Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1917. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1917
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die beiden Geraden-Kugeltransformationen von Sophus Lie.

Von **Hans Beck.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 3. März 1917.

In seiner Abhandlung „Die Liesche Geraden-Kugeltransformation und ihre Verallgemeinerungen“[1]) beklagt Herr H. Liebmann mit Recht, daß „keine der zahlreichen Darstellungen der Lieschen Geraden-Kugeltransformation die einfachen Gedankengänge der projektiven Geometrie scharf umrissen in den Vordergrund treten“ lasse. Dann leitet Herr Liebmann die beiden Lieschen Transformationen unter Weiterbildung eines von Reye angegebenen Verfahrens[2]) synthetisch ab.

Bei Lie werden die Punkte eines Raumes abgebildet, das einemal auf die Tangenten einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung („erste“ Transformation), das anderemal auf die Treffgeraden eines irreduziblen Kegelschnitts („zweite“ Transformation). Daraus folgt die Abbildung der Geraden des Raumes auf die Kugeln der (I) Nicht-Euklidischen und (II) Euklidischen Geometrie.

Damit ergibt sich nun aber die Möglichkeit, beide Fälle auf denselben Ursprung zurückzuführen. Erst dadurch fällt volles Licht auf die gegenseitigen Beziehungen der beiden Abbildungen.

Da der von Lie gegebene Formelapparat das nicht erkennen läßt, so geben wir im nachfolgenden eine Darstellung, die im wesentlichen analytischer Art ist, und insofern eine Ergänzung der Liebmannschen Arbeit bildet.

[1]) Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1915, S. 189—198.

[2]) Geometrie der Lage, Bd. 2, 3. Aufl., S. 185—187.

Im Gegensatz zu Liebmann beginnen wir mit dem sich auf die Nicht-Euklidische Geometrie beziehenden Fall (I) und vollziehen dann mit den Formeln (die der Verfasser bereits zu anderen Zwecken früher[1]) angegeben hat), den Grenzübergang zum Falle (II) der Euklidischen Geometrie.

Durch diese Behandlungsweise erst tritt die eigenartige Struktur des Geradenraumes klar zutage, in welchem sich ein Strahlsystem erster Ordnung und erster Klasse mit (I) getrennten oder (II) zusammenfallenden Leitlinien als von fundamentaler Bedeutung erweist.

Ausgedehntere Anwendungen, die zum Teil auf das Gebiet der schönen Berwaldschen Arbeit über die algebraisch rektifizierbaren Kurven im Nicht-Euklidischen Raum[2]) hinüberführen, haben wir nur andeutungsweise gestreift, zumal die demnächst erscheinende Studysche Arbeit darüber näheres enthalten wird.

1. **Grundfläche, Tangentenkomplex.** Die erste Liesche Transformation bildet die Punkte eines ersten Raumes („Punktraum") auf die Tangenten einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung eines zweiten Raumes („Bildraum") ab. Die Fläche heiße Grundfläche.

Ihre Gleichungen seien: in homogenen (Tetraeder-)Punktkoordinaten

$$x_0^2 - \varkappa^2 x_1^2 - \varkappa^2 x_2^2 - \varkappa^2 x_3^2 = 0, \qquad (\varkappa \neq 0)$$

also in homogenen Ebenenkoordinaten

$$\varkappa^2 \mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 - \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Für eine Tangente der Grundfläche gelten die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 - \varkappa^2 \mathfrak{X}_{23}^2 - \varkappa^2 \mathfrak{X}_{31}^2 - \varkappa^2 \mathfrak{X}_{12}^2 = 0,$$

$$\mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{23} + \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{31} + \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{12} = 0,$$

wobei $\mathfrak{X}_{01} = x_0 y_1 - x_1 y_0 = \mathfrak{x}_2 \mathfrak{y}_3 - \mathfrak{x}_3 \mathfrak{y}_2$ usw.

---

[1]) Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 64 (1912), S. 55. D. Math. Vgg. 22 (1913), S. 237–239.

[2]) Sitzungsber. der Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1916, S. 1–18.

Sie lassen sich sofort durch die beiden folgenden ersetzen:

$$(\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23})^2 + (\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31})^2 + (\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12})^2 = 0,$$
$$(\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23})^2 + (\mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31})^2 + (\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12})^2 = 0,$$

die sich in bekannter Weise allgemein befriedigen lassen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = l^2 - m^2, && \mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = \lambda^2 - \mu^2,\\
(1)\quad &\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = i(l^2 + m^2), && \mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = i(\lambda^2 + \mu^2),\\
&\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = -2lm, && \mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = -2\lambda\mu.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Parameterdarstellung des Tangentenkomplexes der Grundfläche, und darin liegt bereits die erste Liesche Transformation.

Aus den Umkehrungen dieser Formeln

$$2l^2 = \mathfrak{X}_{01} + \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} - \varkappa\mathfrak{X}_{23}),\quad 2lm = -\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12},$$
$$2m^2 = -\mathfrak{X}_{01} + \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} + \varkappa\mathfrak{X}_{23}),$$
$$2\lambda^2 = \mathfrak{X}_{01} - \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} + \varkappa\mathfrak{X}_{23}),\quad 2\lambda\mu = -\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12},$$
$$2\mu^2 = -\mathfrak{X}_{01} - \varkappa\mathfrak{X}_{31} - i(\mathfrak{X}_{02} - \varkappa\mathfrak{X}_{23})$$

lassen sich wegen der Homogenität der Plückerschen Koordinaten $\mathfrak{X}$ eindeutig die Verhältnisse $l:m$ und $\lambda:\mu$ berechnen, aber nicht $l:\lambda$, sondern nur $l^2:\lambda^2$. Behandelt man also die l, m, λ, μ als homogene Koordinaten eines Punktes im Punktraum, so werden der Tangente $\mathfrak{X}$ der Grundfläche durch die Formeln (1) zugeordnet die beiden Punkte des Punktraumes

$$l:m:\lambda:\mu \quad \text{und} \quad l:m:-\lambda:-\mu.$$

Zwei solche Punkte werden durch eine spezielle involutorische Kollineation des Punktraumes vertauscht. Wir nennen sie ein Punktepaar.

Satz 1. Durch die Formeln (1) wird jedem Punkte $l:m:\lambda:\mu$ des Punktraumes eindeutig eine Tangente $\mathfrak{X}$ der Grundfläche zugeordnet; umgekehrt entsprechen aber einer Tangente der Grundfläche zwei Punkte des Punktraumes, die ein Paar bilden.

2. **Struktur des Punktraumes.** Verbindet man die beiden Punkte eines jeden Paares miteinander, so erhält man für die ∞^3 Punktepaare nicht ∞^3, sondern nur ∞^2 Verbindungsgerade,

die eine lineare Kongruenz mit getrennten Leitgeraden bilden. Diese Leitgeraden haben die Koordinaten

$$1:0:0:0:0:0 \quad \text{„Erste" Leitgerade,}$$
$$0:0:0:1:0:0 \quad \text{„Zweite" Leitgerade.}$$

Die Verbindungsgerade des Paares (als getrennt vorausgesetzter Punkte) $l:m:\pm\lambda:\pm\mu$ hat die Koordinaten

$$(2) \qquad p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12} = 0:l\lambda:l\mu:0:-m\mu:m\lambda$$

und trifft die erste Leitgerade im Punkte $l:m:0:0$, die zweite in $0:0:\lambda:\mu$.

