

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1943

München 1944

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Die kinetische Energie der von einem Wirbelpaar erzeugten Flüssigkeitsbewegung.

Von Walther Kaufmann, München.

Mit 2 Abbildungen.

Vorgelegt am 12. November 1943.

Für einige Probleme der Hydro- und Aerodynamik ist die Kenntnis der kinetischen Energie von Interesse, welche von einem Wirbelpaar in einer im Unendlichen ruhenden, reibungs- und wirbelfreien Flüssigkeit erzeugt wird. Unter einem Wirbelpaar versteht man bekanntlich zwei gerade, unendlich lange und einander parallele Wirbelfäden, deren Zirkulation Γ den gleichen Betrag, aber entgegengesetzten Drehsinn hat. Da die von den beiden Wirbelfäden A und B (Abb. 1) erzeugte Strömung in Ebenen vor sich geht, die sämtlich einer festen, zu den Wirbelachsen lotrechten XY -Ebene parallel sind, so genügt es, wenn nur die Strömung in dieser Ebene betrachtet wird. Bezeichnen nun r_1 und r_2 die Abstände eines beliebigen Punktes P der XY -Ebene von den Wirbelzentren A und B , so hat nach dem Biot-Savartschen Gesetz die vom Wirbel A am Orte P erzeugte, zu r_1 senkrecht stehende Geschwindigkeit die Größe $\frac{c}{r_1}$ und die von B erzeugte, senkrecht zu r_2 stehende Geschwindigkeit die Größe $\frac{c}{r_2}$, wobei

$$c = \frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (1)$$

Diese Geschwindigkeiten verhalten sich also wie $\frac{r_2}{r_1}$, weshalb aus ähnlichen Dreiecken folgt (Abb. 1)

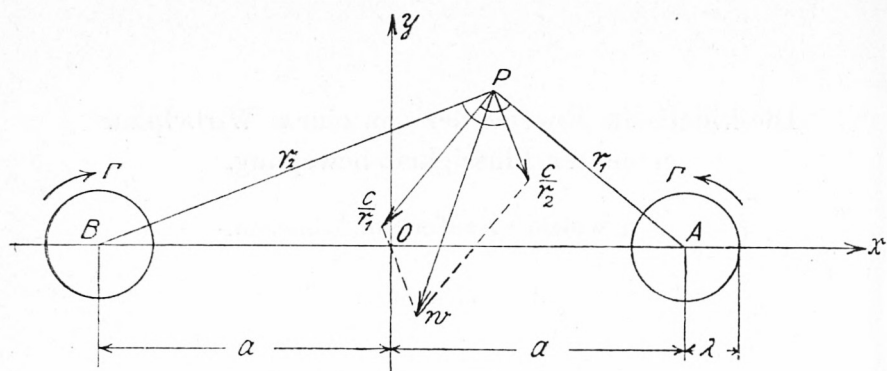


Abb. 1.

$$w : 2a = \frac{c}{r_2} : r_1$$

oder

$$w = \frac{2ca}{r_1 r_2}, \quad (2)$$

wenn w die Größe der resultierenden Geschwindigkeit am Orte P und $2a$ den Abstand der Wirbelfäden A und B bezeichnen.

Läßt man r_1 oder r_2 gegen Null gehen, so geht w gegen ∞ . Bei physikalischen Wirbeln – und um solche handelt es sich hier – hat man indessen zwei Bereiche zu unterscheiden, einen äußeren, in dem Potentialströmung herrscht und für den Gl. (2) gilt, und einen inneren, die beiden Wirbelkerne, in denen die Geschwindigkeit nicht mit $\frac{1}{r}$ gegen unendlich geht, sondern einen endlichen Wert behält. Auf Grund vorliegender Meßergebnisse in Wind- und Wasserkanälen sei von diesen Wirbelkernen vorerst angenommen, daß sie angenähert Kreisquerschnitte vom Halbmesser λ haben mögen.

Die auf die Längeneinheit der Wirbelachsen bezogene kinetische Energie des Geschwindigkeitsfeldes außerhalb der Wirbelkerne ist bestimmt durch den Ausdruck

$$E_a = \frac{\rho}{2} \int w^2 dF, \quad (3)$$

wo w nach (2) einzusetzen und das Integral über die ganze XY-Ebene außerhalb der beiden Wirbelkerne zu erstrecken ist.

