir jedes Glied als ein starres ebenes System, das aus der Gesamtheit aller in unbegrenzter Ebene und in gegenseitig unveränderlicher Lage befindlichen Punkten besteht, und das wir kurz ein ebenes System nennen.

Die Konstruktionen der Geschwindigkeiten werden bekanntlich vereinfacht, wenn wir die gerichtete Geschwindigkeit eines Punktes aus der Tangente seiner Bahn in dem Drehungs-sinn des Uhrzeigers um diesen Punkt in die Normale seiner Bahn, also um einen rechten Winkel drehen. Diese so gedrehte Geschwindigkeit habe ich die lotrechte Geschwindigkeit des Punktes genannt. Demnach befinden sich alle lotrechten Geschwindigkeiten der Punkte eines ebenen Systems in den Bahnnormalen, die durch den jeweiligen Pol desselben gehen.

Bei der Bestimmung der Geschwindigkeiten und der Beschleunigungen werden wir die wichtigen kinematischen Sätze verwenden:

„Das ebene System der Endpunkte der lotrechten Geschwindigkeiten ist ähnlich und ähnlichliegend zu dem bewegten System, dessen Punkte diese lotrechten Geschwindigkeiten besitzen, und der Pol ist der Ähnlichkeitspunkt.“

„Das ebene System der Endpunkte der Beschleunigungen ist gleichartig ähnlich zu dem bewegten System, dessen Punkte diese Beschleunigungen besitzen¹⁾.“

¹⁾ L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, 1888, S. 21 und 804.

Wenn der Pol eines ebenen Systems und die Geschwindigkeit eines seiner Punkte gegeben sind, dann sind die Geschwindigkeiten aller seiner Punkte bestimmt, und somit ist auch der Geschwindigkeitszustand des Systems bekannt.

Wenn die Beschleunigungen zweier Punkte eines ebenen Systems gegeben sind, dann sind die Beschleunigungen aller seiner Punkte bestimmt, und somit ist auch der Beschleunigungszustand des Systems bekannt.

Durch die Kenntnis der Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustände der den Gliedern eines Mechanismus angehörenden ebenen Systeme in ihren verschiedenen Lagen, die sich vermittels der konstruierten Bahnkurven der betreffenden Punkte der bewegten Glieder ergeben, erlangen wir eine vollständige Einsicht in die Bewegungen der Glieder eines Mechanismus. Denn die Geschwindigkeitszustände bestimmen mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten die statischen Beziehungen und die Beschleunigungszustände bestimmen mit den betreffenden Massen multipliziert die dynamischen Beziehungen in einem Mechanismus.

Zum Verständnis der Ableitung der Konstruktionen der Beschleunigungen bei zusammengesetzten Mechanismen müssen vorher noch bekannte, einfache konstruktive Bestimmungen der Beschleunigungen erörtert werden.

II. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems.

Die Bewegung eines ebenen Systems S in einem ruhenden ebenen System ist in je drei unendlich nahen Lagen bestimmt, wenn in Fig. 1 zwei Systempunkte A, F sich beziehlich auf den gegebenen Bahnkurven α, φ , dessen Krümmungsmittelpunkte A, Φ sind, bewegen, wenn ferner die jeweilige Beschleunigung $F F_j$ des einen Systempunktes F sowie sein Bewegungssinn durch den Pfeil an der Bahnkurve φ bekannt ist.

Die auf $F\Phi$ gefällte Senkrechte $F_j F_n$ bestimmt durch ihren Fußpunkt F_n die Normalbeschleunigung $F F_n$ des Punktes F , dann ist, wenn durch $F F_v$ seine Geschwindigkeit dargestellt wird,

$$FF_n = \frac{FF_v^2}{F\Phi} \quad \text{und} \quad \overline{FF_v^2} = FF_n \cdot F\Phi.$$

Hiernach ergibt sich, indem wir die Strecke $\Phi I'$ um die Strecke $FF_v = FF_n$ verlängern, durch den über $\Phi I'_v$ beschriebenen, nach dem Bewegungssinn gelegenen Halbkreis, der die Tangente der Bahnkurve φ in dem Punkt I'_v trifft, die Geschwindigkeit FF'_v des Punktes I' nach Größe und Richtung. Wenn der Punkt I'_n innerhalb der Strecke $I'\Phi$ liegt, erhalten wir auch durch einen über $I'\Phi$ beschriebenen Halbkreis, der die auf $I'\Phi$ senkrechte Gerade $I'I'_n$ in dem Punkt V trifft, die Geschwindigkeit $FF'_v = I'V$; und indem wir FF'_v im Sinne des Uhrzeigers nach FF_v drehen, ergibt sich auf $I'\Phi$ die lotrechte Geschwindigkeit FF'_v des Punktes I' .

Nehmen wir an, daß die lotrechte Geschwindigkeit FF'_v und die Normalbeschleunigung FF_n oder die Beschleunigung FF'_j des Punktes I' bekannt sind, dann ist dadurch der Krümmungsmittelpunkt Φ der Bahnkurve φ bestimmt, der sich als Schnittpunkt der Geraden FF'_v mit der auf $I'_v I'_v$ Senkrechten $I'_v \Phi$ und auch mit der auf $I'V$ Senkrechten $V\Phi$ ergibt. Der momentane Pol \mathfrak{P} des bewegten Systems S ist der Schnittpunkt der beiden Normalen $I'\Phi$, AA der Bahnkurven φ , α ; und durch die zu FA Parallele $I'_v A_v$ wird auf AA die lotrechte Geschwindigkeit AA_v des Punktes A bestimmt, die dann im entgegengesetzten Sinn des Uhrzeigers um einen rechten Winkel gedreht die Geschwindigkeit AA_v ergibt.

Um nun die Konstruktion der Beschleunigung AA_j des Systempunktes A abzuleiten, denken wir uns dem bewegten System S eine Parallelbewegung erteilt, so daß allen Punkten dieses Systems eine der Geschwindigkeit FF_v entgegengesetzt gleiche Geschwindigkeit FF'_v und eine der Beschleunigung FF'_j entgegengesetzt gleiche Beschleunigung FF_j zugefügt wird. Dadurch wird der Punkt I' während zweier Zeitelemente in Ruhe versetzt und der Punkt A rotiert gleichzeitig um I' mit der auf $I'A$ senkrechten Geschwindigkeit AA_v , die als Resultante aus der ursprünglichen Geschwindigkeit AA_v und

der zugefügten, mit FF'_v gleichen und gleichgerichteten Geschwindigkeit AA'_c erfolgt. Einfacher ergibt sich die zugehörige auf AF liegende lotrechte Geschwindigkeit $A\mathfrak{U}_v$ durch die zu F'_vF' Parallele $A_v\mathfrak{U}_v$. Ferner ist die auf AF nach F gerichtete Strecke

$$A\mathfrak{U}_n = \frac{\overline{A\mathfrak{U}_v^2}}{AF} = \frac{\overline{A\mathfrak{U}_v^2}}{AF}$$

die Normalbeschleunigung des momentan um F rotierenden Punktes A . Hiernach erhalten wir durch die auf $F\mathfrak{U}_v$ Senkrechte $\mathfrak{U}_c\mathfrak{U}_v$, welche die Gerade FA in dem Punkte \mathfrak{U}_v trifft, die Normalbeschleunigung $A\mathfrak{U}_n = \mathfrak{U}_vA$. Diese für die Konstruktionen der Beschleunigungen wichtige Strecke $A\mathfrak{U}_n$ wollen wir die zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke nennen. Ist $A\mathfrak{U}_v < AF$, dann erhalten wir diese Hilfsstrecke $A\mathfrak{U}_n$ auch, indem wir über AF einen Halbkreis und um A mit dem Radius $A\mathfrak{U}_v$ einen Kreisbogen beschreiben, die sich in dem Punkt U schneiden, durch den Fußpunkt \mathfrak{U}_n der auf AF senkrechten Geraden $U\mathfrak{U}_n$; und in dieser Geraden muß der Endpunkt \mathfrak{U}_j der Beschleunigung $A\mathfrak{U}_j$ des um F rotierenden Punktes A liegen, die als Resultante aus der noch unbekanntem Beschleunigung AA_j und aus der zugefügten mit FF_j gleichen und gleichgerichteten Beschleunigung AA'_j erfolgt.