Die lineare Kongruenz kann also durch die beiden Gleichungen dargestellt werden

$$p_{01} = 0, \quad p_{23} = 0,$$

und erweist sich somit als Durchschnitt der ∞^1 Gewinde im Büschel

$$(3) \qquad e^{\varkappa\varrho} p_{01} - e^{-\varkappa\varrho} p_{23} = 0.$$

Legt man ϱ einen bestimmten Wert bei, so stellt (3) „das Gewinde (ϱ)" dar; das Gewinde (0) soll auch Hauptgewinde genannt werden, das Gewinde $\left(\frac{\pi i}{2\varkappa}\right)$ Nebengewinde[1]).

Die beiden Punkte eines Paares liegen also auf einer Kongruenzgeraden und werden durch die Leitgeraden harmonisch getrennt.

Unter einem Geradenpaar ist demnach zu verstehen das System

$$(p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12}), \quad (-p_{01}, p_{02}, p_{03}, -p_{23}, p_{31}, p_{12}),$$

unter einem Ebenenpaar das System der beiden Ebenen

$$(u_0:u_1:u_2:u_3) \quad \text{und} \quad (u_0:u_1:-u_2:-u_3).$$

Paare mit zusammenfallenden Elementen sind danach nur:

a) die Punkte einer jeden Leitgeraden,
b) die Ebenen durch eine Leitgerade,
c) die Leitgeraden und die Kongruenzgeraden.

---

[1]) Von umfassenderem Standpunkt aus erscheint das letztgenannte Gewinde als das wichtigere.

Beachten wir noch, daß im Bildraum die Erzeugenden der Grundfläche die Bedingungen erfüllen:

$$\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = 0, \quad \mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = 0, \quad \mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

„Erste Schar".

$$\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} = 0, \quad \mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} = 0, \quad \mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} = 0.$$

„Zweite Schar".

Dann können wir Satz 1 dahin ergänzen:

Satz 2. Den Punkten der ersten Leitgeraden im Punktraum sind zugeordnet die Erzeugenden erster Schar der Grundfläche.

3. **Paare zusammenfallender Geraden.** Als Ort von ∞^1 Punkten muß sich eine Gerade (ein Paar von solchen) auf einen Regulus von Tangenten der Grundfläche abbilden. Diese speziellen Reguli nennen wir, vorläufig unmotiviert, sphärische Reguli und haben dann den freilich noch erst mit sachlichem Inhalt anzufüllenden

Satz 3. Ein Geradenpaar des Punktraumes wird auf einen sphärischen Regulus im Bildraum abgebildet.

Zuerst betrachten wir im Punktraum eine Leitgerade. Aus Satz 2 folgt sofort

Satz 4. Das Bild der zweiten Leitgeraden des Punktraums ist der Regulus der Erzeugenden zweiter Schar der Grundfläche.

Sodann bilden wir das Paar getrennter Punkte $l:m:\pm\lambda:\pm\mu$ und die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden mit den Leitgeraden $l:m:0:0$ und $0:0:\lambda:\mu$ ab. Das gibt zwei Erzeugende der Grundfläche und eine nicht erzeugende Tangente. Diese drei Geraden des Bildraumes schneiden sich zu zweien. Am unmittelbarsten sieht man das, wenn man die Inzidenzbedingung für die beiden Geraden $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ so schreibt:

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23})(\mathfrak{Y}_{01} + i\varkappa\mathfrak{Y}_{23}) + (\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31})(\mathfrak{Y}_{02} + i\varkappa\mathfrak{Y}_{31}) \\ &\qquad + (\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12})(\mathfrak{Y}_{03} + i\varkappa\mathfrak{Y}_{12}) \\ &= (\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23})(\mathfrak{Y}_{01} - i\varkappa\mathfrak{Y}_{23}) + (\mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31})(\mathfrak{Y}_{02} - i\varkappa\mathfrak{Y}_{31}) \\ &\qquad + (\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12})(\mathfrak{Y}_{03} - i\varkappa\mathfrak{Y}_{12}). \end{aligned}$$

Daher muß die dritte Tangente durch den Schnittpunkt der beiden Erzeugenden laufen:

Satz 5. Den Punktepaaren einer Kongruenzgeraden im Punktraum sind zugeordnet die Tangenten der Grundfläche in einer Tangentialebene (in einem ihrer Punkte).

Oder:

Satz 6. Eine Kongruenzgerade im Punktraum bildet sich auf eine Tangentialebene der Grundfläche ab.

Die Tangentialebene ist dabei als Regulus von Tangenten aufzufassen. Es wäre auch möglich gewesen, als Bild der Kongruenzgeraden zu erklären den Berührungspunkt jener Tangentialebene; auch dieser wäre dann als Regulus aufzufassen (vgl. Satz 11, 12).

Die Ebene, die der Kongruenzgeraden (2) nach Satz 6 zugeordnet ist, heißt

$$(4)\qquad \mathfrak{x}_0:\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3 = l\mu - m\lambda : \varkappa(l\lambda - m\mu) : \varkappa i(l\lambda + m\mu) : \\ -\varkappa(l\mu + m\lambda),$$

so daß zwischen Kongruenzgeraden im Punktraum und Tangentialebenen der Grundfläche die ein-eindeutige Beziehung besteht:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_0:\mathfrak{x}_1:\mathfrak{x}_2:\mathfrak{x}_3 &= (p_{03} - p_{12}) : \varkappa(p_{02} + p_{31}) : \varkappa i(p_{02} - p_{31}) : \\ &\quad -\varkappa(p_{03} + p_{12}), \\ p_{01}:p_{02}:p_{03}:p_{23}:p_{31}:p_{12} &= 0 : \mathfrak{x}_1 - i\mathfrak{x}_2 : \varkappa\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_3 : 0 : \mathfrak{x}_1 + i\mathfrak{x}_2 : \\ &\quad -\varkappa\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_3. \end{aligned}$$

4. **Paare zusammenfallender Ebenen.** Die Ebene $u_0:u_1:u_2:u_3$ des Punktraumes laufe durch die erste Leitgerade, d. i. es sei $u_0 = u_1 = 0$. Sie trifft dann die zweite Leitgerade in einem bestimmten Punkte. Durch diesen läuft ein ebenes Büschel von Kongruenzgeraden, und alle Punktepaare der Ebene werden so gewonnen. Die ∞^2 Bildtangenten der Grundfläche verteilen sich also auf ∞^1 Tangentialebenen, die alle eine Erzeugende zweiter Art gemeinsam haben. In jeder dieser ∞^1 Tangential-

ebenen liegen ∞^1 Bildtangenten. Sie bilden eine quadratische Kongruenz, die aber reduzibel ist und eine doppelt zählende lineare Kongruenz des Tangentenkomplexes mit zusammenfallenden Leitgeraden darstellt. Da es andere lineare Kongruenzen im Tangentenkomplex der Grundfläche nicht gibt, haben wir

Satz 7. Den ∞^2 Punktepaaren einer Ebene des Punktraumes, die durch die erste Leitgerade verläuft, sind die ∞^2 Tangenten der Grundfläche in den Punkten einer Erzeugenden der zweiten Schar zugeordnet.

Satz 8. Den $2 \cdot \infty^1$ Ebenen des Punktraumes, die eine Leitgerade enthalten, werden zugeordnet die im Tangentenkomplex der Grundfläche verlaufenden $2 \cdot \infty^1$ linearen Kongruenzen.

Der analytische Apparat ist in dem allgemeineren enthalten, den wir bei der Abbildung von Paaren getrennter Ebenen entwickeln werden. Vgl. 9.

