

Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1917

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)



Deutung und Konvergenzbeweis für die Methoden zur Lösung der 1. Randwertaufgabe von H. A. Schwarz und von H. Poincaré im linearen Gebiet.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 9. Juni 1917.

Die beiden Wege, welche H. A. Schwarz und H. Poincaré zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie eingeschlagen haben, benützen den Umstand, daß man die Aufgabe für bestimmte *Grundgebiete*, z. B. das Kreisinnere, lösen kann und gehen von hier aus zu Gebieten über, die sich durch übereinander greifende Grundgebiete ausfüllen lassen.

Soll z. B. für das in Fig. 1 angegebene Gebiet

$$G = K'_1 + K_{12} + K'_2,$$

das durch Übereinandergreifen der beiden Kreisgebiete

$$K_1 = K'_1 + K_{12}, \quad K_2 = K'_2 + K_{12}$$

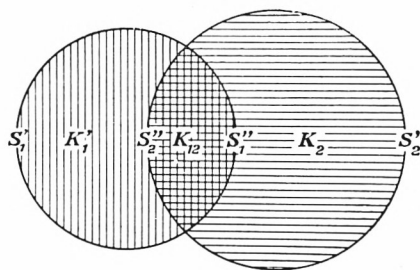


Fig. 1

entsteht, die erste Randwertaufgabe gelöst werden, d. h. soll für das Innere dieses Gebietes diejenige Funktion bestimmt werden, die die Gleichung

$$(1) \quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

erfüllt, und längs der freien Randteile

$$\begin{array}{lll} S'_1 \text{ des Gesamttrandes } S_1 = S'_1 + S''_1 \text{ von } K_1 \\ S'_2 \text{ „ „ „ } S_2 = S'_2 + S''_2 \text{ „ } K_2 \end{array}$$

einen vorgeschriebenen Wertverlauf $f_1(s'_1)$ bzw. $f_2(s'_2)$ hat, so wird man K_1 und K_2 selber als Grundgebiete wählen.

H. A. Schwarz gibt dann das folgende Verfahren an:

Man schreibt willkürlich noch für S'_1 einen Wertverlauf $g_1(s'_1)$ vor und löst dann die Randwertaufgabe für K_1 mit dem Randwertverlauf $f_1(s'_1)$, $g_1(s'_1)$. Die so berechnete Funktion V_1 hat auf S''_2 einen bestimmten Wertverlauf $g_2(s''_2)$. Dann löst man die Randwertaufgabe für K_2 mit dem Randwertverlauf $f_2(s'_2)$, $g_2(s''_2)$. Die so gefundene Funktion V_2 hat wieder auf dem in ihrem Innern gelegenen Stück S'_1 einen bestimmten Wertverlauf $g_3(s'_1)$. Man bestimmt dann V_3 so, daß diese Funktion im Innern von K_1 die Gleichung (1) erfüllt und die Randwerte $f_1(s'_1)$, $g_3(s'_1)$ hat usw. In der unbegrenzten Folge dieses *alternierenden* Verfahrens verschmelzen die Funktionen V_n schließlich, d. h. sie nähern sich asymptotisch der gesuchten Funktion V . —

Um sodann die Poincarésche Methode zu erläutern, betrachten wir zunächst das Verfahren, wie es sich gestaltet, wenn die Randwertaufgabe für einen Kreis, dessen Inneres mit K_1 , dessen Rand mit S_1 bezeichnet werden möge, gelöst werden soll. Es wird dabei angenommen, daß man eine Funktion $V_0(x, y)$ kennt, die den vorgeschriebenen Randwertverlauf besitzt, im Innern aber noch nicht der Gleichung (1) genügt. Aus diesem V_0 wird eine „Füllung“ des Kreisinnern konstruiert, d. h. es wird die Flächenbelegung mit der Dichtigkeit

$$(2) \quad \mu(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \Delta V_0$$

gebildet und diese Füllung aus K_1 „ausgekehrt“. Das heißt, es wird eine Randbelegung längs S_1 gebildet, deren logarithmisches Potential für alle außerhalb von K_1 gelegenen Punkte gleich dem der gesamten Füllung von K_1 ist. Daraus folgt, nebenbei bemerkt, ganz von selbst, daß die Gesamtmasse dieser Belegung gleich der der Füllung ist.