Wird nun auch auf AA die nach A gerichtete Normalbeschleunigung des Punktes A , nämlich die Strecke

$$AA_n = \frac{\overline{AA_v^2}}{AA}$$

konstruiert, so muß der Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A in der auf AA senkrechten Geraden $A_n n$ liegen; und um ihn zu bestimmen, ziehen wir von einem beliebigen Punkt x der Geraden $U\mathfrak{U}_n$ die Strecke xy gleich und gleichgerichtet zu A_jA oder FF'_j , fällen dann von dem Punkt y die auf AF Senkrechte $A_p a$, die zu $U\mathfrak{U}_n$ parallel ist und die Gerade $A_n n$ in A_j trifft. Dadurch wird das Parallelogramm $AA_j\mathfrak{U}_jA_j$ bestimmt, dessen Eckpunkt \mathfrak{U}_j in

der Geraden $U\mathfrak{A}_n$ liegt; und es ist $A\mathfrak{A}_j$ die resultierende Beschleunigung aus den Beschleunigungen AA_j, AA_j . Hiernach ist die Strecke AA_p die Projektion der Beschleunigung AA_j auf die Gerade AF und die Strecke $\mathfrak{A}_n A_p$ gleich der Projektion FF_p der Beschleunigung FF_j auf die Gerade AF ; folglich ist in geometrischer Summe

$$AA_p = A\mathfrak{A}_n + FF_p.$$

Aus dieser Ableitung ergibt sich die folgende Konstruktion der Beschleunigung AA_j des Punktes A .

Wir konstruieren die auf der Geraden AF liegende, zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}_n$, machen auf AF die Strecke $\mathfrak{A}_n A_p$ gleich und gleichgerichtet FF_p und errichten auf AF die Senkrechte $A_p\alpha$, die sich als sehr wichtigen geometrischen Ort des Endpunktes A_j der Beschleunigung AA_j erweist und deshalb durch Strichpunktierung ausgezeichnet ist. Ferner konstruieren wir vermittle der lotrechten Geschwindigkeit AA_v und des Krümmungsradius AA der Bahnkurve α die Normalbeschleunigung AA_n des Punktes A und errichten auf AA die Senkrechte $A_n n$, die $A_p\alpha$ in dem Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A trifft¹⁾.

Da das System S der Punkte A, F, \dots und das System S_j der Punkte A_j, F_j, \dots gleichartig ähnlich sind, so werden durch die Beschleunigungen AA_j, FF_j die Beschleunigungen aller Punkte des bewegten Systems S nach Größe und Richtung bestimmt; und damit ist der Beschleunigungszustand dieses Systems bekannt.

Wenn in Fig. 1 die Bahnkurven φ, α Kreise, also Φ, A ihre Mittelpunkte sind, dann können wir $\Phi F A A$ als ein Kurbelgetriebe betrachten, dessen Glied ΦA fest ist, und dann sind die Beschleunigungen aller Punkte der Koppel $F A$ durch die Beschleunigungen FF_j, AA_j bestimmt. Wenn ferner der Punkt A im Unendlichen liegt, die Bahnkurve α also eine Gerade ist, dann entsteht ein Schubkurbelgetriebe; und es ist der Schnittpunkt, den jene Gerade $A_p\alpha$ mit der Geraden α bildet, der Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A .

¹⁾ Vgl. Kinematik, S. 816.

III. Konstruktionen der Beschleunigungen zweier drehpaarig verbundenen ebenen Systeme.

In Fig. 2 werden zwei in einem ruhenden ebenen System bewegte Systeme S_1 , S_2 beziehlich durch die beiden vermittels einer Drehpaarung A verbundenen Glieder FA , LA vertreten, die ein Gelenk bilden. Die Bewegung des Gelenkes ist in drei unendlich nahe Lagen, also während zweier Zeitelemente, dadurch bestimmt, daß für den Punkt F die lotrechte Geschwindigkeit FF_v und die Beschleunigung FF_j , für den Punkt L die lotrechte Geschwindigkeit LL_v und die Beschleunigung LL_j gegeben sind.

Um die Beschleunigung AA_j des Gelenkpunktes A zu konstruieren, müssen wir erst seine lotrechte Geschwindigkeit AA_v bestimmen, indem wir zu FA die Parallele $F_v A_v$ und zu LA die Parallele $L_v A_v$ ziehen, die sich in dem Punkt A_v schneiden. Die Geraden FF_v , LL_v treffen die Gerade AA_v beziehlich in dem Pol \mathfrak{P}_1 des Systems S_1 und in dem Pol \mathfrak{P}_2 des Systems S_2 in Bezug auf das ruhende System. Die zu $F_v F$ Parallele $F_v \mathfrak{A}_v$ trifft AF in dem Punkt \mathfrak{A}_v und die zu $L_v L$ Parallele $L_v \mathfrak{A}_v$ trifft AL in dem Punkt \mathfrak{A}_v . Hiernach konstruieren wir in der angegebenen Weise, wie aus der analogen Bezeichnung erkenntlich ist, die zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}_n$ auf AF und die Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}_n$ auf AL . Ferner zeichnen wir die Projektion FF_p der Beschleunigung FF_j auf die Gerade AF und die Projektion LL_p der Beschleunigung LL_j auf die Gerade AL , machen auf AF die Strecke $\mathfrak{A}_n A'_p = FF_p$, auf AL die Strecke $\mathfrak{A}_n A''_p = LL_p$; dann ist der Schnittpunkt der auf AF Senkrechten $A'_p \alpha'$ und der auf AL Senkrechten $A''_p \alpha''$ der Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Gelenkpunktes A . Es ist zu bemerken, daß die Bestimmung dieser Beschleunigung AA_j außer den Geschwindigkeiten der Punkte F , L nur noch die Projektionen FF_p , LL_p ihrer Beschleunigungen erfordert. Durch die Beschleunigungen AA_j , FF_j und AA_j , LL_j sind beziehlich die Beschleunigungszustände der Systeme S_1 und S_2 bestimmt.

Die Krümmungsmittelpunkte Φ, A, \mathbf{A} der Bahnkurven φ, λ, α der Punkte F, L, A sind in bekannter Weise vermittle der zugehörigen lotrechten Geschwindigkeiten FF_v, LL_v, AA_v und Normalbeschleunigungen FF_n, LL_n, AA_n konstruiert.

Allgemeiner sind in Fig. 3 die beiden ebenen Systeme S_1, S_2 durch Glieder $F'G_1H_1, LG_2H_2$ vertreten, die vermittle der Glieder G_1G_2, H_1H_2 durch je zwei Drehpaarungen verbunden sind. Ferner sind die Glieder $F'G_1H_1, LG_2H_2$ in den Punkten F, L an die gegenüberliegenden Glieder $\Phi'F', A'L'$ eines Kurbelgetriebes $\Phi'F'LA'$, dessen Glied $\Phi'A'$ fest ist, drehpaarig angeschlossen. Dadurch werden bei der Bewegung dieses Kurbelgetriebes die Punkte F, L bestimmte Geschwindigkeiten und Beschleunigungen erhalten.