Bei der Berechnung der Energie der Wirbelkerne ist zu beachten, daß jeder Wirbelfaden dem anderen eine zur Verbindungsgeraden der beiden Wirbelzentren A und B senkrechtstehende Geschwindigkeit von der Größe

$$w_0 = \frac{\Gamma}{4\pi a} \quad (4)$$

erteilt. Wird außerdem angenommen, daß die Wirbelkerne angenähert wie starre Zylinder mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotieren, so setzt sich die Gesamtenergie der Kerne aus deren Translations- und Rotationsenergie zusammen. Für erstere ergibt sich

$$E_t = 2 \rho \pi \lambda^2 \frac{w_0^2}{2} = \frac{\rho \lambda^2 \Gamma^2}{16 \pi a^2}. \quad (5)$$

Die Rotationsenergie kann mit Hilfe der Umfangsgeschwindigkeit am Kernrand

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi \lambda}$$

bzw. der daraus folgenden Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{u}{\lambda} = \frac{\Gamma}{2\pi \lambda^2} \quad (4a)$$

wie folgt bestimmt werden

$$E_r = 2 \cdot \frac{1}{2} \rho \pi \lambda^4 \frac{\omega^2}{2} = \frac{\rho \Gamma^2}{8 \pi}. \quad (6)$$

Durch Überlagerung der drei Beiträge (3), (5) und (6) ist die Gesamtenergie der von dem Wirbelpaar erzeugten Flüssigkeitsbewegung festgelegt.

Im Zusammenhang mit theoretischen Untersuchungen über den „induzierten Widerstand“ von Tragflügeln hat L. Prandtl für die von einem Wirbelpaar erzeugte kinetische Energie den einfachen Wert

$$E = \frac{\rho \Gamma^2}{2 \pi} \left(\ln \frac{2a}{\lambda} + \frac{1}{4} \right) \quad (7)$$

angegeben.¹ Zur Ableitung dieses Ausdrucks, die in der zitierten Arbeit nicht enthalten ist, unterteilen Th. v. Kármán und J. M. Burgers² — wie oben geschildert — das Geschwindigkeitsfeld des Wirbelpaares in den Bereich außerhalb der Wirbelkerne und in die Kerne selbst. Für die Bewegung außerhalb der Wirbelkerne führen sie die Stromfunktion $\psi(x, y)$ ein und leiten für die Energie dieses Bereiches unter der Annahme, daß ψ längs des Kernrandes angenähert den konstanten Wert

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{2a}{\lambda} \quad (8)$$

besitzt, den Ausdruck

$$E' = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \ln \frac{2a}{\lambda} \quad (9)$$

ab. Durch Hinzunahme der Rotationsenergie nach Gl. (6) folgt daraus der obige Wert (7) für die gesuchte Energie.

Dazu ist folgendes zu bemerken: Bildet man die Summe der Ausdrücke (5) und (6), so erhält man als Gesamtenergie der Kerne

$$E_r + E_t = \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi} \left(1 + \frac{\lambda^2}{2a^2} \right), \quad (10)$$

und man erkennt, daß E_t gegenüber E_r nur dann vernachlässigt werden darf, wenn $\lambda \ll a$ ist. Die Stromfunktion der durch Gl. (2) gekennzeichneten Potentialströmung hat die Größe

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Die den Gl. (8) bzw. (9) zugrunde liegende Annahme besagt also, daß für Punkte des Kernrandes

$$\frac{r_2}{r_1} \approx \frac{2a}{\lambda}$$

¹ L. Prandtl, Tragflügeltheorie, II. Mitteilung, Nachr. der K. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen, Math. physik. Klasse 1919, S. 107–137. Neu abgedruckt in „Vier Abhandl. zur Hydrodynamik und Aerodynamik“, Göttingen 1927, S. 63.

² Aerodynamic Theory von W. Fr. Durand, Volume II, 1935, S. 329.

gesetzt wird. Auch diese Annahme ist offenbar nur zulässig, wenn λ klein gegenüber $2a$ ist.