Die Lösung der Randwertaufgabe ist dann

$$V_0(x, y) - W_0(x, y) + W_1(x, y),$$

wobei unter W_0 das Potential der Füllung, unter W_1 das Potential der ausgekehrten Massen zu verstehen ist. Dies wäre die *Auskehrung eines Kreises mit einem einzigen Schritt*.

Betrachtet man dagegen zwei übereinander greifende Kreise, so ist abwechselnd auszukehren. Man beginnt wie oben mit K_1 , dann wird in derselben Weise K_2 ausgekehrt; d. h. es wird die nach dem ersten Schritte noch verbliebene Füllung des Teiles K_2 und die durch die erste Auskehrung von K_1 entstandene Belegung von S_1'' in derselben Weise an den Rand S_2 verlegt, wodurch S_2' und S_2'' Belegungen erhalten. Dann wird K_1 von neuem ausgekehrt usw.

Auf diese Art werden allmählich alle Massen an den Rand $S_1' + S_2'$ verlegt.

Die gesuchte Funktion ist dann

$$V_0(x, y) - W_0(x, y) + W_\infty(x, y).$$

Dabei ist $W_0(x, y)$ das Potential der Füllung (2) des ganzen Gebietes und W_∞ das Potential der ausgekehrten, durch das beschriebene alternierende Verfahren an den Rand $S_1' + S_2'$ verlegten Massen.

So viel sei zur notwendigen Übersicht gesagt. —

Im *linearen* Gebiet, also etwa für die Strecke

$$0 \leq x \leq l$$

ist die entsprechende Randwertaufgabe durchaus trivial, handelt es sich doch einfach darum, diejenige Lösung von

$$(1') \quad \frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

zu finden, die in den Randpunkten $x = 0$ und $x = l$ vorgeschriebene Werte

$$V(0) = a, \quad V(l) = b$$

annimmt; also die lineare Funktion

$$(3) \quad V(x) = a + \frac{x}{l}(b - a),$$

und um dieser Lösung willen wird niemand der Aufgabe Beachtung schenken!

Wohl aber ist ein anderer Umstand immerhin bemerkenswert und darf dargelegt werden. Auch die oben mit Stillschweigen übergangene *Konvergenz* beider Methoden wird im *linearen* Gebiet durchaus selbstverständlich erscheinen. Sie hängt bei der auf diesen Fall übertragenen Schwarzschen Methode mit einer dem praktischen Geometer längst bekannten *Vorschrift für das Einweisen von Punkten auf einer Geraden* zusammen, und bei der auf das lineare Gebiet übertragenen Poincaréschen Methode mit der schrittweise ausgeführten *Bestimmung der Auflagerreaktionen eines belasteten Balkens*. Dies wird im folgenden genau entwickelt.

Die Schwarzsche Methode im linearen Gebiet.

Die lineare Funktion $V(x)$ zu bestimmen, die für $x = 0$ den Wert a , für $x = l$ den Wert b annimmt, das ist so viel wie die Aufgabe, die Punkte P_1 (mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = 0, y = a$) und P_2 (mit den rechtwinkligen Koordinaten $x = l, y = b$) verbinden. Nimmt man die Strecke $0 \leq x \leq l$ als Grundgebiet, so hat man die Punkte direkt durch das angelegte Lineal zu verbinden. Wie aber, wenn das Lineal zu kurz ist, wenn seine Länge zwischen $l:2$ und l liegt?