Ist in dem System S_2 der Punkt A konstruiert, dessen Bahnkurve in Bezug auf das System S_1 den Punkt F' des Systems S_1 als Krümmungsmittelpunkt besitzt; dann können wir FAL in drei unendlich nahen Lagen, also während zweier Zeitelemente, als ein Gelenk betrachten, dessen Glieder AF, AL die Systeme S_1, S_2 vertreten, und die Beschleunigungen aller Glieder dieses zusammengesetzten Mechanismus konstruieren.

Um nach der Bobillierschen Konstruktion jenen Punkt A zu bestimmen, ziehen wir die Verbindungsgerade $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ der Eckpunkte $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$ des von $G_1G_2H_2H_1$ gebildeten vollständigen Vierecks und die Gerade $\mathfrak{P}F'$, ferner machen wir den Winkel $F\widehat{\mathfrak{P}}q' = H_1\widehat{\mathfrak{P}}\mathfrak{Q}$, ziehen dann durch den Schnittpunkt \mathfrak{Q}' der beiden Geraden $\mathfrak{P}q', FH_1$ und den Punkt H_2 die Gerade $\mathfrak{Q}'H_2$, welche die Gerade $\mathfrak{P}F'$ in dem Punkt A trifft. Ebenso kann man auch in dem System S_1 den Punkt bestimmen, dessen Bahnkurve in Bezug auf S_2 den Punkt L als Krümmungsmittelpunkt besitzt, und dadurch ergibt sich ein zweites dem vorherigen gleichartiges Gelenk.

IV. Konstruktionen der Beschleunigungen zweier richtpaarig verbundenen ebenen Systeme.

In Fig. 4 sind zwei sich in einem ruhenden System bewegende Systeme S_1, S_2 durch eine Richtpaarung verbunden, die schematisch gezeichnet aus einer prismatischen Stange g und einer auf ihr gleitenden Hülse h besteht. Die Stange g vertritt das ebene System S_1 und die Hülse h das ebene System S_2 . Wegen der Allgemeinheit ist an der Stange g ein Arm befestigt mit einem Punkt F des ebenen Systems S_1 und ebenso an der Hülse h ein Arm mit einem Punkt L des ebenen Systems S_2 . In der Praxis wird man, um Pressungen zu vermeiden, den Punkt F in die Gerade g und den Punkt L in die Mitte der Hülse h legen.

Für den Punkt F ist die lotrechte Geschwindigkeit FF_v und die Beschleunigung FF_j , ebenso für den Punkt L die lotrechte Geschwindigkeit LL_v und die Beschleunigung LL_j gegeben. Um den Beschleunigungszustand des ebenen Systems S_1 zu bestimmen, müssen wir für den mit dem Punkt L momentan koinzidierenden Punkt des ebenen Systems S_1 die lotrechte Geschwindigkeit LL_v^1 und die Beschleunigung LL_j^1 konstruieren. Die gegebene lotrechte Geschwindigkeit LL_v ist die Resultante aus der lotrechten Geschwindigkeit LL_v^1 und der lotrechten Geschwindigkeit LL_v^{21} , mit der sich der Punkt L des ebenen Systems S_2 parallel zu der Geraden g in dem ebenen System S_1 bewegt. Demzufolge ist der Endpunkt L_v^1 der lotrechten Geschwindigkeit LL_v^1 der Schnittpunkt der durch F_v^1 zu FL Parallelen und der durch L_v zu g Senkrechten. Denn die Strecke $L_v^1 L_v$ ist gleich und gleichgerichtet jener lotrechten Geschwindigkeit LL_v^{21} ; und LL_v ist die eine Diagonale des Parallelogramms $LL_v^1 L_v L_v^{21}$. Die Geraden FF_v, LL_v^1 schneiden sich in dem Pol \mathfrak{P}_1 des ebenen Systems S_1 und die durch \mathfrak{P}_1 zu g Senkrechte trifft die Gerade LL_v in dem Pol \mathfrak{P}_2 des ebenen Systems S_2 in Bezug auf das ruhende ebene System.

Wenn wir zu $F'_v F$ die Parallele $L'_v \mathfrak{Q}_v$ bis an $F'L$ ziehen, ferner in bekannter Weise vermittels der Strecke $L \mathfrak{Q}_v$ auf der Geraden $F'L$ die zu dem Punkt L gehörende Hilfsstrecke $L \mathfrak{Q}_n$ konstruieren und die Strecke $\mathfrak{Q}_n L'_p$ gleich der Projektion $F'F'_p$ der Beschleunigung $F'F'_j$ machen, dann enthält die auf $F'L$ errichtete Senkrechte $L'_p l$ den Endpunkt L'_j der Beschleunigung LL'_j des mit dem Punkt L koinzidierenden Punktes des Systems S_1 . Nehmen wir an, es sei dieser Endpunkt L'_j ermittelt, und zeichnen den Schnittpunkt J der zur Geraden g Parallelen $L'_j J$ mit der zu ihr Senkrechten $L_j J$, dann ist in geometrischer Summe

$$LL_j = LL'_j + L'_j J + JL_j.$$

Demzufolge ist nach dem Coriolischen Satz die Strecke $L'_j J$ in Größe und Richtung gleich der Beschleunigung, mit der sich der Punkt L auf der zur Geraden g Parallelen bewegt, also mit der das System S_2 sich in dem System S_1 verschiebt, und ferner ist die Strecke JL_j in Größe und Richtung gleich der Zusatzbeschleunigung. Da diese gleich ist dem doppelten Produkt aus der Drehgeschwindigkeit des Systems S_1 um den Pol \mathfrak{P}_1 und der lotrechten Geschwindigkeit LL'_v , die der Punkt L in Bezug auf dieses System besitzt, so ist

$$JL_j = 2 \frac{LL'_v}{L \mathfrak{P}_1} LL'_v = 2 \frac{L \mathfrak{Q}_v}{LF} LL'_v.$$

Ziehen wir hiernach durch \mathfrak{Q}_v zu FL'_v die Parallele $\mathfrak{Q}_v Z$ bis an LL'_v ; dann ist die Zusatzbeschleunigung

$$JL_j = 2 \cdot LZ,$$

und ihre Richtung ist, dem Drehungssinn des Systems S_1 gemäß, gleich der Richtung der lotrechten Geschwindigkeit LL'_v .

Hiernach ergibt sich die Konstruktion der Beschleunigung LL'_j , indem wir die zur Geraden g senkrechte Strecke $L'_j J$ entgegengesetzt gleich $2 \cdot LZ$ machen und durch den Punkt J zur Geraden g die Parallele JL'_j ziehen, welche die auf $F'L$

Senkrechte $L_p^1 l$ in dem Punkt L_j^1 trifft. Durch die gegebene Beschleunigung FF_j^1 des Punktes F und die konstruierte Beschleunigung LL_j^1 des mit L koinzidierenden Punktes des Systems S_1 ist dann der Beschleunigungszustand dieses Systems bestimmt.

In analoger Weise ergibt sich auch der Beschleunigungszustand des Systems S_2 , indem wir die Beschleunigung FF_j^2 des mit dem Punkt F koinzidierenden Punktes des Systems S_2 konstruieren. Wenn aber die Konstruktion jener Beschleunigung LL_j^1 ausgeführt ist, dann erhalten wir die Beschleunigung FF_j^2 durch eine einfache konstruktive Ergänzung. Bei der Bestimmung des Punktes F_j^2 ist die entsprechende Zusatzbeschleunigung entgegengesetzt gleich der Zusatzbeschleunigung $2 \cdot LZ$, weil die Geschwindigkeit des Punktes F in Bezug auf das System S_2 entgegengesetzt gleich ist der Geschwindigkeit des Punktes L in Bezug auf das System S_1 , und weil beide Systeme gleiche und gleichsinnige Drehgeschwindigkeiten besitzen. Ferner ist die Beschleunigung des Punktes F in Bezug auf das System S_2 entgegengesetzt gleich der Beschleunigung des Punktes L in Bezug auf das System S_1 .