Die Schwierigkeit, welche der genauen Ermittlung der Wirbelenergie entgegensteht, ist — wie aus den vorstehenden Darlegungen hervorgeht — besonders in der Unkenntnis aller Einzelheiten des Mechanismus der Wirbelkerne (genaue Form, Verteilung der Wirbelstärke im Kerninnern) begründet.¹

Um einen Vergleich mit der Prandtlschen Formel (7) zu bekommen, soll nachstehend zunächst die Energie E_a des Geschwindigkeitsfeldes außerhalb der Wirbelkerne durch direkte Integration der Gl. (3), d. h. ohne eine spezielle Annahme über die Größe der Stromfunktion, berechnet und darauf geprüft werden, welcher Fehler bei den praktisch in Frage kommenden Größen des Verhältnisses $\frac{2a}{\lambda}$ durch die Annahme kreisförmiger Wirbelkerne zu erwarten ist. Unter Beachtung von (2) geht Gl. (3) über in

$$E_a = 2\rho c^2 a^2 \int \frac{dF}{r_1^2 r_2^2}. \quad (11)$$

Der Integrationsbereich erstreckt sich über die ganze XY-Ebene außerhalb der Wirbelkerne. Da jedoch die genaue Form der Kerne nicht bekannt ist, seien um die beiden Wirbelpunkte A und B zunächst Kreise gelegt, deren Halbmesser λ^* so gewählt wird, daß diese Kreise die Wirbelkerne nirgends schneiden, sondern gerade nur berühren. Diese Kreise werden vorläufig bei der Integration ausgeschlossen. Wegen der jetzt bestehenden Symmetrie genügt die Betrachtung eines Quadranten des XY-Ebene. Das so definierte Integrationsgebiet wird nun zerlegt in den Bereich I, der sich von $r_1 = \lambda^*$ bis zum Umfang des konzentrischen Kreises K vom Halbmesser a erstreckt, und in den Bereich II, der das Gebiet außerhalb dieses Kreises umfaßt (Abb. 2).

Mit

$$r_2^2 = (2a)^2 + r_1^2 + 4ar_1 \cos \psi \quad (12)$$

und

¹ Ansätze zur Lösung dieser Frage sind zu finden bei H. Kaden, Aufwicklung einer unstabilen Unstetigkeitsfläche, Ing. Archiv 1931, S. 140 ff., und A. Betz, Verhalten von Wirbelsystemen, Z. angew. Math. u. Mech. 1932, S. 164 ff.

$$dF = r_1 d\psi dr_1 \quad (13)$$

geht (11) für den Bereich I über in

$$E_{aI} = 2\rho c^2 a^2 \int_{r_1=\lambda^*}^{r_1=a} \frac{r_1 dr_1}{r_1^2} \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} \frac{d\psi}{[(2a)^2 + r_1^2] + 4ar_1 \cos \psi},$$

und zwar ist hier $r_1 \leq a$; $[(2a)^2 + r_1^2] > 4ar_1$.

Die Auswertung des Doppelintegrals unter Beachtung der angegebenen Grenzen liefert

$$E_{aI} = \frac{\rho c^2 \pi}{4} \ln \frac{4a^2 - \lambda^{*2}}{3\lambda^{*2}}. \quad (14)$$

Zur Bestimmung des Integrals (11) für den Bereich II wird zunächst über den Kreisring vom Halbmesser $r_1 > a$ und der Dicke dr_1 zwischen den Grenzen $\psi = 0$ und $\psi = \pi - \vartheta$ integriert,

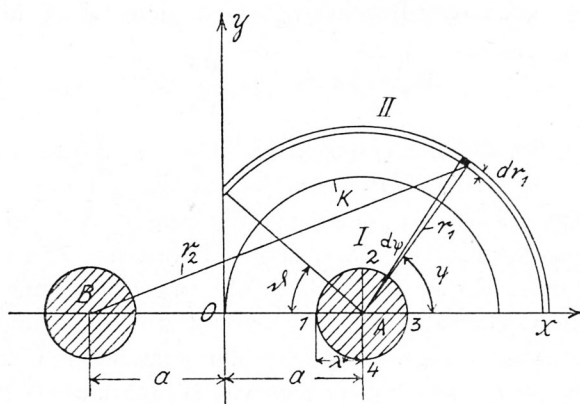


Abb. 2.

wobei die obere Grenze durch die Y-Achse bestimmt ist (Abb. 2). Unter Beachtung von (12) und (13) wird der Energieinhalt dieses Kreisringes

$$E_{aII} = 2\rho c^2 a^2 \frac{r_1 dr_1}{r_1^2} \int_{\psi=0}^{\psi=(\pi-\vartheta)} \frac{d\psi}{[(2a)^2 + r_1^2] + 4ar_1 \cos \psi},$$

woraus durch Integration und Einführung der Grenzen folgt

$$E'_{aII} = 4\rho c^2 a^2 \frac{dr_1}{r_1(4a^2 - r_1^2)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2a - r_1}{2a + r_1} \operatorname{tg} \frac{\pi - \vartheta}{2} \right).$$