5. **Paare getrennter Geraden.** Wir gehen zunächst analytisch vor. Damit Allgemeingültigkeit erzielt wird, werden wir zum Teil doppelte Formeln nötig haben. So bereits bei der Aufgabe, die Punktreihe auf der abzubildenden Geraden p anzugeben. Diese wird durch die beiden Darstellungen geliefert

$$(6) \qquad \begin{gathered} p_{01}\sigma_1 : p_{01}\sigma_2 : p_{02}\sigma_2 - p_{12}\sigma_1 : p_{03}\sigma_2 + p_{31}\sigma_1, \\ p_{03}\tau_1 - p_{02}\tau_2 : -p_{31}\tau_1 - p_{12}\tau_2 : p_{23}\tau_1 : p_{23}\tau_2, \end{gathered}$$

die im allgemeinen Falle $p_{01}p_{23} \neq 0$, wo die Gerade p also keine Leitgerade trifft, vermöge $\tau_1 : \tau_2 = p_{02}\sigma_2 - p_{12}\sigma_1 : p_{03}\sigma_2 + p_{31}\sigma_1$ miteinander äquivalent sind. Im besonderen Falle, wo p etwa die zweite Leitgerade trifft ($p_{01} = 0$, $p_{23} \neq 0$), sind sie das nicht mehr; die eine Darstellung versagt, die andere bleibt brauchbar.

Setzen wir diese Werte aus (6) für l, m, λ, μ in (1) ein, so haben wir damit eine Parameterdarstellung des sphärischen Bildregulus. Von den beiden Formelsystemen setzen wir nur das eine her:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01}+i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= (p_{03}^2-p_{31}^2)\tau_1^2+(-p_{02}p_{03}-p_{31}p_{12})2\tau_1\tau_2+(p_{02}^2-p_{12}^2)\tau_2^2,\\
\mathfrak{X}_{02}+i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= i(p_{03}^2+p_{31}^2)\tau_1^2+i(-p_{02}p_{03}+p_{31}p_{12})2\tau_1\tau_2+i(p_{02}^2+p_{12}^2)\tau_2^2,\\
\mathfrak{X}_{03}+i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= +2p_{03}p_{31}\tau_1^2+(p_{03}p_{12}-p_{02}p_{31})2\tau_1\tau_2-2p_{02}p_{12}\tau_2^2,\\
\mathfrak{X}_{01}-i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= p_{23}^2(\tau_1^2-\tau_2^2),\\
\mathfrak{X}_{02}-i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= p_{23}^2 i(\tau_1^2+\tau_2^2),\\
\mathfrak{X}_{03}-i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= p_{23}^2\cdot -2\tau_1\tau_2.
\end{aligned}\tag{7}$$

Aus den Formeln oben lassen sich τ_1^2, $2\tau_1\tau_2$, τ_2^2 eindeutig ausrechnen. Setzt man die dafür gefundenen Werte unten ein, so erhält man für den Regulus drei lineare Gleichungen. Der gesuchte sphärische Regulus besteht demnach als Schnitt dreier Gewinde aus den Erzeugenden der einen (der) Schar einer Fläche zweiter Ordnung. Das gilt auch noch in den beiden Sonderfällen.

Durch den Punkt $\sigma_1:\sigma_2$ $(\tau_1:\tau_2)$ der Geraden p (vgl. (6)) läuft die Kongruenzgerade (in den beiden Sonderfällen je eine Ausnahme):

$$\begin{aligned}
&0:\sigma_1(p_{02}\sigma_2-p_{12}\sigma_1):\sigma_1(p_{03}\sigma_2+p_{31}\sigma_1):0:-\sigma_2(p_{03}\sigma_2+p_{31}\sigma_1):\\
&\qquad\sigma_2(p_{02}\sigma_2-p_{12}\sigma_1).\\
&0:\tau_1(p_{03}\tau_1-p_{02}\tau_2):\tau_2(p_{03}\tau_1-p_{02}\tau_2):0:\tau_2(p_{31}\tau_1+p_{12}\tau_2):\\
&\qquad-\tau_1(p_{31}\tau_1+p_{12}\tau_2).
\end{aligned}\tag{8}$$

Jeder der so erhaltenen ∞^1 Kongruenzgeraden entspricht eine nach (5) zu bildende Tangentialebene. Diese ∞^1 Tangentialebenen laufen sämtlich durch den Punkt

$$-\varkappa(p_{03}-p_{12}):p_{02}+p_{31}:i(p_{02}-p_{31}):-(p_{03}+p_{12}).\tag{9}$$

Wie man durch Bildung des Ausdrucks

$$x_0^2-\varkappa^2x_1^2-\varkappa^2x_2^2-\varkappa^2x_3^2,$$

der für den Punkt (9) den Wert $2\varkappa^2p_{01}p_{23}$ hat, erkennt, liegt der Punkt (9) für den allgemeinen Fall niemals auf der Grundfläche, dagegen immer in den beiden Sonderfällen, wo die Gerade p eine Leitgerade trifft.

In jeder Tangentialebene der Grundfläche durch den Punkt (9) liegt nun eine einzige Regulusgerade. Da sie Tangente der Grundfläche ist und Erzeugende einer andern Fläche zweiter

Ordnung, so berühren sich diese beiden Flächen längs der Ebene, deren Pol in bezug auf die Grundfläche der Punkt (9) ist.

Damit steht aber die Form der Gleichung der vom Bildregulus (7) umhüllten Fläche zweiter Ordnung fest bis auf einen nur noch von den p abhängigen Faktor, der aus dem Büschel berührender Flächen die richtige heraushebt. Den findet man am bequemsten durch Spezialisierung; man wählt irgend eine Gerade des Regulus (7) und stellt die Bedingung dafür auf, daß sie ganz in der Fläche liegt.

So gewinnen wir für die vom Regulus (7), dem Bilde der Geraden p des Punktraumes umhüllte Fläche zweiter Ordnung die Gleichung

$$\begin{aligned}(10)\quad &(p_{01}+p_{23})^2(x_0^2-\varkappa^2 x_1^2-\varkappa^2 x_2^2-\varkappa^2 x_3^2)-\{(p_{03}-p_{12})x_0\\ &+\varkappa(p_{02}+p_{31})x_1+\varkappa i(p_{02}-p_{31})x_2-\varkappa(p_{03}+p_{12})x_3\}^2=0,\end{aligned}$$

und diese gilt in allen, auch den bisher schon betrachteten Fällen.

6. **Paare von Treffgeraden einer Leitgeraden.** Es soll die erste Leitgerade von der Geraden p getroffen werden, also $p_{23}=0$, $p_{01}\neq 0$. Dann ist es zweckmäßig, zu setzen:

$$p_{02}=p_2 q_1,\quad p_{03}=p_3 q_1,\quad p_{31}=-p_3 q_2,\quad p_{12}=p_2 q_2.$$

Dadurch tritt die Eigenart dieses Falles in den Formeln am klarsten hervor. Weder p_2 und p_3, noch q_1 und q_2 können dann gleichzeitig verschwinden.

Die beiden Geraden des Paares können mit der ersten Leitgeraden durch eine Ebene verbunden werden. Nach Satz 8 liegt der zugehörige sphärische Regulus in einer der linearen Kongruenzen, die der Tangentenkomplex der Grundfläche enthält. Er besitzt eine Erzeugende erster Art der Grundfläche; alle Regulusgeraden treffen eine Erzeugende zweiter Art. Diese beiden Erzeugenden bilden, doppelt zählend, den vollständigen Durchschnitt der vom Regulus umhüllten Fläche mit der Grundfläche; sie laufen durch den Punkt (9), der jetzt der Grundfläche angehört. Die Fläche (10) liegt also jetzt mit der Grundfläche in Osculation.

Die ∞^1 Tangentialebenen, in denen die Regulusgeraden verlaufen, gehen durch den Punkt (9), aber sie bilden jetzt ein Ebenenbüschel.