Machen wir nun $F_j I \# JL_j$ und $I F_j^2 \# L_j^1 J$, dann ergibt sich die Beschleunigung FF_j^2 für F als Punkt des Systems S_2 , dessen Beschleunigungszustand demnach durch die beiden Beschleunigungen FF_j^2, LL_j^1 bestimmt ist.

Die Krümmungsmittelpunkte Φ, A, A^1 der Bahnkurven $\varphi, \lambda, \lambda^1$ der Punkte F, L und des mit L koinzidierenden Punktes des Systems S_1 sind vermittle der entsprechenden lotrechten Geschwindigkeiten FF_v, LL_v, LL_v^1 und der entsprechenden Normalbeschleunigungen FF_n, LL_n, LL_n^1 in bekannter Weise konstruiert.

V. Konstruktionen der Beschleunigungen eines dreifach geführten ebenen Systems.

1. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems, das mit drei führenden ebenen Systemen drehpaarig verbunden ist.

Die Bewegung dieser vier ebenen Systeme wird dadurch verwirklicht, daß in Fig. 5 das Glied ABC , welches das geführte System S vertritt, mit den drei Gliedern AF , BL , CO , welche die drei führenden ebenen Systeme S_1 , S_2 , S_3 vertreten, in den Punkten A , B , C durch je eine Drehpaarung verbunden ist, und daß für die Punkte F , L , O beziehlich die lotrechten Geschwindigkeiten FF_v , LL_v , OO_v sowie die Beschleunigungen FF_j , LL_j , OO_j gegeben sind. Denn dadurch werden je drei unendlich nahe Lagen der vier zwangsläufig bewegten Systeme während zweier Zeitelemente bestimmt.

Es soll nun die klassische Aufgabe gelöst werden, den Beschleunigungszustand des Systems S konstruktiv zu bestimmen, und damit ergeben sich auch die Beschleunigungszustände der drei führenden Systeme S_1 , S_2 , S_3 . Diese Aufgabe enthält viele spezielle Fälle, von denen manche in der Praxis bei zusammengesetzten Mechanismen vorkommen.

Zuerst ist der Pol \mathfrak{P} des Systems S in Bezug auf das ruhende System, und ferner sind die lotrechten Geschwindigkeiten AA_v , BB_v , CC_v der Punkte A , B , C zu konstruieren: damit sind dann, wenn auch nur eine dieser lotrechten Geschwindigkeiten ermittelt ist, die Geschwindigkeitszustände der vier Systeme S , S_1 , S_2 , S_3 bekannt.

Die durch die Punkte F_v , L_v , O_v gehenden, beziehlich zu AF , BL , CO parallelen Geraden $b'c'$, $a'c'$, $a'b'$ bilden ein Dreieck $a'b'c'$, das zu dem durch Verlängerung der Geraden AF , BL , CO gebildeten Dreieck abc homothetisch ähnlich ist. Demnach treffen sich die drei Geraden aa' , bb' , cc' in dem Ähnlichkeitspunkt, dem Pol \mathfrak{P} des Systems S^1). Die lotrechten Geschwindigkeiten AA_v , BB_v , CC_v ergeben sich dann durch

1) Kinematik, S. 590, Fig. 614.

die Schnittpunkte A_v, B_v, C_v , in denen die Geraden $A\mathfrak{P}, B\mathfrak{P}, C\mathfrak{P}$ beziehlich die Geraden $b'c', a'c', a'b'$ treffen; und das strichzweipunktirte Dreieck $A_v B_v C_v$ ist dem Dreieck ABC homothetisch ähnlich und der Pol \mathfrak{P} ist der zugehörige Ähnlichkeitspunkt.

Die zu $F_v F, L_v L, O_v O$ Parallelen $A_v \mathfrak{A}_v, B_v \mathfrak{B}_v, C_v \mathfrak{C}_v$ bestimmen auf den Geraden AF, BL, CO die Strecken $A\mathfrak{A}_v, B\mathfrak{B}_v, C\mathfrak{C}_v$, durch die sich in bekannter Weise auf diesen Geraden die zu den Punkten A, B, C gehörenden Hilfsstrecken $A\mathfrak{A}_n, B\mathfrak{B}_n, C\mathfrak{C}_n$ ergeben. Indem wir an diese Hilfsstrecken die entsprechenden Projektionen FF_p, LL_p, OO_p der Beschleunigungen FF_j, LL_j, OO_j antragen, also $\mathfrak{A}_n A_p = FF_p, \mathfrak{B}_n B_p = LL_p, \mathfrak{C}_n C_p = OO_p$ machen, erhalten wir die beziehlich auf AF, BL, CO Senkrechten $A_p a, B_p b, C_p c$, auf denen die Endpunkte A_j, B_j, C_j der Beschleunigungen der Punkte A, B, C liegen; und diese Endpunkte bilden ein dem Dreieck ABC ähnliches, durch Punktierung ausgezeichnetes Dreieck $A_j B_j C_j$.

Unter den unendlich vielen solcher ähnlicher Dreiecke, deren homologen Eckpunkte in den Geraden $A_p a, B_p b, C_p c$ liegen und als Phasen eines ähnlich-veränderlichen Dreiecks auf diesen Geraden ähnliche Punktreihen bilden ¹⁾, ist nun dasjenige Dreieck $A_j B_j C_j$ zu bestimmen, welches die folgende Bedingung erfüllt. Ist zu $B_v B$ die Parallele $A_v \mathfrak{A}'_v$ bis an AB gezogen, ist ferner mittels der Strecke $A\mathfrak{A}'_v$ die zu dem Punkt A gehörende Hilfsstrecke $A\mathfrak{A}'_n$ auf AB bestimmt und sind A'_p, B'_p die Projektionen von den Punkten A_j, B_j auf die Gerade AB , dann muß die Strecke $\mathfrak{A}'_n A'_p = BB'_p$ sein.

Um unter dieser Bedingung das Dreieck $A_j B_j C_j$ zu konstruieren, können wir auf zweierlei Weise verfahren. Erstens indem wir den selbstentsprechenden Punkt zweier in einer Geraden liegenden ähnlichen Punktreihen bestimmen, und

¹⁾ Siehe Burmeister, Kinematisch-geometrische Untersuchung der Bewegung ähnlich-veränderlicher ebener Systeme. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1874, Bd. XIX, S. 154, und Kinematik, S. 875.

zweitens indem wir einen geradlinigen geometrischen Ort für einen der Eckpunkte des Dreiecks $A_j B_j C_j$ konstruieren.