Dann kann man *das alternierende Verfahren* anwenden. Man schaltet zwischen Anfangs- und Endpunkt des Grundgebietes noch zwei Punkte x_1 und x_2 ($> x_1$) ein und nimmt

dann die übereinander greifenden Strecken von 0 bis x_2 und von x_1 bis l als neue Grundgebiete. Im Punkt x_2 nimmt man eine Ordinate c an (deren Endpunkt C schon möglichst auf der geschätzten Verbindungsstrecke $P_1 P_2$ liegt). Dann bringt man $P_1 C$ mit der Geraden $g_1 (x = x_1)$ zum Schnitt (Y_1). Y_1 wird dann mit P_2 verbunden und $Y_1 P_2$ mit der Geraden $g_2 (x = x_2)$ zum Schnitt gebracht (Z_1). Dann wiederholt man das Verfahren über der ersten Grundstrecke usw. Die Punktfolge $C Z_1 Z_2 \dots$ nähert sich dann unbegrenzt dem Schnittpunkt Z von $P_1 P_2$ mit g_2 , ebenso die Punktfolge $Y_1, Y_2 \dots$ dem Schnittpunkt Y von $P_1 P_2$ mit g_1 (vgl. Fig. 2).

Praktisch wird dieses Verfahren weniger auf dem Reißbrett ausgeübt, als beim Einweisen von Punkten: Sind P_1 und P_2 zwei unzugängliche Punkte, etwa Hausecken und g_1 und g_2 etwa die Ränder der Bürgersteige, so weist ein Beobachter, der seinen Visierstab in Vertikalstellung längs g_2 bewegt, den andern, der seinen Visierstab längs g_1 bewegt, vom Standort C aus so ein, daß dessen Stab P_1 verdeckt; dann dieser den andern so, daß dessen Stab P_2 verdeckt usw.

Der rechnerische Beweis für die Konvergenz ist sehr einfach, soll aber als Ergänzung doch nicht unterdrückt werden.

Bezeichnen wir die Strecke $C Z_1$ mit u , führen wir ferner die Bezeichnungen

$$\frac{x_1}{x_2} = \varepsilon (< 1)$$

$$\frac{l - x_2}{l - x_1} = \eta (< 1)$$

ein, so wird

$$Y_1 Y_2 = u \cdot \varepsilon, \quad Z_1 Z_2 = u \varepsilon \eta, \quad Z_2 Z_3 = u \varepsilon^2 \eta^2 \text{ usw.},$$

also

$$C Z_1 + Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + \dots = u(1 + \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \eta^2 + \dots)$$

und bei unbegrenzter Fortsetzung ergibt sich als Summe

$$C Z_\infty = \frac{u}{1 - \varepsilon \eta} = \frac{u \cdot x_2 \cdot (l - x_1)}{l(x_2 - x_1)}.$$

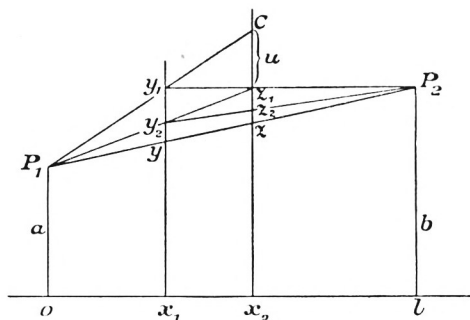


Fig. 2

Außerdem ist

$$u = \frac{x_2 - x_1}{l - x_1} \cdot \frac{(lc - bx_2 - a(l - x_2))}{x_2},$$

also

$$CZ_\infty = c - a - \frac{x_2}{l}(b - a),$$

und die Ordinate von Z_∞ wird

$$a + \frac{x_2}{l}(b - a)$$

genau wie die Gleichung (3) für die Ordinate des Schnittpunktes Z der Verbindungsstrecke $P_1 P_2$ mit der Geraden $x = x_2$ vorschreibt. Die Punkte Z_n nähern sich also asymptotisch dem Punkte Z , und zwar um so rascher, je weniger x_1 von Null und x_2 von l abweicht.

Die Poincarésche Methode im linearen Gebiet.

Wir wählen zunächst einmal die ganze Strecke als Grundgebiet, um die Methode in diesem einfachen Fall darzulegen, wo eine einzige Auskehrung zum Ziel führt. Dabei sind einige Rechnungen durchzuführen, deren Ergebnisse auch durchwegs in der bekannten — von uns heranzuziehenden — Lehre vom belasteten Balken zum Ausdruck kommen. Wir können sie aber füglich nicht entbehren, damit der Anschluß an die Ent-

wickelungen von Poincaré völlig gewahrt bleibt. Wir beginnen also mit Überlegungen der graphischen Statik und deuten diese sodann potentialtheoretisch.