Satz 9. *Einem Paare gerader Linien im Punktraum, welche nur die erste Leitgerade treffen, ist zugeordnet der Regulus von Erzeugenden einer mit der Grundfläche in Osculation liegenden Fläche zweiter Ordnung, der eine Erzeugende der ersten Schar der Grundfläche enthält.*

Geht man von einer durch ihre Gleichung in Punktkoordinaten gegebenen Fläche zweiter Ordnung aus, so verlangt die Unterscheidung der beiden Reguli auf ihr die Adjunktion einer Quadratwurzel. Insofern darf man von einer *orientierten* Fläche zweiter Ordnung sprechen, *wenn* man nur *die eine Schar ihrer Erzeugenden meint.* Dieser Orientierungsprozeß hat also *rein projektiven* Charakter.

7. **Paare von Nullgeraden.** Jede Gerade, die nicht einer der bisher beschriebenen Arten angehört, ist Nullgerade eines bestimmten Gewindes (ϱ), in dem auch die andere Gerade des Paares liegt. Die Fläche (10) läßt sich vermöge (3) so umgestalten, daß ϱ darin auftritt $(p_{01} + p_{23} = (e^{2\varkappa\varrho} + 1)\, p_{01})$.

Diese Fläche wird nun singulär für $p_{01} + p_{23} = 0$ und $p_{01} - p_{23} = 0$. Im ersten Falle gehört die Gerade p des Punktraumes dem *Nebengewinde* $\left(\frac{\pi i}{2\varkappa}\right)$, im zweiten Falle dem *Hauptgewinde* an:

Satz 10. *Einem Paare von Geraden des Punktraumes, die Nullgeraden sind, ohne dem Hauptgewinde oder Nebengewinde anzugehören, ist zugeordnet die eine Schar von Erzeugenden einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung, die die Grundfläche längs eines irreduziblen Kegelschnitts berührt.*

Eine solche Fläche trägt aber zwei Reguli von Erzeugenden, die nach 6 als *zueinander entgegengesetzt* zu bezeichnen sind. Die diesem zweiten Regulus zugeordneten Geraden des Punktraumes findet man einfach durch Vertauschung von p_{01} und p_{23}. Gehörte die ursprüngliche Gerade dem Gewinde (ϱ) an, so liegt die neue im Gewinde $(-\varrho)$; beide Gerade sind konjugierte Polare in bezug auf das Hauptgewinde[1]). Denn die Korrelation (das Nullsystem), welches mit dem Gewinde (ϱ) verbunden ist, läßt sich so schreiben:

$$p'_{01} = e^{-2\varkappa\varrho} p_{23}, \quad p'_{02} = p_{02}, \quad p'_{03} = p_{03}, \quad p'_{23} = e^{2\varkappa\varrho} p_{01},$$
$$p'_{31} = p_{31}, \quad p'_{12} = p_{12}.$$

Die Größe ϱ kann, insofern sie die beiden Reguli auf der Fläche unterscheidet, zur Orientierung der Fläche verwandt werden (sie ist transzendente absolute Simultaninvariante der beiden Gewinde (ϱ) und (0) gegenüber Kollineationen und spielt im Gewindebüschel eine ähnliche Rolle wie sonst die Entfernungen zweier Punkte oder die Winkel gerader Linien).

Eine andere Paarung unserer Reguli wird durch das Polarsystem der Grundfläche vermittelt. Zwei Tangenten der Grundfläche, die konjugierte Polaren in bezug auf die Grundfläche sind, entsprechen Punktepaaren des Punktraumes

$$l : m : \pm\lambda : \pm\mu \quad \text{und} \quad l : m : \pm i\lambda : \pm i\mu.$$

Dabei sind die Gewinde (ϱ) und $\left(\varrho + \frac{i\pi}{2\varkappa}\right)$ des Punktraums gepaart, insonderheit das Hauptgewinde und das Nebengewinde.

8. **Haupt- und Nebengewinde.** Die beiden jetzt noch ausstehenden Fälle erledigen sich leicht. Man liest alles Wünschenswerte ohne weiteres aus (10) ab.

Satz 11. Einem Paare von Geraden des Nebengewindes im Punktraum sind zugeordnet ∞^1 Tangenten der Grundfläche, die eine Ebene erfüllen. Diese wird zur Tangentialebene, sobald das Geradenpaar des Punktraumes überdies der Kongruenz angehört.

Ebenso folgt sofort:

Satz 12. Einem Paare von Geraden des Hauptgewindes im Punktraum sind zugeordnet die Tangenten

[1]) Und auch (bei anderer Zuordnung) in bezug auf das Nebengewinde.

der Grundfläche durch einen Punkt. Dieser liegt auf der Grundfläche, sobald das Geradenpaar des Punktraumes überdies der Kongruenz angehört.

Damit haben wir sechs (acht) Familien sphärischer Reguli. Die Zusammenfassung aller dieser Gestalten unter gemeinsamen Namen führt zu folgendem Satze:

Satz 13. Geraden Linien des Punktraumes, die sich schneiden (ohne einem Paare anzugehören) entsprechen sphärische Reguli, die eine Erzeugende gemeinsam haben, also, wenn man will, sich berührende orientierte Flächen.

9. **Paare getrennter Ebenen.** Jede Ebene $u_0 : u_1 : u_2 : u_3$ eines solchen Paares enthält eine einzige Kongruenzgerade, auf der die Nullpunkte von u in bezug auf die Gewinde (ϱ) liegen. Wir brauchen nur ihren Nullpunkt in bezug auf das Hauptgewinde, der die Koordinaten $u_1 : -u_0 : -u_3 : u_2$ hat. Jeder andere Punkt der Ebene u liegt auf einer einzigen Nullgeraden (0). Alle Bildtangenten der Grundfläche verteilen sich daher auf ∞^1 Tangentialkegel (und eine Tangentialebene), und diese haben sämtlich eine (im Gegensatz zu 4) nicht erzeugende Tangente gemeinsam:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= u_1^2 - u_0^2, & \mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= i(u_1^2 + u_0^2),\\
&& \mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= +2u_1u_0,\\
\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= u_3^2 - u_2^2, & \mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= i(u_3^2 + u_2^2),\\
&& \mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= +2u_3u_2.
\end{aligned}$$

Satz 14. Einem Ebenenpaar im Punktraum sind zugeordnet die ∞^2 Tangenten der Grundfläche, die eine von ihnen treffen (und diese selbst). Letztere ist Erzeugende, wenn das Paar zusammenfallende Ebenen besitzt.

Der Satz ist dual zu den Sätzen 1 und 2, und hätte ebenfalls als Ausgangspunkt benutzt werden können.

10. **Nicht-Euklidische Geometrie.** Bis dahin haben wir uns völlig im Gedankenkreise der projektiven Geometrie bewegt.

Bei weiterer Durchführung arbeitet der sprachliche Ausdruck zu schwerfällig. Dem begegnet man durch die Terminologie der Nicht-Euklidischen Geometrie, wobei also sachlich zu dem bisherigen nichts hinzugefügt wird, eine Bemerkung, die auch heute noch nicht überflüssig ist. Aber dann wirkt das suggestive Moment und führt von da aus leichter zu neuen Tatsachen.

Die Punkte der Grundfläche und ebenso ihre Erzeugenden heißen demgemäß unendlich fern, die übrigen Tangenten der Grundfläche isotrop (Minimalgerade), alle sonstigen geraden Linien anisotrop. Als anisotrop werden auch die Ebenen bezeichnet, die die Grundfläche nicht berühren, als isotrop (Minimalebenen) ihre Tangentialebenen.