Erste Konstruktion des Dreiecks $A_j B_j C_j$. Wir zeichnen zu dem Dreieck ABC zwei ähnliche Dreiecke $A^x B^x C^x$, $A^y B^y C^y$, deren homologe Eckpunkte respektive auf den Geraden $A_p a$, $B_p b$, $C_p c$ liegen. Die Konstruktion dieser ähnlichen Dreiecke wollen wir zur besseren Übersicht getrennt von Fig. 5 in der Fig. 5a ausführen, wo ein zu jenem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ gezeichnet ist. Der Einfachheit wegen legen wir z. B. den Eckpunkt A^x in den Schnittpunkt der Geraden a , b , machen dann den Winkel $b \widehat{A^x C^x} = B' \widehat{A' C'}$, wodurch der Eckpunkt C^x in der Geraden c bestimmt wird, und zeichnen das zu $A'B'C'$ ähnliche Dreieck $A^x B^x C^x$, dessen Eckpunkt B^x sich dann in der Geraden b befindet. Ferner legen wir den Eckpunkt A^y in den Schnittpunkt der Geraden a , c , machen den Winkel $c \widehat{A^y B^y} = C' \widehat{A' B'}$, wodurch der Eckpunkt B^y in der Geraden b bestimmt wird, und zeichnen das zu $A'B'C'$ ähnliche Dreieck $A^y B^y C^y$, dessen Eckpunkt C^y dann in der Geraden c liegt. Da aber der Eckpunkt C^y dieses Dreiecks nicht verwendet wird, so genügt die Bestimmung des Punktes B^y . Es gibt sechs solche ähnliche Dreiecke, die mit je einem Eckpunkt in einem Schnittpunkt von je zweien der drei Geraden a , b , c liegen.

Um ein beliebiges zu $A'B'C'$ ähnliches Dreieck $A^z B^z C^z$ zu zeichnen, dessen Eckpunkte beziehlich auf den Geraden a , b , c liegen, legen wir das Dreieck $A'B'C'$ mit den Eckpunkten A' , C' beliebig auf die Geraden a , c . Wir betrachten dann den auch mit A^z bezeichneten Punkt A' als fest und das Dreieck $A^z B^z C^z$ als ähnlich-veränderlich¹⁾. Wird nun der Eckpunkt C^z auf der Geraden c bewegt, dann bewegt sich der Punkt B^z auf einer Geraden $B'\beta'$, die mit der Geraden c den Winkel $w = C' \widehat{A' B'}$ bildet und die Gerade b in dem Punkt B^z

1) Kinematik, S. 875.

trifft, somit erhalten wir das gezeichnete ähnliche Dreieck $A^z B^z C^z$, dessen drei Eckpunkte auf den drei Geraden a, b, c liegen.

In Fig. 5 sind nun die beiden zu dem Dreieck ABC ähnlichen Dreiecke $A^x B^x C^x, A^y B^y C^y$ gezeichnet, deren homologe Eckpunkte beziehlich auf den Geraden $A_p a, B_p b, C_p c$ liegen. Da die Punktreihen A^x, A^y, \dots und B^x, B^y, \dots ähnlich sind, so sind auch ihre Projektionen A_p^x, A_p^y, \dots und B_p^x, B_p^y, \dots auf die Gerade AB ähnliche Punktreihen. Wird auf AB die Strecke $\mathfrak{A}'_n A^x_x = BB^y_p$ und $\mathfrak{A}'_n A^y_x = BB^x_p$ gemacht, dann sind auch die Punktreihen A^x_p, A^y_p, \dots und A^x_x, A^y_x, \dots ähnlich und durch die entsprechenden Punktpaare $A^x_p A^y_p, A^x_x A^y_x$ bestimmt. Demnach ist der selbstentsprechende Punkt A'_p dieser beiden auf der Geraden AB liegenden Punktreihen die Projektion des auf der Geraden $A_p a$ befindlichen Endpunktes A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A .

Um diesen selbstentsprechenden Punkt A'_p zu konstruieren, projizieren wir auf eine beliebige zu AB Parallele p die Punkte A^x, A^y nach A^x, A^y , ziehen die Geraden $A^x A^x_x, A^y A^y_x$ und füllen von ihrem Schnittpunkt M auf AB die Senkrechte, die dann AB in dem selbstentsprechenden Punkt A'_p trifft und auf der Geraden $A_p a$ den Punkt A_j bestimmt. Ferner machen wir auf AB die Strecke $BB'_p = \mathfrak{A}'_n A'_p$, und demnach ist der Punkt B'_p die Projektion von dem auf der Geraden $B_p b$ liegenden Punkt B_j . Indem wir nun zu dem Dreieck ABC das ähnliche Dreieck $A_j B_j C_j$ konstruieren, das durch Punktierung ausgezeichnet ist, erhalten wir den Eckpunkt C_j , der in der Geraden $C_p c$ liegen muß, und dadurch ist eine Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung gegeben. Somit ergeben sich die Beschleunigungen AA_j, BB_j, CC_j der Punkte A, B, C des Systems S , dessen Beschleunigungszustand durch je zwei dieser Beschleunigungen bestimmt ist.

Zweite Konstruktion des Dreiecks $A_j B_j C_j$. Wir betrachten die Punkte B^x, B^y als zwei auf der Geraden $B_p b$

beliebig angenommene Endpunkte zweier dem Punkte B zugewiesenen Beschleunigungen, dann sind die Punkte A_{π}^x, A_{π}^y , die sich vorher durch die Projektionen B_p^x, B_p^y ergeben haben, die Projektionen von den auf $A_p a$ liegenden Endpunkten $A^{(x)}, A^{(y)}$ der entsprechenden Beschleunigungen des Punktes A . Infolge der ähnlichen Punktreihen $A_{\pi}^x, A_{\pi}^y, \dots$ und B_p^x, B_p^y, \dots sind auch die Punktreihen $A^{(x)}, A^{(y)}, \dots$ und B^x, B^y, \dots ähnlich. Wenn wir nun die zu dem Dreieck ABC ähnlichen Dreiecke $A^{(x)}B^xC^{(x)}, A^{(y)}B^yC^{(y)}$ zeichnen und als Phasen eines ähnlich-veränderlichen Dreiecks betrachten, so folgt, weil die Eckpunkte $A^{(x)}, A^{(y)}, \dots$ und die Eckpunkte B^x, B^y, \dots auf den Geraden $A_p a, B_p b$ ähnliche Punktreihen bilden, daß auch die Eckpunkte $C^{(x)}, C^{(y)}, \dots$ eine ähnliche Punktreihe auf einer Geraden i_c erzeugen, die durch die Punkte $C^{(x)}, C^{(y)}$ bestimmt wird und ein geometrischer Ort für den Punkt C_j ist. Demnach ergibt sich dieser Punkt C_j als Schnittpunkt der Geraden i_c und $C_p c$. Dann ist das zu ABC ähnliche Dreieck $A_j B_j C_j$, dessen beiden andere Eckpunkte A_j, B_j beziehlich auf den Geraden $A_p a, B_p b$ liegen, zu konstruieren. Dies kann, wie in Fig. 5 a, vermittels eines ähnlichen Dreiecks ausgeführt werden, von dem C_j der eine Eckpunkt ist und ein anderer Eckpunkt auf einer der Geraden $A_p a$ oder $B_p b$, die ihm entspricht, beliebig angenommen wird. Als Kontrolle für die Richtigkeit der Zeichnung ist zu beachten, daß $C^{(x)}C_jC^{(y)} \sim A^{(x)}A_jA^{(y)}$ oder $B^x B_j B^y$ ist.

Zur Bestimmtheit der konstruierten Beschleunigungen AA_j, BB_j, CC_j der Punkte A, B, C des Systems S sind also außer den lotrechten Geschwindigkeiten FF_v, LL_v, OO_v nur die Projektionen FF_p, LL_p, OO_p der Beschleunigungen FF_j, LL_j, OO_j erforderlich. Wird jede dieser Beschleunigungen in zwei senkrechte Komponenten zerlegt, so daß diese Projektionen die beziehlich in den Geraden AF, BL, CO liegenden Komponenten sind, dann ergibt sich, daß der Beschleunigungszustand des Systems S von den auf diesen Geraden

senkrechten Komponenten unabhängig ist. Ferner werden die Beschleunigungszustände der Systeme S_1, S_2, S_3 beziehlich durch die Beschleunigungen $AA_j, FF_j; BB_j, LL_j; CC_j, OO_j$ bestimmt. Hiernach ist schließlich dieses klassische kinematische Problem erstens vermittels der Bestimmung des selbstentsprechenden Punktes zweier auf einer Geraden liegenden ähnlichen Punktreihen und zweitens vermittels der Konstruktion eines geradlinigen geometrischen Ortes gelöst.