Das *Biegemoment* eines belasteten Balkens mit den Unterstützungspunkten $x = 0$ und $x = l$ ist gegeben durch

$$M(x) = Ax - \int_0^x q(x - \xi) d\xi.$$

Diese Formel gibt das Moment aller Kräfte links vom Querschnitt (an der Stelle x) an, q ist die Belastungsfunktion, und es sind die Auflagerreaktionen:

$$A = \frac{1}{l} \int_0^l q(l - \xi) d\xi \dots \text{im Stützpunkt } x = 0,$$

$$B = \frac{1}{l} \int_0^l q\xi d\xi \dots \text{im Stützpunkt } x = l.$$

Der Drehungssinn ist dabei nach dem Brauche der graphischen Statik positiv gerechnet im Sinne des Uhrzeigers.

Dasselbe Moment ist aber auch gleich dem Moment der auf der rechten Seite wirkenden Kräfte (Auflagerdruck B und Belastung von der Stelle x bis zum Endpunkt), aber mit negativem Vorzeichen versehen; also weiter

$$(4) \quad M(x) = \frac{1}{2} \left(Ax + B(l - x) - \int_0^x q(x - \xi) d\xi - \int_x^l q(\xi - x) d\xi \right).$$

Endlich ist noch zu bemerken, daß die Beziehung gilt:

$$\int_0^x q(x - \xi) d\xi = \int_0^x \left(\int_0^\xi q d\eta \right) d\xi;$$

die beiden Ausdrücke haben gleichen Wert, weil beide für $x = 0$ zu Null werden und beide denselben ersten Differentialquotienten besitzen

$$\int_0^x q d\xi.$$

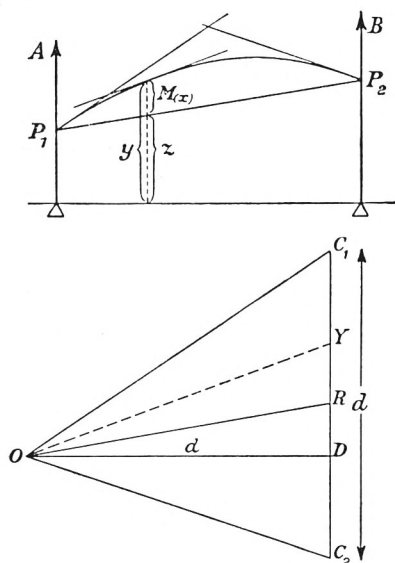


Fig. 3

Sodann erinnern wir uns an den Zusammenhang zwischen *Seilkurve* und *Kräfteplan* (vgl. Fig. 3). Ist im Kräfteplan, in dem die Kräfte $q d\xi$ von oben nach unten abgetragen werden

$$YC_1 = \int_0^x q d\xi,$$

ferner die Poldistanz $OD = 1$ und die Strecke $DC_1 = c$, so ist die *Seilkurve*, deren erste Ordinate a beliebig gewählt werden kann

$$y = a + \int_0^x u dx,$$

wobei

$$u(x) = c - \int_0^x q d\xi$$

ist. Es wird also

$$y = a + cx - \int_0^x q(x - \xi) d\xi$$

die Gleichung der Seilkurve. Die Endordinate ist dann gegeben durch

$$b = a + cl - \int_0^l q(l - \xi) d\xi = a + cl - Al$$

und die Gleichung der durch Anfangs- und Endpunkt der Seilkurve gehenden *Schlußlinie* ist

$$z = a + (b - a) \frac{x}{l} = y - cx + \int_0^x q(x - \xi) d\xi + (c - A)x$$

oder

$$(5) \quad z = y - M(x).$$

Man erhält also die *Schlußlinie*, wenn man von der *Ordinate* der *Seilkurve* das *Biegemoment* abzieht.