Nun ist

$$\operatorname{tg} \frac{\pi - \vartheta}{2} = \frac{\sin (\pi - \vartheta)}{1 + \cos (\pi - \vartheta)} = \frac{\sin \vartheta}{1 - \cos \vartheta} = \sqrt{\frac{r_1 + a}{r_1 - a}},$$

weshalb

$$E'_{aII} = 4\rho c^2 a^2 \frac{dr_1}{r_1 (4a^2 - r_1^2)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2a - r_1}{2a + r_1} \sqrt{\frac{r_1 + a}{r_1 - a}} \right). \quad (15)$$

Dieser Wert ist — wie es für die Energie des Streifens sein muß — stets positiv, sowohl für $r_1 < 2a$ als auch für $r_1 > 2a$. Es folgt dies aus der Beziehung

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \mu = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\mu).$$

Für $r_1 = 2a$ nimmt Gl. (15) den unbestimmten Wert $\frac{0}{0}$ an. Durch eine Grenzwertbetrachtung überzeugt man sich leicht, daß der Grenzwert die Größe hat

$$E'_{aII(r_1=2a)} = \frac{\rho c^2 \sqrt{3}}{8a} dr_1.$$

Zur Berechnung der Gesamtenergie des Bereiches II ist jetzt der Ausdruck (15) nach r_1 zu integrieren, und zwar zwischen den Grenzen $r_1 = a$ und $r_1 = \infty$.

Man erhält also

$$E_{aII} = 4\rho c^2 a^2 \int_{r_1=a}^{r_1=\infty} \left\{ \frac{1}{r_1 (4a^2 - r_1^2)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2a - r_1}{2a + r_1} \sqrt{\frac{r_1 + a}{r_1 - a}} \right) \right\} dr_1. \quad (16)$$

Zur Auswertung des Integrals wird gesetzt

$$\frac{2a - r_1}{2a + r_1} = \mu, \quad \text{also } r_1 = 2a \frac{1 - \mu}{1 + \mu}.$$

Daraus folgt

$$dr_1 = - \frac{4a}{(1 + \mu)^2} d\mu; \quad 4a^2 - r_1^2 = \frac{16a^2\mu}{(1 + \mu)^2}; \quad \frac{r_1 + a}{r_1 - a} = \frac{3 - \mu}{1 - 3\mu}.$$

Mit diesen Substitutionen geht Gl. (16) über in

$$E_{aII} = -\frac{1}{2} \rho c^2 \int_{\mu=1/3}^{\mu=-1} \frac{\operatorname{arc\,tg} \left(\mu \sqrt{\frac{3-\mu}{1-3\mu}} \right)}{\mu \frac{1-\mu}{1+\mu}} d\mu. \quad (17)$$

In dem vorliegenden Integrationsbereich durchläuft $\mu \sqrt{\frac{3-\mu}{1-3\mu}}$ alle Werte von $\pm \infty$ bis ∓ 1 . Die Entwicklung der obigen $\operatorname{arc\,tg}$ -Funktion in eine konvergente Reihe ist also nicht möglich, da hierzu $\mu \sqrt{\frac{3-\mu}{1-3\mu}} \leq 1$ sein müßte. Nun ist aber

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,tg} \left(\mu \sqrt{\frac{3-\mu}{1-3\mu}} \right) &= \operatorname{arc\,sin} \frac{\mu \sqrt{\frac{3-\mu}{1-3\mu}}}{\sqrt{1+\mu^2 \frac{3-\mu}{1-3\mu}}} = \\ &= \operatorname{arc\,sin} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \sqrt{\frac{3-\mu}{1-\mu}} \right). \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$\frac{3-\mu}{1-\mu} = v^2, \quad \mu = \frac{3-v^2}{1-v^2}; \quad 1-\mu = \frac{-2}{1-v^2}$$

folgt daraus

$$\operatorname{arc\,sin} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \sqrt{\frac{3-\mu}{1-\mu}} \right) = \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{v(v^2-3)}{2} \right] = \operatorname{arc\,tg} \left(\mu \sqrt{\frac{3-\mu}{1-3\mu}} \right).$$