Ferner legen wir dem Raume das Krümmungsmaß $-\varkappa^2$ bei, so daß als „Entfernung" der beiden Punkte x und y erklärt wird eine Größe (x, y), wo

(11) $$\cos^2 h\varkappa(x, y) = (x|y)^2 : (x|x)(y|y).$$

Natürlich ist sie dadurch noch nicht eindeutig gegeben. Die Bedeutung der Symbole ist:

$$(x|y) = x_0 y_0 - \varkappa^2 x_1 y_1 - \varkappa^2 x_2 y_2 - \varkappa^2 x_3 y_3 .$$

Da wir den genauen Geltungsbereich unserer Sätze angegeben haben, fassen wir uns jetzt kurz. Es entsprechen sich

Punktraum:	Nicht-Euklidischer Raum:
Punkt der zweiten Leitgeraden.	Unendlich ferne Gerade zweiter Art.
Punkt (Paar).	Minimalgerade.
Erste Leitgerade.	Regulus der unendlich fernen Geraden erster Art.
Kongruenzgerade.	Minimalebene = unendlich ferner Punkt.
Treffgerade der ersten Leitgeraden (Paar).	Orientierte Horosphäre mit einer unendlich fernen Geraden erster Art (Grenzkugel).

Gerade des Nebengewindes (Paar).	Anisotrope Ebene.
Gerade im Hauptgewinde (Paar).	Minimalkegel = im Endlichen gelegener Punkt.
Nullgerade (ϱ) (Paar).	Orientierte Kugel vom „Radius" (ϱ).

Nur diese sphärischen Reguli, nicht aber die fünf (sieben) vorhergehenden, lassen sich als Kugeln ansehen[1]). Um das einzusehen, nennen wir den Punkt (9) jetzt y. Dann wird (10) zu

$$(p_{01} + p_{23})^2 (x|x) - \varkappa^2 (x|y)^2 = 0.$$

Endlich wird $(y|y) = 4\varkappa^2 p_{01} p_{23}$, worauf aus (11) folgt: $(x, y) = \pm \varrho$.

Zwei getrennte Punkte können immer durch eine einzige Gerade verbunden werden.	Zwei Minimalgerade (unendlich ferne Gerade) können stets durch einen einzigen sphärischen Regulus verbunden werden.

Der Satz rechts behält seinen Sinn, wenn die beiden Punkte links einem Paare angehören:

Drei getrennte Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, können durch eine einzige Ebene verbunden werden.	Es gibt eine einzige Minimalgerade (oder unendlich ferne) Gerade, die drei gegebene gleichzeitig trifft.

Auch hier gelten entsprechende Bemerkungen, wie vorhin.

Endlich bemerken wir, daß zwei wohlgeordneten unendlich fernen Punkten zugeordnet sind zwei wohlgeordnete Kongruenzgerade im Punktraum. Von da aus kommt man zum Studyschen Prinzip der sphärischen Bilder eines Speeres (einer Geraden) im Nicht-Euklidischen Raum.

11. Kurven eines Nullsystems. Die geschilderten Zusammenhänge werden sich in erster Linie für die Nicht-Euklidische Geometrie verwerten lassen. Daß aber auch die projek-

[1]) Liebmann, a. a. O., S. 196.

tive Geometrie Nutzen daraus ziehen kann, zeigen wir an einem Beispiel. Es entsprechen sich

Kurve (Punktort),	Mongesche Fläche als Ort von Minimalgeraden,
Dieselbe als Geradenort,	Dieselbe als Ort „berührender" sphärischer Reguli,
Kurve im Nebengewinde,	Tangentenregulus einer unendlich fernen Kurve,
Krumme Kurve im Hauptgewinde,	Tangentenregulus einer Minimalkurve,
Komplexkurve (ϱ).	(Orientierte) Serretsche Fläche (ϱ).

Wir verbinden nun den Pol der Ebene (4), also den unendlich fernen Punkt im Nicht-Euklidischen Raum

$$(12) \qquad -\varkappa(l\mu - m\lambda) : l\lambda - m\mu : i(l\lambda + m\mu) : -(l\mu + m\lambda)$$

mit einem zweiten solchen, der der Kongruenzgeraden $l^* : m^* : \pm\lambda^* : \pm\mu^*$ des Punktraumes zugeordnet ist. Das gibt die Verbindungsgerade

$$(13) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= 2\varkappa(\lambda\mu^* - \lambda^*\mu)(ll^* - mm^*), \\ \mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= -2\varkappa(lm^* - l^*m)(\lambda\lambda^* - \mu\mu^*), \\ \mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= 2\varkappa(\lambda\mu^* - \lambda^*\mu)\, i(ll^* + mm^*), \\ \mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= -2\varkappa(lm^* - l^*m)\, i(\lambda\lambda^* + \mu\mu^*), \\ \mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= 2\varkappa(\lambda\mu^* - \lambda^*\mu)\cdot -(lm^* + ml^*), \\ \mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= -2\varkappa(lm^* - l^*m)\cdot -(\lambda\mu^* + \mu\lambda^*). \end{aligned}$$

Bedeuten jetzt l, m, λ, μ analytische Funktionen einer Veränderlichen t mit gemeinsamem Existenzbereich, die nicht sämtlich Konstante sein, und von denen weder die beiden ersten noch die beiden letzten zugleich identisch verschwinden dürfen, so stellt das System (12) die allgemeinste unendlich ferne analytische Kurve im Nicht-Euklidischen Raum dar[1]). Aus (13)

[1]) Vorausgesetzt ist dabei endlich, daß die vier Funktionen keinen gemeinsamen von t abhängigen Faktor besitzen.

finden wir, falls sie nicht eine Gerade ist ($l(t):m(t) = c_1:c_2$ oder $\lambda(t):\mu(t) = \gamma_1:\gamma_2$) ihren Tangentenregulus:

$$
(14)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{X}_{01} + i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= (\lambda\mu' - \mu\lambda')(l^2 - m^2),\\
\mathfrak{X}_{02} + i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= (\lambda\mu' - \mu\lambda')\, i(l^2 + m^2),\\
\mathfrak{X}_{03} + i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= (\lambda\mu' - \mu\lambda')\cdot -2lm,\\
\mathfrak{X}_{01} - i\varkappa\mathfrak{X}_{23} &= -(lm' - ml')(\lambda^2 - \mu^2),\\
\mathfrak{X}_{02} - i\varkappa\mathfrak{X}_{31} &= -(lm' - ml')\, i(\lambda^2 + \mu^2),\\
\mathfrak{X}_{03} - i\varkappa\mathfrak{X}_{12} &= -(lm' - ml')\cdot -2\lambda\mu,
\end{aligned}
$$

wo die Akzente Differentiation nach t bedeuten.

Dieser Regulus ist nun nach (1) Bild der Kurve im Punktraum (des Kurvenpaares)

$$\sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\,l : \sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\,m : i\sqrt{lm' - ml'}\,\lambda : i\sqrt{lm' - ml'}\,\mu$$

und damit haben wir die allgemeinste Komplexkurve im Nebengewinde erhalten.

Den störenden Faktor i beseitigen wir durch die absolute Korrelation im Nicht-Euklidischen Raume (vgl. 7). Man hat dazu in (14) das Vorzeichen Minus rechts in den drei letzten Formeln fortzulassen. Das gibt dann die Tangentenreguli der Minimalkurven und die Minimalkegel. Im Punktraum sind zugeordnet die Kurven

$$(15)\qquad \sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\,l : \sqrt{\lambda\mu' - \mu\lambda'}\,m : \sqrt{lm' - ml'}\,\lambda : \sqrt{lm' - ml'}\,\mu,$$

und damit ist die allgemeinste Komplexkurve im Hauptgewinde erhalten. Sie läßt sich einfacher schreiben, wobei dann aber immer unzählig viele Kurven verloren gehen; wir setzen etwa

$$l = 1,\quad m = \varphi(t),\quad \lambda = 1,\quad \mu = t,$$

und erhalten inhomogen für die Kurven des Gewindes

$$(16)\qquad dx = y\,dz - z\,dy$$

die integralfreie reelle Darstellung

$$(16)\qquad x = \varphi(t),\quad y = \sqrt{\varphi'(t)},\quad z = t\sqrt{\varphi'(t)}$$

vermöge einer einzigen willkürlichen Funktion, während bei

Lie Scheffers, Geometrie der Berührungstransformationen, S. 236 bis 237 noch deren fünf auftreten. Hier darf φ nicht konstant sein; für $\varphi(t) = a + bt : c + dt$ werden die Nullgeraden dargestellt ($ad - bc \neq 0$).