Um diese Betrachtungen als „Auskehrverfahren“ im Sinne von Poincaré zu deuten, schreiben wir zunächst unsere Gleichung in der Form

$$(6) \quad z = y - \frac{1}{2} \left(Ax + B(l-x) - \int_0^x q(x-\xi) d\xi - \int_x^l q(\xi-x) d\xi \right)$$

und definieren als *Potential im linearen Gebiet* das Produkt aus Masse und negativem Halbabstand. Dann ist das Potential der mit Masse von der Dichtigkeit q belegten Strecke für einen inneren Punkt

$$W(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x q(x-\xi) d\xi - \frac{1}{2} \int_x^l q(\xi-x) dx.$$

$W(x)$ erfüllt die Gleichung $\frac{d^2 W}{dx^2} = -q$.

Kehren wir jetzt die Massen aus, d. h. bestimmen wir Massen A und B in $x=0$ und $x=l$, die für außerhalb der Strecke gelegene Punkte dasselbe Potential besitzen, wie die belegte Strecke, so folgt (wir lassen den Faktor $\frac{1}{2}$ fort)

$$\bar{A}x + B(l-x) = \int_0^l q(x-\xi) d\xi \quad (x \leq 0)$$

$$-\bar{A}x - B(l-x) = \int_0^l q(\xi-x) d\xi \quad (x \geq l),$$

also

$$\bar{A} = \frac{1}{l} \int_0^l q(l-\xi) d\xi = A, \quad B = \frac{1}{l} \int_0^l q\xi d\xi = B.$$

Die ausgekehrten Massen sind also mit den Auflagerdrucken identisch.

Damit sind wir genau bei dem Poincaréschen Verfahren angelangt, dessen Gedankengänge wir hier für das lineare Gebiet der Deutlichkeit halber noch besonders entwickeln wollen.

Dies Verfahren geht aus von einer im übrigen beliebigen Kurve, die durch den vorgeschriebenen Anfangspunkt

$$(P_1) \quad x = 0, \quad y = a$$

und den vorgeschriebenen Endpunkt

$$(P_2) \quad x = l, \quad y = b$$

hindurchgeht. Die Gleichung dieser Kurve sei

$$y = V_0(x),$$

dann bildet man die Streckenbelegung

$$q = - \frac{d^2 V_0}{dx^2}.$$

Man berechnet sodann ihr Potential

$$W_0(x) = - \frac{1}{2} \int_0^x q(x - \xi) - \frac{1}{2} \int_x^l q(\xi - x) d\xi,$$

kehrt die Massen aus, wobei die Ersatzmassen A und B am Rand, d. h. jetzt in den Endpunkten entstehen, und bildet deren Potential

$$W_1(x) = - \frac{Ax + B(l - x)}{2}.$$

Die gesuchte lineare Funktion, d. h. die Gerade, welche P_1 und P_2 verbindet, ist dann gegeben durch den (mit (6) identischen) Ausdruck:

$$z = V_0(x) - W_0(x) + W_1(x).$$

Der Unterschied besteht lediglich in der *Deutung* (einerseits *Moment*, anderseits *Potential*) und im *Ausgangspunkt*, der bei der Bestimmung des Biegemomentes natürlich die *Belastung*, bei der Poincaréschen Methode aber die *Seilkurve* ist. Damit ist also die „Auskehrung durch einen Schritt“ geleistet.

Wie steht es jetzt, wenn man nicht die *ganze* Strecke $0 \leq x \leq l$ als Grundstrecke nimmt, vielmehr *die beiden über-einander greifenden Strecken*

$$0 \leq x \leq x_2, \quad x_1 \leq x \leq l \quad (0 < x_1 < x_2 < l)$$

zu Grundstrecken genommen werden? Man hat dann nur die beiden Grundstrecken *abwechselnd* auszukehren, das heißt, man

hat zuerst die Belastung der ersten Strecke zu ersetzen durch zwei Vertikalkomponenten A_1 und D_1 in den Punkten 0 und x_2 , sodann die zweite Grundstrecke, die mit der vertikal nach unten wirkenden Kraft D_1 in x_2 belastet ist und mit Masse von der Dichtigkeit q und zwar nur noch von $x = x_2$ bis $x = l$ „auszukehren“, wobei Vertikalkräfte C_2 und B_2 im Anfangs- und Endpunkt entstehen usw.