Weiter ist

$$1+\mu = \frac{4-2v^2}{1-v^2}; \quad \frac{1-\mu}{1+\mu} = -\frac{1}{2-v^2}; \quad d\mu = \frac{4v}{(1-v^2)^2} dv.$$

Mit den vorstehenden Ausdrücken geht Gl. (17) über in

$$E_{aII} = -2\rho c^2 \int_{v=2}^{v=\sqrt{2}} \left\{ \operatorname{arc\,sin} \left[\frac{v}{2} (3-v^2) \right] \frac{2v-v^3}{(1-v^2)(3-v^2)} \right\} dv. \quad (18)$$

Das Argument $\frac{v}{2}(3-v^2)$ durchläuft in dem vorliegenden Integrationsbereich alle Werte von -1 bis $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Demnach kann

$\arcsin \left[\frac{v}{2} (3 - v^2) \right]$ in eine in dem fraglichen Bereich konvergente Reihe entwickelt werden, welche lautet

$$\arcsin \left[\frac{v}{2} (3 - v^2) \right] = \frac{v}{2} (3 - v^2) + \frac{1}{6} \cdot \frac{v^3}{8} (3 - v^2)^3 + \frac{3}{40} \frac{v^5}{32} (3 - v^2)^5 + \dots$$

Somit geht Gl. (18) über in

$$E_{aII} = -2\rho c^2 \left\{ \frac{1}{2} \int_{v=2}^{v=\sqrt{2}} \frac{2v^2 - v^4}{1 - v^2} dv + \frac{1}{48} \int_{v=2}^{v=\sqrt{2}} (3 - v^2)^2 \frac{2v^4 - v^6}{1 - v^2} dv + \frac{3}{1280} \int_{v=2}^{v=\sqrt{2}} (3 - v^2)^4 \frac{2v^6 - v^8}{1 - v^2} dv + \dots \right\}. \quad (19)$$

Die in dem vorstehenden Ausdruck auftretenden Integrale sind sämtlich von der Form

$$\int \frac{v^{2n}}{1 - v^2} dv = -\frac{v^{2n-1}}{2n-1} + \int \frac{v^{2n-2}}{1 - v^2} dv.$$

Es wird also der Reihe nach

$$\begin{aligned} \int \frac{v^2 dv}{1 - v^2} &= -v + \int \frac{dv}{1 - v^2} = -\left(v + \frac{1}{2} \ln \frac{v-1}{v+1}\right) \\ \int \frac{v^4 dv}{1 - v^2} &= -\frac{v^3}{3} + \int \frac{v^2 dv}{1 - v^2} \\ \int \frac{v^6 dv}{1 - v^2} &= -\frac{v^5}{5} + \int \frac{v^4 dv}{1 - v^2} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Durch Auswertung der einzelnen Integrale in Gl. (19) und Einführung der Grenzen ergibt sich schließlich bei Beschränkung auf fünf Glieder der Reihe

$$E_{aII} = 0,858 \rho c^2. \quad (20)$$

Dieser Beitrag zur Wirbelenergie ist — wie ersichtlich — vom Abstand und Halbmesser der Wirbelkerne vollkommen unabhängig. Die Gesamtenergie für alle vier Quadranten des oben

bezeichneten Integrationsbereiches ergibt sich nun aus Gl. (14) und (20) unter Beachtung von Gl. (1) wie folgt

$$E_a = 4(E_{a_I} + E_{a_{II}}) = \rho \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left(\pi \ln \frac{4a^2 - \lambda^{*2}}{3\lambda^{*2}} + 3,432 \right). \quad (21)$$

Der vorstehende Ausdruck stellt noch nicht die Gesamtenergie außerhalb der Wirbelkerne in strenger Form dar, da ja der innere Rand ($r_1 = \lambda^*$) des betrachteten Bereiches sich nicht vollkommen mit dem Kernrand deckt. Um zu entscheiden, welche Abweichung zwischen diesen beiden Rändern zu erwarten ist, sind in nachstehender Tabelle für die Punkte 1–4 des Randes $r_1 = \lambda^*$