Von hier aus erhalten wir sehr leicht die Kurven im Gewinde ϱ

$$(17) \qquad x = e^{-2\varkappa\varrho}\varphi(t), \quad y = \sqrt{\varphi'(t)}, \quad z = t\sqrt{\varphi'(t)}$$

und überhaupt durch projektive Transformation die Kurven in jedem nicht ausgearteten Gewinde.

Vermöge (1) folgen aus (16) die Tangentenflächen der Minimalkurven, aus (17) die Serretschen Flächen und ($\varrho = \varrho(t)$) überhaupt die Mongeschen Flächen des Nicht-Euklidischen Raumes, ohne irgend einen Integrationsprozeß. Um diese Gebilde als Punktörter darzustellen, hat man nur noch ausführbare Prozesse nötig, die keinerlei Schwierigkeiten darbieten.

12. **Grenzübergang zur zweiten Lieschen Transformation.** Wir nehmen jetzt mit unseren grundlegenden Formeln (1) eine Umgestaltung vor, die auf eine Kollineation im Punktraum hinauskommt. Dadurch werden wir in die Lage versetzt, ohne der Sache Schaden zu tun, zur Grenze $\varkappa^2 = 0$ überzugehen, d. i. die zweite Liesche Abbildung zu erhalten.

Wir setzen also in (1):

$$(18) \qquad \begin{aligned} l &= \xi_0 + i\varkappa\xi_2, & m &= \xi_1 + i\varkappa\xi_3, \\ \lambda &= \xi_0 - i\varkappa\xi_2, & \mu &= \xi_1 - i\varkappa\xi_3. \end{aligned}$$

Dadurch gehen die Formeln (1) über in

$$(19)^{1)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_{01} &= \xi_0^2 - \xi_1^2 - \varkappa^2(\xi_2^2 - \xi_3^2), & \mathfrak{X}_{23} &= 2(\xi_0\xi_2 - \xi_1\xi_3), \\ \mathfrak{X}_{02} &= i(\xi_0^2 + \xi_1^2) - i\varkappa^2(\xi_2^2 + \xi_3^2), & \mathfrak{X}_{31} &= 2i(\xi_0\xi_2 + \xi_1\xi_3), \\ \mathfrak{X}_{03} &= -2\xi_0\xi_1 - \varkappa^2\cdot -2\xi_2\xi_3, & \mathfrak{X}_{12} &= -2(\xi_0\xi_3 + \xi_1\xi_2). \end{aligned}$$

Das Gewinde (ϱ) erhält die Gleichung ($\pi_{i\varkappa} = \xi_i\eta_\varkappa - \xi_\varkappa\eta_i$):

$$(20) \qquad -\frac{i}{\varkappa}\operatorname{tg} h\,\varkappa\varrho(\pi_{01} - \varkappa^2\pi_{23}) + \pi_{03} - \pi_{12} = 0,$$

[1]) Leipz. Ber. 64 (1912), S. 55.

das Nebengewinde wird zu $\pi_{01} - \varkappa^2 \pi_{23} = 0$, das Hauptgewinde zu $\pi_{03} - \pi_{12} = 0$. Die beiden Leitgeraden heißen in den Koordinaten π:

$$-\varkappa^2 : 0 : -i\varkappa : 1 : 0 : i\varkappa \quad \text{und} \quad -\varkappa^2 : 0 : i\varkappa : 1 : 0 : -i\varkappa.$$

Diese Formeln haben für $\varkappa^2 \neq 0$ genau denselben Inhalt wie die bisherigen. Aber sie leisten mehr, denn sie behalten noch Sinn für $\varkappa^2 = 0$.

1. Die Grundfläche artet aus in

$$x_0^2 = 0, \quad \mathfrak{x}_1^2 + \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 = 0,$$

also in einen irreduziblen Kegelschnitt (Grundkegelschnitt).

2. Das Gewinde (ϱ) wird zu

$$-i\varrho\pi_{01} + \pi_{03} - \pi_{12} = 0. \tag{20a}$$

3. Das Nebengewinde artet aus: $\pi_{01} = 0$.

4. Die Kongruenz erhält zusammenfallende Leitgerade.

5. Die Formeln (19) werden zu

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_{01} = \xi_0^2 - \xi_1^2, && \mathfrak{X}_{23} = 2(\xi_0\xi_2 - \xi_1\xi_3), \\ &\mathfrak{X}_{02} = i(\xi_0^2 + \xi_1^2), && \mathfrak{X}_{31} = 2i(\xi_0\xi_2 + \xi_1\xi_3), \\ &\mathfrak{X}_{03} = -2\xi_0\xi_1, && \mathfrak{X}_{12} = -2(\xi_0\xi_3 + \xi_1\xi_2), \end{aligned} \tag{21}$$

[1]

und stellen die Treffgeraden des Grundkegelschnitts dar, d. i. diejenigen Geraden, die seiner Ebene fremd sind, und ihn treffen, also nicht mehr den ganzen Komplex $\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0$.

13. **Zweite Liesche Abbildung.** Wir haben jetzt die Formeln (21) zu deuten. Sie vermitteln eine Abbildung jetzt der Treffgeraden des Grundkegelschnitts auf den Punktraum.

1. Jeder Treffgeraden des Grundkegelschnitts ist ein einziger Punkt des Punktraumes zugeordnet, also nicht mehr ein Punktepaar. Wegen $\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0$ haben nämlich die drei Quotienten

[1] A. a. O. und D. Math. Vgg. **22** (1913), S. 237.

$$\mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{12} - \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{01} = \mathfrak{X}_{03}\mathfrak{X}_{23} - \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{12} : \mathfrak{X}_{02} = \mathfrak{X}_{01}\mathfrak{X}_{31} - \mathfrak{X}_{02}\mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{03}$$

denselben Wert, den wir $\mathfrak{X}_{00}$ nennen wollen. Ferner ist dann

$$\mathfrak{X}_{00}^2 + \mathfrak{X}_{23}^2 + \mathfrak{X}_{31}^2 + \mathfrak{X}_{12}^2 = 0.$$

Den Gleichungen (21) ist dann hinzuzufügen

$$\mathfrak{X}_{00} = 2i(\xi_1\xi_2 - \xi_0\xi_3),$$

und jetzt lassen sich aus (21) die ξ eindeutig herstellen:

$$\begin{aligned}\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 &= 2(\mathfrak{X}_{01} - i\,\mathfrak{X}_{02}) : -2\,\mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{23} - i\,\mathfrak{X}_{31} : -\mathfrak{X}_{12} + i\,\mathfrak{X}_{00} \\ &= 2\,\mathfrak{X}_{03} : 2(\mathfrak{X}_{01} + i\,\mathfrak{X}_{02}) : \mathfrak{X}_{12} + i\,\mathfrak{X}_{00} : \mathfrak{X}_{23} + i\,\mathfrak{X}_{31}.\end{aligned}$$

2. Jedem Punkte ξ des Punktraumes, für den nicht $\xi_0 = \xi_1 = 0$ ist, ist eine Treffgerade des Grundkegelschnitts zugeordnet.