Dabei werden schließlich die Vertikalkräfte völlig in die beiden Unterstützungspunkte verlegt — es unterliegt keinem Zweifel, daß diese alternierende Konstruktion schließlich die Strecke zwischen den Stützpunkten von Kräften befreit und für die Stützpunkte die Auflagerdrucke ergibt.

Indessen wollen wir auch hier nicht versäumen, dem Anspruch auf einen rechnerischen Nachweis der Konvergenz entgegen zu kommen.

Man erhält der Reihe nach

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} q \cdot (x_2 - \xi) d\xi, & D_1 &= \frac{1}{x_2} \int_0^{x_2} q \xi d\xi, \\
 C_2 &= \frac{l - x_2}{l - x_1} D_1 + \frac{1}{l - x_1} \int_{x_2}^l q (l - \xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{l - x_1} \left(\int_0^{x_2} q \xi \left(\frac{l}{x_2} - 1 \right) d\xi + \int_{x_2}^l q (l - \xi) d\xi \right), \\
 B_2 &= \frac{x_2 - x_1}{l - x_1} D_1 + \frac{1}{l - x_1} \int_{x_2}^l q (\xi - x_1) d\xi \\
 &= \frac{1}{l - x_1} \left(\int_0^{x_2} q \xi \left(1 - \frac{x_1}{x_2} \right) d\xi + \int_{x_2}^l q (\xi - x_1) d\xi \right), \\
 A_3 &= C_2 \frac{x_2 - x_1}{x_2} = C_2 (1 - \varepsilon), & D_3 &= C_2 \frac{x_1}{x_2} = C_2 \varepsilon, \\
 C_4 &= D_3 \frac{l - x_2}{l - x_1} = C_2 \varepsilon \eta, & B_4 &= D_3 \frac{(x_2 - x_1)}{l - x_1} = C_2 \varepsilon (1 - \eta),
 \end{aligned}$$

und allgemein

$$C_{2n+2} = C_2 \varepsilon^n \eta^n, \quad B_{2n+2} = C_2 \varepsilon^n \eta^{n-1} (1 - \eta), \\ A_{2n+3} = C_2 \varepsilon^n \eta^n (1 - \varepsilon), \quad D_{2n+3} = C_2 \varepsilon^{n+1} \eta^n.$$

Demnach konvergieren die C und D gegen Null, und die Summen

$$A_3 + A_5 + \dots = C_2 (1 - \varepsilon) (1 + \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \eta^2 + \dots) \\ B_4 + B_6 + \dots = C_2 \varepsilon (1 - \eta) (1 + \varepsilon \eta + \varepsilon^2 \eta^2 + \dots)$$

gegen

$$C_2 \frac{(1 - \varepsilon)}{1 - \varepsilon \eta} = C_2 \frac{(x_2 - x_1)(l - x_1)}{x_2 l (x_2 - x_1)} = C_2 \frac{(l - x_1)}{l}$$

und

$$C_2 \frac{\varepsilon (1 - \eta)}{1 - \varepsilon \eta} = C_2 \frac{x_1 (x_2 - x_1)}{l (x_2 - x_1)} = C_2 \frac{x_1}{l}.$$

Man erhält also die Summen

$$\sum_0^\infty A_{2r+1} = \int_0^{x_2} q \left(1 - \frac{\xi}{x_2} + \frac{\xi}{x_2} - \frac{\xi}{l} \right) d\xi + \frac{1}{l} \int_{x_2}^l q (l - \xi) d\xi \\ = \frac{1}{l} \int_0^l q (l - \xi) d\xi = A$$

und

$$\sum_0^\infty B_{2r+2} = \int_0^{x_2} q \xi \cdot \frac{x_2 - x_1 + x_1 - \frac{x_2 x_1}{l}}{x_2 (l - x_1)} d\xi \\ + \frac{1}{l - x_1} \int_{x_2}^l q \left(\xi - x_1 + x_1 - \frac{\xi x_1}{l} \right) d\xi = \frac{1}{l} \int_0^l q \xi d\xi = B.$$

Damit ist der Beweis geführt, daß auch die Auskehrmethode durch ein *konvergentes Verfahren* zum Ziel gelangt, und es ist diese für die graphische Statik selbstverständliche Wahrheit bestätigt.