Die konstruierten Krümmungsmittelpunkte Φ, Λ, Ω der Bahnkurven φ, λ, ω der Punkte F, L, O sind durch ihre entsprechenden lotrechten Geschwindigkeiten FF_v, LL_v, OO_v und Normalbeschleunigungen FF_n, LL_n, OO_n bestimmt; ebenso auch die konstruierten Krümmungsmittelpunkte A, B, Γ durch ihre entsprechenden lotrechten Geschwindigkeiten AA_v, BB_v, CC_v und Normalbeschleunigungen AA_n, BB_n, CC_n .

Der allgemeinste Fall eines dreifach geführten ebenen Systems S ist dadurch gegeben, daß sich in jedem der drei führenden Systeme S_1, S_2, S_3 eine Kurve befindet und auf jeder dieser drei Kurven ein Punkt des geführten Systems S bewegt wird. Wenn dann für die jeweiligen Krümmungsmittelpunkte dieser drei Kurven die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bekannt sind, so kann die Konstruktion der Beschleunigungen der drei Punkte des Systems S ebenso wie vorher ausgeführt werden. Um diese Bewegung zu verwirklichen, muß jedes der drei führenden Glieder eine Nut besitzen, deren Mittellinie die betreffende Kurve ist, und das geführte Glied muß mit drei zylindrischen Zapfen versehen sein, die in diesen Nuten gleiten.

Spezielle Fälle. Bei dem in Fig. 6 gezeichneten Dreispannmechanismus¹⁾ ist das Glied ABC durch die Glieder AF, BL, CO vermittels Drehpaarungen mit den drei bewegten Gliedern $\Phi F', F'L, A'L$ eines Kurbelgetriebes verbunden, dessen Glied $\Phi A'$ fest ist. Wenn nun z. B. die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Punktes F' bekannt sind, dann sind

¹⁾ Kinematik, S. 422.

die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte F, L, O und der Punkte A, B, C bestimmt.

Es erfolgen mannigfaltige Bewegungen des Gliedes ABC , wenn z. B. die Punkte F, L, O sich auf Kreisen φ, λ, ω gleichförmig in gegebenen Verhältnissen ihrer Geschwindigkeiten und in verschiedenen Phasen bewegen. Dies kann dadurch bewirkt werden, daß die Glieder AF, BL, CO in den Punkten F, L, O mit je einem Rade eines dreiräderigen Vorgelege drehpaarig verbunden sind.

In dem speziellen Fall, wenn von den Dreipunkten F, L, O z. B. der Punkt F fest ist, also keine Geschwindigkeit und keine Beschleunigung besitzt, ergibt sich der Pol \mathfrak{P} des Systems S als Schnittpunkt der Geraden AF, cc' , und die lotrechte Geschwindigkeit des Punktes A befindet sich auf der Geraden AF . Dadurch wird auf AF die Normalbeschleunigung des Punktes A bestimmt, und die in deren Endpunkt auf AF errichtete Senkrechte enthält dann den Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A_j . Demnach ist in bekannter Weise das zu ABC ähnliche Dreieck $A_j B_j C_j$ zu konstruieren, dessen Eckpunkt A_j in dieser Senkrechten und dessen Eckpunkte B_j, C_j sich in jenen Geraden $B_p b, C_p c$ befinden. Für diesen speziellen Fall hat mein Kollege Herr Professor W. Lynen die Konstruktion dieser Beschleunigungen vermittels des geradlinigen geometrischen Ortes zuerst angegeben.

Dieser spezielle Fall kommt bei den in Fig. 7 schematisch gezeichneten Mechanismus vor, der den Hauptbestandteil der bei den Lokomotiven angewendeten Kulissensteuerungen von Stephenson und Allan bildet. Das als fest betrachtete Glied OP vertritt die Lokomotive, und der Drehpunkt P die Triebwelle mit den auf ihr festgekeilten beiden Exzentern, deren Mittelpunkte F, L sind. Das Glied ABC oder System S vertritt die Kulissee, die durch die Exzenterstangen AF, BL mit den Exzentern drehpaarig verbunden ist; und durch das Glied CO ist die Kulissee in dem festgestellten Punkt O drehbar aufgehängt. Die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte F, L sind durch die Drehung der Treibwelle bestimmt.

In Fig. 8 ist der Punkt F fest und der Mittelpunkt des Kreises α , auf dem sich der Punkt A bewegt. Für die Punkte L, O sind beziehlich die lotrechten Geschwindigkeiten LL_v, OO_v und Beschleunigungen LL_j, OO_j gegeben; oder sie sind auch bestimmt, wenn die Glieder BL, CO in den Punkten L, O drehpaarig mit je einem bewegten Gliede eines Getriebes verbunden werden.

Bei der Heusinger- (Walschaert-) Kulissensteuerung kommt der in Fig. 9 schematisch gezeichnete Bestandteil vor. Der Punkt A wird vermittelt einer in ihm drehpaarig mit dem geradlinigen Glied ABC verbundenen Stange g , die in einer festen Hülse h gleitet, auf einer Geraden α geführt; demnach ist das zugehörige unendlich lange Glied AF_∞ durch die Stange g ersetzt, und der Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A liegt in der mit der Stangenachse identischen Geraden α . Für die Punkte L, O der Glieder BL, CO werden die lotrechten Geschwindigkeiten LL_v, OO_v und die Beschleunigungen LL_j, OO_j durch den Mechanismus der Kulissensteuerung bestimmt, Derselbe Bestandteil befindet sich auch in dem Interferenzmechanismus¹⁾, bei dem die Glieder BL, CO in den Punkten L, O mit je einem von zwei ineinandergreifenden Zahnrädern verbunden sind.

Wird der Punkt A des Gliedes ABC anstatt wie in Fig. 8 auf einen Kreis allgemeiner auf einer gegebenen Bahnkurve α geführt, für die der jeweilige Krümmungsmittelpunkt A bekannt ist, dann kann der Krümmungsradius AA als ein sich um A in je drei unendlich nahen Lagen drehendes Glied betrachtet werden. Die Konstruktion der Beschleunigungen des Gliedes ABC kann dann, wie vorhin angegeben ist, ausgeführt werden. Die Führung des Punktes A auf einer Bahnkurve α wird dadurch bewirkt, daß ein zylindrischer Zapfen A des Gliedes ABC in einer festen Nut gleitet, deren Mittellinie die Bahnkurve α ist.

¹⁾ Kinematik, S. 544.

2. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems, das mit zwei führenden ebenen Systemen drehpaarig und mit einem richtpaarig verbunden ist.