3. Bei der durch (21) vermittelten Abbildung des Punktraumes auf den speziellen quadratischen Komplex $\mathfrak{X}_{01}^2 + \mathfrak{X}_{02}^2 + \mathfrak{X}_{03}^2 = 0$ treten mithin als singuläre Elemente auf:

a) im Punktraum: Die Punkte der Leitgeraden (∞^1);

b) im Bildraum: Die Geraden in der Ebene des Grundkegelschnitts (∞^2).

Für alle übrigen Stellen ist die Abbildung ein-eindeutig. (Vgl. hierzu 15.)

4. Bei den Einzelheiten der Abbildung modifizieren sich diejenigen Tatsachen gegen früher, die mit den beiden Leitgeraden und dem Nebengewinde in Beziehung standen. Wir stellen wieder die wichtigsten Tatsachen in einer Tafel auf:

Punktraum:	Bildraum:
Punkt.	Treffgerade des Grundkegelschnitts.
Punkte auf einer Geraden des Nebengewindes.	Treffgerade desselben Punktes des Grundkegelschnitts.
Punkte einer Kongruenzgeraden.	Die zuvor genannten Treffgeraden liegen in einer Tangentialebene des Grundkegelschnitts.
Kongruenzgerade.	Tangentialebene.

Gerade des Nebengewindes.	Ein Büschel von Treffgeraden in einer Nicht-Tangentialebene.
Gerade des Hauptgewindes.	Alle Treffgeraden durch einen der Kegelschnittebene fremden Punkt.
Nullgerade (ϱ) ($\varrho \neq 0$).	Die eine Schar von Erzeugenden einer singularitätenfreien Fläche zweiter Ordnung, die den Grundkegelschnitt enthält.
Nullgerade ($-\varrho$).	Die andere Schar.
Krumme Kurve im Nebengewinde.	Unebener Treffgeradenkegel, dessen Scheitel auf dem Grundkegelschnitt liegt.
Ebene durch die Leitgerade.	Bündel von Treffgeraden.
Sonstige Ebene.	Alle Treffgeraden, die eine solche schneiden.

14. **Euklidische Geometrie.** Diese *rein projektiven* Tatsachen lassen sich nun wieder bequemer ausdrücken, wenn man sich der Sprache der Geometrie bedient, deren Metrik sich auf den Grundkegelschnitt als absolutes Gebilde gründet; das ist aber bei geeigneter Deutung der Koordinaten die *Euklidische* Geometrie. So erhalten wir:

Punktraum:	Euklidischer Raum:
Punkt.	Minimalgerade.
Punkte auf einer Geraden des Nebengewindes.	Parallele Minimalgerade.
Punkte einer Kongruenzgeraden.	Doppelt parallele Minimalgerade.
Kongruenzgerade.	Minimalebene.
Gerade des Nebengewindes.	*Orientierte Ebene.*
Gerade des Hauptgewindes.	Minimalkegel = Punkt.
Nullgerade (ϱ).	*Orientierte Kugel* vom „Radius“ ϱ.

Hier gibt es also nur vier Arten sphärischer Reguli. Ihre Beziehungen zu den Geraden des Punktraumes können selbstständig entwickelt werden, indessen liefert bereits unser Grenzübergang alles Wünschenswerte. Infolge von (18) ist

$$(22)\quad \begin{aligned} p_{01}+p_{23} &= 2(\pi_{01}-\varkappa^2\pi_{23}), & p_{01}-p_{23} &= 2i\varkappa(\pi_{03}-\pi_{12}),\\ p_{02}+p_{31} &= -2i\varkappa(\pi_{02}+\pi_{31}), & p_{02}-p_{31} &= -2i\varkappa(\pi_{02}-\pi_{31}),\\ p_{03}+p_{12} &= -2i\varkappa(\pi_{03}+\pi_{12}), & p_{03}-p_{12} &= 2(\pi_{01}+\varkappa^2\pi_{23}). \end{aligned}$$

Die dem Geradenpaare des Punktraumes

$$(\pi_{01}:\pi_{02}:\pi_{03}:\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}),\quad (\varkappa^2\pi_{23}:\pi_{02}:\pi_{12}:\varkappa^{-2}\pi_{01}:\pi_{31}:\pi_{03})$$

zugeordnete Fläche (10) wird zu

$$(23)\quad \begin{aligned} &\{\pi_{01}-\varkappa^2\pi_{23}\}^2(x_0^2-\varkappa^2x_1^2-\varkappa^2x_2^2-\varkappa^2x_3^2)+\{i(\pi_{01}+\varkappa^2\pi_{23})x_0\\ &\quad+\varkappa^2(\pi_{02}+\pi_{31})x_1+\varkappa^2 i(\pi_{02}-\pi_{31})x_2-\varkappa^2(\pi_{03}+\pi_{12})x_3\}^2\\ &\quad=0. \end{aligned}$$

Der Punkt (9) wird zu

$$(24)\quad -i(\pi_{01}+\varkappa^2\pi_{23}):\pi_{02}+\pi_{31}:i(\pi_{02}-\pi_{31}):-(\pi_{03}+\pi_{12}).$$

Diese Entwicklungen gelten wieder für beide Liesche Transformationen in ganz gleicher Weise. Indessen wird man die Formel (23) für $\varkappa^2=0$ nicht so stehen lassen. Wir führen mit ihr den Grenzübergang aus und entwickeln dazu nach Potenzen von $\varkappa^2$. Dabei fallen die Glieder mit $\varkappa^0$ fort, so daß sich ein Faktor $\varkappa^2$ beseitigen läßt. Dann liefert der Grenzübergang nach Abspaltung von π_{01}:

$$(25)\quad \begin{aligned} &4\pi_{23}x_0^2-2ix_0\{(\pi_{02}+\pi_{31})x_1+i(\pi_{02}-\pi_{31})x_2-(\pi_{03}+\pi_{12})x_3\}\\ &\quad+\pi_{01}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)=0. \end{aligned}$$

Gehört die Gerade π des Punktraumes (die andere Gerade des Paares ist mit der übrig gebliebenen Leitgeraden $0:0:0:1:0:0$ zusammengefallen) dem Nebengewinde an ($\pi_{01}=0$), so bleibt (außer dem nur durch die Art des Grenzüberganges hinein gekommenen Faktor x_0) übrig:

$$2i\pi_{23}x_0+(\pi_{02}+\pi_{31})x_1+i(\pi_{02}-\pi_{31})x_2-(\pi_{03}+\pi_{12})x_3=0.$$

Wegen $\pi_{02}\pi_{31}+\pi_{03}\pi_{12}$ ist diese Ebene anisotrop (Euklidisch), so lange $\pi_{03}-\pi_{12}$ nicht verschwindet. Der zugehörige Regulus besteht aus der einen Schar von Minimalgeraden in ihr, insofern liegt eine orientierte Ebene vor, was natürlich durch eine Gleichung in Punktkoordinaten nicht zum Ausdruck gebracht werden kann. Ist π Kongruenzgerade ($\pi_{01} = \pi_{03} - \pi_{12} = 0$), so wird die Ebene isotrop (Minimalebene); der Regulus ist das eine einzige Büschel von Minimalgeraden in ihr.