Punkt	$\frac{\Gamma}{4\pi a} w_x$	$\frac{\Gamma}{4\pi a} w_y$	$\frac{\Gamma}{4\pi a} w'_x$	$\frac{\Gamma}{4\pi a} w'_y$
1	0	—11,11	0	—11,0
2	—9,90	—0,99	—10,0	—1,0
3	0	9,09	0	9,0
4	9,90	—0,99	10,0	—1,0

(Abb. 2) die mit $\frac{\Gamma}{4\pi a}$ multiplizierten Geschwindigkeitskomponenten w_x und w_y der Potentialströmung zusammengestellt, wobei das Verhältnis $\frac{2a}{\lambda^*} = 10$ zugrunde gelegt wurde.¹

Es werde nun wieder angenommen, daß die Wirbelkerne sich wie starre Zylinder verhalten, die eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{\Gamma}{2\pi\lambda^{*2}}$ um die Achsen A bzw. B und eine

Translation mit der Geschwindigkeit $w_0 = \frac{\Gamma}{4\pi a}$ ausführen [vgl. die Gleichungen (4) und (4a)].

Die daraus resultierenden, mit $\frac{\Gamma}{4\pi a}$ multiplizierten Geschwindigkeitskomponenten w'_x und w'_y sind für das Längenverhältnis $\frac{2a}{\lambda^*} = 10$ ebenfalls in die vorstehende Tabelle eingetragen. Der

¹ Dieser Wert entspricht etwa den Wirbelabmessungen, die sich infolge Aufwicklung der Unstetigkeitsfläche hinter einem Tragflügel einstellen. Vgl. die Literaturangabe 1 auf S. 298.

Vergleich mit den aus der Potentialströmung am Rande $r_1 = \lambda^*$ entstehenden Geschwindigkeiten zeigt, daß bei dem gewählten Längenverhältnis $\frac{2a}{\lambda^*}$ die Abweichung der entsprechenden Werte voneinander im Maximum nur rund 1% beträgt. Solange also der Kernhalbmesser λ im Verhältnis zum Kernabstand $2a$ von der hier gewählten Größenordnung oder kleiner ist, kann mit guter Annäherung der Rand $r_1 = \lambda^*$ als Kernrand aufgefaßt und λ^* gleich dem Kernhalbmesser λ gesetzt werden. Mit dieser Einschränkung gibt Gl. (21) die Energie außerhalb der Wirbelkerne mit einer für praktische Zwecke hinreichenden Genauigkeit an.

Fügt man nun zu Gl. (21) noch die Energie der Wirbelkerne gemäß Gl. (10) hinzu, so erhält man als Gesamtenergie

$$E = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \left\{ \ln \frac{4a^2 - \lambda^2}{3\lambda^2} + \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 + 1,592 \right\}$$

oder nach einfacher Umformung

$$E = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \left\{ \ln \left[\left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 - 1 \right] + \left(\frac{\lambda}{2a} \right)^2 + 0,4934 \right\}. \quad (22)$$

Für das oben angenommene Längenverhältnis $\frac{2a}{\lambda} = 10$ wird

$$E \approx 5,1 \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi},$$

während die Energie der Wirbelkerne nach (10)

$$E_k = 0,51 \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi},$$

d. h. nur etwa 10% der Gesamtenergie ausmacht. Übrigens folgt aus Gl. (10) weiter, daß die Energie der Kerne bei den hier vorausgesetzten kleinen Werten $\frac{\lambda}{2a}$ praktisch nur von der Zirkulation Γ und nur in geringem Maße von $\frac{\lambda}{2a}$ abhängt oder, anders gesprochen, die Translationsenergie spielt gegenüber der Rotationsenergie nur eine untergeordnete Rolle.

Das obige Zahlenbeispiel zeigt weiter, daß unter der Voraussetzung kleiner Kernhalbmesser — und nur für solche gelten ja

die oben gewonnenen Ausdrücke — an Stelle von Gl. (22) angenähert

$$E = \frac{\rho \Gamma^2}{4\pi} \left\{ \ln \left(\frac{2a}{\lambda} \right)^2 + 0,4934 \right\}$$

gesetzt werden kann, zumal die beiden vernachlässigten Glieder das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen. Durch etwas andere Schreibweise folgt daraus

$$E = \frac{\rho \Gamma^2}{2\pi} \left\{ \ln \frac{2a}{\lambda} + 0,2467 \right\},$$

woraus bis auf eine kleine Abweichung in dem konstanten Zahlenwert die Übereinstimmung mit der Prandtlschen Gleichung (7) hervorgeht.