Die in Fig. 10 gezeichnete Anordnung unterscheidet sich von der in Fig. 5 behandelten allgemeineren dadurch, daß das ebene System S mit dem ebenen System S_3 nicht drehpaarig, sondern vermittels einer Stange g und einer auf ihr gleitenden Hülse h richtpaarig, mit den beiden anderen ebenen Systemen S_1, S_2 wie dort in den Punkten A, B drehpaarig verbunden ist. Demnach besteht das Glied, welches das System S vertritt, aus den Stangen g und AB , und ferner besteht das Glied, welches das System S_3 vertritt, aus der Hülse h mit dem angefügten Arm NO . Der unendlich ferne Punkt C_∞ der auf g senkrechten Geraden NO ist der Anschlußpunkt des Systems S an das System S_3 . Für die drei Punkte F, L, O sind die lotrechten Geschwindigkeiten FF_v, LL_v, OO_v sowie die Beschleunigungen FF_j, LL_j, OO_j gegeben. Der Pol \mathfrak{P} des Systems S , die lotrechten Geschwindigkeiten AA_v, BB_v der Punkte A, B und die auf AF, BL Senkrechten $A_p a, B_p b$, in denen beziehlich die Endpunkte A_j, B_j der Beschleunigungen AA_j, BB_j der Punkte A, B liegen, sind ebenso wie in Fig. 5 konstruiert, wie es auch aus der gleichen Bezeichnungsweise ersichtlich ist.

In diesem Fall kommt nun die Beschleunigung des mit dem Punkt O momentan koinzidierenden Punktes des Systems S mit in Betracht. Die lotrechte Geschwindigkeit OO_v^s dieses Punktes in Bezug auf das ruhende System ergibt sich durch den Schnittpunkt O_v^s der Geraden $O\mathfrak{P}$ mit der durch O_v gehenden zu ab Parallelen $a'b'$ und die Strecke $O_v^s O_v$ ist nach Größe und Richtung gleich der lotrechten Geschwindigkeit OO_v^3 , mit der sich der Punkt O des Systems S_3 in dem System S parallel zu der Geraden g bewegt.

Um nun den auf OC senkrechten geometrischen Ort $O_p^s o$ des Endpunktes O_j^s der Beschleunigung OO_j^s des mit O koinzidieren-

den Punktes des Systems S zu bestimmen, nehmen wir an, daß dieser Endpunkt O_j^s bekannt sei, ziehen durch O_j^s zur Geraden g die Parallele $O_j^s J$ und durch O_j die zur Geraden g Senkrechte $O_j J$, dann ist in geometrischer Summe

$$OO_j = OO_j^s + O_j^s J + JO_j.$$

Demzufolge ist nach dem Coriolischen Satz die Strecke $O_j^s J$ nach Größe und Richtung die Beschleunigung des Punktes O in Bezug auf das System S und die Strecke JO_j nach Größe und Richtung die Zusatzbeschleunigung

$$z = 2 \frac{OO_v^s, OO_v^3}{O \mathfrak{P}}.$$

Indem wir zu $\mathfrak{P}O_v$ die Parallele $O_v^s Z$ bis an die Gerade NO ziehen, ergibt sich $z = 2 \cdot OZ$. Wenn wir die Strecke $O_j J$ entgegengesetzt gleich der Zusatzbeschleunigung $2 \cdot OZ$ machen und von dem Punkt J auf NO die Senkrechte Jo fällen, deren Fußpunkt O_p^s ist, dann enthält diese Senkrechte $O_p^s o$ den Endpunkt O_j^s der Beschleunigung OO_j^s .

Hiernach ist ebenso wie in Fig. 5, und wie es auch aus der analogen Bezeichnungsweise erkenntlich ist, das zu dem Dreieck ABO ähnliche Dreieck $A_j B_j O_j^s$ in zweierlei Weise konstruiert, dessen Eckpunkte A_j, B_j, O_j^s beziehlich auf den Geraden $A_p a, B_p b, O_p^s o$ liegen. Durch zwei von den drei Beschleunigungen AA_j, BB_j, OO_j^s der Punkte A, B und des mit O koinzidierenden Punktes des Systems S ist sein Beschleunigungszustand bestimmt; und ferner sind durch die Beschleunigungen AA_j, FF_j und BB_j, LL_j beziehlich die Beschleunigungszustände der Systeme S_1, S_2 bestimmt. Da von dem System S_3 nur die Beschleunigung OO_j des Punktes O bekannt, erfordert die Bestimmung des Beschleunigungszustandes dieses Systems noch die besondere Konstruktion der Beschleunigung eines zum System S_3 gehörenden Punktes, der mit einem Punkt

des Systems S , z. B. mit dem Punkt B , momentan koinzidiert. Diese Konstruktion wird, wie es S. 473 und in Fig. 4 angegeben ist, ausgeführt, indem wir die Strecke $B_j I \# J O_j$ und die Strecke $I B_j^3 \# O_j^3 J$ machen, dann ist $B B_j^3$ die Beschleunigung des mit B koinzidierenden Punktes des Systems S_3 .

Die in Fig. 11 gezeichnete spezielle Anordnung kommt in der Heusinger von Waldegg'schen Kulissensteuerung als Bestandteil vor. Der Punkt A wird wie in Fig. 9 vermittle einer in ihm drehpaarig mit dem Gliede AB verbundenen Stange g , die in einer festen Hülse h gleitet, auf einer Geraden α geführt. Das Glied AB gleitet als Stange in einer Hülse h' , auf deren Mitte der Punkt O liegt; demnach wird das zugehörige unendlich lange Glied $A F_\infty$ durch die Stange g und das unendlich lange Glied $O C_\infty$ durch die Hülse h' ersetzt. Der Endpunkt der Beschleunigung des Punktes A liegt in der Geraden α . Für die Punkte L, O werden die lotrechten Geschwindigkeiten LL_v, OO_v und die Beschleunigungen LL_j, OO_j durch den Mechanismus bestimmt.

Wenn das dreifach geführte ebene System S nicht nur mit einem, sondern mit zweien oder dreien führenden ebenen Systemen richtpaarig verbunden ist, so muß in der angegebenen Weise je eine entsprechende Gerade konstruiert werden, in welcher der Endpunkt der Beschleunigung des betreffenden koinzidierenden Punktes liegt.

In Fig. 12 ist das System S mit jedem der drei führenden Systeme S_1, S_2, S_3 richtpaarig verbunden. Das aus drei Stangen bestehende Glied vertritt das System S , und die drei auf diesen Stangen gleitenden Hülsen vertreten die führenden Systeme S_1, S_2, S_3 . Diese Hülsen sind vermittle Drehpaarungen in den Punkten F, L, O mit je einem beweglichen Gliede eines Kurbelgetriebes $\Phi' F' L' A'$, dessen Glied $\Phi' A'$ fest verbunden. Dieser Mechanismus, bei dem die Anschlußpunkte $A_\infty, B_\infty, C_\infty$ des Systems S an die Systeme S_1, S_2, S_3 im Unendlichen liegen, ist ein spezieller Fall des in Fig. 6 gezeichneten Dreispannmechanismus.

3. Konstruktionen der Beschleunigungen eines ebenen Systems, das mit zwei führenden ebenen Systemen drehpaarig verbunden ist und von dem ein Punkt auf einer Geraden eines führenden Systems bewegt wird.

In Fig. 13 ist das Glied ABC in den Punkten B, C mit den Gliedern BL, CO drehpaarig verbunden und diese Glieder vertreten die ebenen Systeme S, S_2, S_3 . Ferner wird der Punkt A des ebenen Systems S auf einer Geraden g' eines ebenen Systems S' bewegt, was dadurch bewirkt wird, daß dieses System durch eine zu der Geraden g' parallelen Stange g vertreten ist, die in einer Hülse h des Gliedes AF_∞ gleitet, welches das in dem Punkt A mit dem Gliede ABC drehpaarig verbundene ebene System S_1 vertritt. In diesem System befindet sich der Punkt F_∞ auf der durch A gehenden zu g senkrechten Geraden im Unendlichen. Das System S' kann anstatt durch die Stange g auch durch ein Glied mit einer geradlinigen Nut, deren Mittellinie die Gerade g' ist, vertreten werden, und in dieser Nut muß ein bei A angebrachter zylindrischer Zapfen gleiten, dann ist das Glied AF_∞ nicht vorhanden und die beiden Systeme S, S' sind vermittels einer höheren kinematischen Elementenpaarung verbunden.