Im Falle $\pi_{01} \neq 0$ stellt (25) eine Kugel vom Radiusquadrat $-(\pi_{03} - \pi_{12})^2 : \pi_{01}^2 = \varrho^2$ (nach (20a)) dar, die also, falls π dem Hauptgewinde $\pi_{03} - \pi_{12} = 0$ angehört, zu einem Minimalkegel wird. Der Mittelpunkt der Kugel (des Minimalkegels) ergibt sich aus (24), wenn man darin $\varkappa^2 = 0$ setzt. Ist der Radius von Null verschieden, so besteht der zugehörige Regulus nur aus einer einzigen Schar von Erzeugenden der Fläche (23). Diese erhält man aus (19), wenn man darin (vgl. (6)) setzt

$$\xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \pi_{01}\sigma_1 : \pi_{01}\sigma_2 : \pi_{02}\sigma_2 - \pi_{12}\sigma_1 : \pi_{03}\sigma_2 + \pi_{31}\sigma_1 .$$

Die Formeln (19), (20), (23), (24) gelten also in gleicher Weise für beide Liesche Transformationen.

15. **Abbildung des Gewindes auf eine Punktmannigfaltigkeit.** Der leitende Gedanke der bisherigen Ausführungen bestand darin, daß die Punkte (Punktepaare) des Punktraumes abgebildet wurden auf die geraden Linien gewisser spezieller quadratischer Komplexe. Eine andere Behandlung hätte von den Punkten des Bildraums ausgehen können, die auf die Geraden (Geradenpaare) eines nicht ausgearteten Gewindes im Punktraum bezogen werden. Hierdurch kommt man zu einem anders gearteten Zusammenhang zwischen den beiden Lieschen Transformationen. Der Grundgedanke kommt bereits bei F. Klein im Erlanger Programm vor. Wir wollen dazu die analytischen Entwicklungen geben, die auch erkennen lassen, warum wir den von uns eingenommenen Standpunkt für vorteilhafter halten.

In einem Raum von vier Dimensionen seien $\xi_\omega : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ homogene Punktkoordinaten. Wir setzen

$$\begin{aligned} \xi_\omega : \xi_0 : \xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = i(\pi_{01} - \varkappa^2\pi_{23}) : -i(\pi_{01} + \varkappa^2\pi_{23}) :& \\ \pi_{02} + \pi_{31} : i(\pi_{02} - \pi_{31}) : -(\pi_{03} + \pi_{12}),& \qquad (\varkappa \neq 0) \end{aligned} \tag{26}$$

wo die π Plückersche Linienkoordinaten sind.

Es folgt

$$-\xi_\omega^2+\xi_0^2-\varkappa^2\xi_1^2-\varkappa^2\xi_2^2-\varkappa^2\xi_3^2=-\varkappa^2(\pi_{03}-\pi_{12})^2,$$

$$\pi_{01}:\pi_{02}:\pi_{03}:\pi_{23}:\pi_{31}:\pi_{12}=i(\xi_0-\xi_\omega):\xi_1-i\xi_2:-\xi_3:\varkappa^{-2}i(\xi_0+\xi_\omega):$$
$$\xi_1+i\xi_2:-\xi_3.$$

Durch diese Formeln sind die Geraden eines nicht ausgearteten Gewindes (unseres bisherigen Grundgewindes) lückenlos umkehrbar eindeutig bezogen auf die Punkte einer dreifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zweiter Ordnung M_3^2, die im Raum von vier Dimensionen verläuft, singularitätenfrei ist und die Gleichung hat

$$(27)\qquad -\xi_\omega^2+\xi_0^2-\varkappa^2\xi_1^2-\varkappa^2\xi_2^2-\varkappa^2\xi_3^2=0.$$

Den Geraden eines Paares entsprechen die Punkte auf der M_3^2

$$\xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3 \quad \text{und} \quad -\xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3.$$

Die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte läuft durch den Punkt $1:0:0:0:0$, der der M_3^2 nicht angehört. Sie trifft den R_3 $\xi_\omega=0$ im Punkte $0:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3$, d. i.

$$(28)\qquad \begin{aligned}\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3 = -i(\pi_{01}+\varkappa^2\pi_{23}):\pi_{02}+\pi_{31}:\\ i(\pi_{02}-\pi_{31}):-(\pi_{03}+\pi_{12}).\end{aligned}$$

Dieser Punkt, den wir mit (24) identifizieren, ist also dem Punktepaare $\pm\xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3$ der M_3^2 und somit dem Geradenpaare des Grundgewindes zugeordnet (Erste Liesche Transformation).

Das Wentliche ist, daß wir die Punkte der M_3^2 in einen R_3 projiziert haben von einem Punkte aus, der ihr nicht angehört. Daher mußte die Abbildung (1—2) deutig werden.

Um zum Grenzfalle der zweiten Lieschen Transformation zu gelangen, dürfen wir nun nicht etwa $\varkappa^2$ gegen Null konvergieren lassen. Denn dann würde die M_3^2 stark singulär werden und hätte nicht mehr den Zusammenhang des Gewindes.

Vielmehr haben wir dazu das Projektionszentrum auf der M_3^2 anzunehmen, also gewissermaßen stereographisch zu projizieren. Demgemäß verbinden wir alle Punkte der M_3^2 mit dem Punkte $1:1:0:0:0$ (der der übrig bleibenden, doppelt zählenden Leitgeraden $0:0:0:1:0:0$ entspricht. Seine Verbindungsgerade mit $\xi_\omega:\xi_0:\xi_1:\xi_2:\xi_3$ trifft den R_3 $\xi_\omega = 0$ im Punkte

$$(29)\quad 0 : -2\pi_{01} i : \pi_{02} + \pi_{31} : i(\pi_{02} - \pi_{31}) : -(\pi_{03} + \pi_{12}).$$

Damit ist also ein Punkt der M_3^2, mithin eine einzige Gewindegerade einem Punkte des R_3 zugeordnet. Diese Zuordnung ist umkehrbar, so lange $\pi_{01} \neq 0$. Ist aber $\pi_{01} = 0$, so wird $\xi_0 - \xi_\omega = 0$. Die Verbindungsgerade eines solchen Punktes mit dem Projektionszentrum ist Erzeugende der M_3^2. Alle Punkte einer solchen werden auf denselben Punkt des R_3 geworfen: $\quad 0:0:\xi_1:\xi_2:\xi_3 \quad (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0)$.

D. i. die ∞^2 Punkte der M_3^2 auf dem Erzeugendenkegel durch das Projektionszentrum bilden sich auf die ∞^1 Punkte eines irreduziblen Kegelschnitts im R_3 ab, ausgenommen das Projektionszentrum selbst, dessen Bild im R_3 völlig unbestimmt wird. Wir haben also

M_3^2	$\rightarrow$ Gewinde	$\rightarrow$ R_3
Projektionszentrum	$\rightarrow$ Leitgerade	$\rightarrow$ unbestimmt
Punkt auf einer Erzeugenden (∞^1)	$\rightarrow$ Kongruenzgerade (∞^1)	$\rightarrow$ ein Punkt auf einem Kegelschnitt
Sonstiger Punkt	$\rightleftarrows$ Sonstige Gewindegerade	$\rightleftarrows$ Punkt, der Kegelschnittebene fremd.

Die Umkehrung dieser Abbildung verhält sich etwas anders:

R_3	$\rightarrow$ Gewinde	$\rightarrow$ M_3^2
Punkt des Kegelschnitts	$\rightarrow$ ∞^1 Kongruenzgerade	$\rightarrow$ ∞^1 Punkte
∞^2 sonstige Punkte der Kegelschnittebene	$\rightarrow$ Leitgerade	$\rightarrow$ Projektionszentrum
Sonstiger Punkt	$\rightleftarrows$ Gewindegerade	$\rightleftarrows$ Punkt.

Vgl. hierzu die Ausführungen in 13.

Geht man nun mit dem Punkte (28) zur Grenze $\varkappa^2 = 0$ über, so erhält man den Punkt (29) nicht unmittelbar, sondern erst nach einer sehr einfachen Kollineation des R_3.

In dieser Unstimmigkeit erblicken wir den Beweis dafür, daß der von uns eingeschlagene Weg zweckmäßiger ist.