Für die Punkte L, O der führenden Systeme S_2, S_3 sind beziehlich die lotrechten Geschwindigkeiten LL_v, OO_v und die Beschleunigungen LL_j, OO_j gegeben. Von dem führenden System S' nehmen wir an, daß sein Pol \mathfrak{P}' sowie die lotrechte Geschwindigkeit AA'_v und die Beschleunigung AA'_j seines momentan mit dem Punkt A des Systems koinzidierenden Punktes bekannt sind.

Die durch den Punkt A'_v gehende zu g' senkrechte und zu AF_∞ parallele Gerade $A'_v c'$ trifft die von dem Punkt A nach dem noch unbekanntem Pol \mathfrak{P} des Systems S gehende Gerade in dem Endpunkt A_v der lotrechten Geschwindigkeit AA_v des Punktes A in Bezug auf das ruhende System, und die Strecke $A'_v A_v$ ist nach Größe und Richtung gleich der lotrechten Geschwindigkeit AA_v^s , mit der sich der Punkt A auf der Geraden g' in Bezug auf das System S' bewegt. Hier-

nach ergibt sich der Pol \mathfrak{P} als Ähnlichkeitspunkt der homothetischen ähnlichen Dreiecke abc und $a'b'c'$, die von den verlängerten Geraden AF_∞ , BL , CO und von den durch die Punkte A_v , L_v , O_v gehenden beziehlich zu diesen Geraden parallelen Geraden gebildet werden. Dadurch ergeben sich dann die lotrechten Geschwindigkeiten AA_v , BB_v , CC_v der Punkte A , B , C .

Um nun die Beschleunigungen AA_j , BB_j , CC_j dieser Punkte zu konstruieren, nehmen wir an, daß der Punkt A_j bekannt sei, ziehen von ihm die zur Geraden g' Parallele A_jJ oder zur Geraden AF_∞ Senkrechte, ferner durch den Punkt A_j die zur Geraden g' Senkrechte A_jJ , dann ist in geometrischer Summe

$$AA_j = AA_j + A_jJ + JA_j.$$

Demzufolge ist nach dem Coriolischen Satz die Strecke JA_j nach Größe und Richtung gleich der Beschleunigung des Punktes A in Bezug auf das System S' und die Strecke A_jJ nach Größe und Richtung gleich der Zusatzbeschleunigung

$$z = 2 \frac{AA'_v \cdot A_v A_v^S}{A \mathfrak{P}'}$$

Indem wir zu $\mathfrak{P}'A_v^S$ die Parallele A'_vZ bis an die Gerade AF_∞ ziehen, ergibt sich $z = 2 \cdot AZ$. Wenn wir ferner die Strecke $A_jJ \# 2 \cdot AZ$ machen und von dem Punkt J auf die Gerade AF_∞ die Senkrechte Ja ziehen, deren Fußpunkt A_p ist, dann enthält diese Senkrechte $A_p a$ den Endpunkt A_j der Beschleunigung AA_j des Punktes A^1).

Die auf BL Senkrechte $B_p b$ und die auf CO Senkrechte $C_p c$, in denen beziehlich die Endpunkte B_j , C_j der Beschleunigungen BB_j , CC_j liegen, sind in der angegebenen Weise konstruiert. Es sind hierauf hinweisend eingezeichnet die auf den Geraden BL , CO liegenden Strecken $B\mathfrak{B}_v$, $C\mathfrak{C}_v$, welche

1) Vermittels dieser Konstruktion kann auch die Beschleunigung des Schnittpunktes zweier in einer Ebene bewegten Geraden bestimmt werden.

die zu den Punkten B, C gehörenden Hilfsstrecken $B\mathfrak{B}_n, C\mathfrak{C}_n$ bestimmen, sowie die zu den Beschleunigungen LL_j, OO_j gehörenden Projektionen LL_p, OO_p , die beziehlich durch Antragung nach $\mathfrak{B}_n B_p$ und nach $\mathfrak{C}_n C_p$ die Fußpunkte B_p, C_p jener Senkrechten ergeben. In bekannter Weise ist dann das zu ABC ähnliche Dreieck $A_j B_j C_j$ konstruiert, dessen Eckpunkte auf den betreffenden Geraden $A_p a, B_p b, C_p c$ liegen.

Somit sind die Beschleunigungszustände der Systeme S, S_2, S_3 bestimmt; aber der Beschleunigungszustand des Systems S_1 erfordert die besondere in Fig. 4 angegebene Konstruktion, die erst dann ausgeführt werden kann, wenn außer der Beschleunigung AA_j des mit dem Punkt A koinzidierenden Punktes des Systems S' noch die Beschleunigung eines anderen Punktes desselben bekannt ist.

In Fig. 14 ist als spezieller Fall der Hauptbestandteil der Collmannschen Steuerung¹⁾ schematisch gezeichnet. Die Koppel $F'L'$ eines Kurbelgetriebes $\mathcal{P}'F'L'A'$ mit dem festen Gliede $\mathcal{P}'A'$ ist die Stange g , auf der die Hülse h des Gliedes AF_∞ gleitet. Von den außer dem Gliede AF_∞ , mit dem hier geradlinig gestalteten Gliede ABC drehpaarig verbundenen Gliedern BL, CO ist das Glied BL in dem Punkt L an den Kurbelarm $A'L'$ und das Glied CO in dem Punkt an das feste Glied $\mathcal{P}'A'$ drehpaarig angeschlossen.

Statt eines Punktes des dreifach geführten ebenen Systems S , der in einem führenden ebenen System auf einer Geraden bewegt wird, können auch zwei oder drei Punkte von S in zwei oder drei führenden ebenen Systemen auf je einer Geraden bewegt werden. Bei dem in Fig. 15 gezeichneten Mechanismus ist z. B. das Glied ABC in den Punkten A, B, C mit den hülsenförmigen Gliedern $AF_\infty, BL_\infty, CO_\infty$ drehpaarig verbunden und diese Glieder vertreten die ebenen Systeme S, S_1, S_2, S_3 . Die hülsenförmigen Glieder gleiten auf den drei bewegten, geradlinigen Gliedern eines Kurbelgetriebes $\mathcal{P}'F'L'A'$, dessen Glied $\mathcal{P}'A'$ fest ist. Dieser Mechanismus, bei dem die

¹⁾ Kinematik, S. 471, Fig. 497.

Punkte F_∞ , L_∞ , O_∞ im Unendlichen liegen, ist ein spezieller Fall des in Fig. 6 gezeichneten Dreispannmechanismus. Wenn die bewegten Glieder des Kurbelgetriebes mit Nuten versehen werden, deren Mittellinien die Geraden $\Phi'F'$, $F'L'$, $L'A'$ sind, und an das Glied ABC in den Stellen der Punkte A , B , C zylindrische Zapfen angebracht werden, die in diesen Nuten gleiten, dann kommen die Glieder AF_∞ , BL_∞ , CO_∞ in Wegfall und das Glied ABC ist dann mit den bewegten Gliedern des Kurbelgetriebes durch höhere kinematische Elementenpaare verbunden.

Die Beschleunigungszustände der Glieder dieser Mechanismen können in mehrfältiger Weise auch nach den allgemeinen, prinzipiell verschiedenen Methoden von F. Wittenbauer¹⁾, C. Rodenberg²⁾ und O. Mohr³⁾ bestimmt werden.

1) Zivilingenieur, Jahrg. 1896, S. 57.

2) Daselbst S. 565.

3) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1903, B. 49, S. 393.

