Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1916. Heft II

November- und Dezembersitzung

München 1916

Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Der allgemeine Malussche Satz und der Brunssche Abbildungssatz.

Von **Heinrich Liebmann.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 4. November 1916.

Bekanntlich hat H. Bruns[1]) im Jahre 1895 den Satz bewiesen, daß vollkommene (anastigmatische) Abbildung durch Strahlen, die ein System von homogenen isotropen Medien durchlaufen, nur geometrische Ähnlichkeit bzw. Symmetrie sein kann. Er gab dem Satz die Fassung:

Der Malussche Satz läßt anastigmatische Körper nur in dem Falle zu, wo die punktweise Abbildung die Form

$$X = \pm \mu x, \quad Y = \pm \mu y, \quad Z = \pm \mu z$$

besitzt, also eine geometrisch ähnliche ist.

F. Klein[2]) hat kurze Zeit darauf durch Einbeziehung der imaginären „Minimalstrahlen" einen überraschend einfachen Beweis desselben Satzes erbracht.

Im folgenden wird dieser Beweis durch einen andern ersetzt, der das Gebiet des Reellen nicht verläßt. Außerdem aber wird von der Annahme isotroper homogener Zwischenmedien abgesehen, da diese optische Beschaffenheit nur für den Objektraum und den Bildraum erforderlich ist.

Für diese unsere Zwecke bedarf es einer von Lie ausgesprochenen Verallgemeinerung des Malusschen Satzes, die

[1]) H. Bruns, Das Eikonal. Leipzig, Abhandl. 21 (1895), 323—435. Vgl. S. 371.

[2]) F. Klein, Räumliche Kollineation bei optischen Instrumenten. Zeitschr. f. Math. und Phys. 46 (1901), 376—382.

hier zunächst in seiner Fassung angegeben werden mag. Auf die Bedeutung der darin vorkommenden Fachausdrücke kommen wir weiter unten zurück.

Lie[1]) sagt:

„Lichtstrahlen, die ein Pseudonormalensystem bilden, gehen bei jeder Reflexion und Refraktion in ein Pseudonormalensystem über. Sind bei einer solchen Refraktion die beiden in Betracht kommenden Pseudokugeln (d. h. Wellenflächen) wesentlich verschieden, so bezieht sich jedes Pseudonormalensystem auf den betreffenden Raum."

Die folgende Entwickelung wird sich so aufbauen, daß wir uns zuerst (§ 1) eine Verallgemeinerung des bekannten Gaußschen Satzes über geodätische Parallelkurven vor Augen stellen, sodann den von Lie ausgesprochenen allgemeinen Malusschen Satz beweisen (§ 2) und endlich den Brunsschen Satz in der angegebenen Verallgemeinerung und ohne Verlassen des reellen Gebietes erhalten (§ 3).

§ I. Der allgemeine Gausssche Satz.

Es handelt sich darum, die Eigenschaft der geodätischen Linien, daß die Orthogonalkurven einer eingliedrigen Schar von geodätischen Linien auf ihnen gleiche Stücke abschneiden, auf Lagrangesche Variationsprobleme zu erweitern in sachgemäßer Form.

Die Aufgabe, die Extremalen des Variationsproblems

$$\text{(A)} \quad J = \int_{P_0}^{P} f(x, y, z, y', z')\, dx = \text{Min} \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

---

[1]) S. Lie, Die infinitisimalen Berührungstransformationen der Optik. Leipz. Ber. 48 (1896), 131—133. Daselbst steht kein Beweis, nur ein Rückverweis auf Leipz. Ber. 47 (1895), S. 499 Anm. — Es darf wohl angenommen werden, daß die folgenden Ausführungen sich im Rahmen der von Lie ersonnenen, aber a. a. O. nicht einmal angedeuteten Gedankengänge bewegen, mit dem Unterschied freilich, daß Lie sehr selten die hier in den Mittelpunkt tretende Beziehung zwischen Variationsrechnung und Berührungstransformationen in den Kreis seiner Betrachtungen zu ziehen pflegte.

bei festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt (P_0, P) zu bestimmen, wobei dJ auch als Zeitelement (dt) bei einer stationären, mit der von der Richtung

$$dx : dy : dz = 1 : y' : z'$$

des Linienelementes abhängigen Geschwindigkeit

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}}{f(x, y, z, y', z')}$$

vor sich gehenden *Strahlung* aufgefaßt werden kann, und $f\,dx$ in der Literatur auch als *reduzierte Länge* des Bogenelementes bezeichnet wird, führt auf die bekannten Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right) = 0. \tag{1}$$

Wenn nur der Anfangspunkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$ festgehalten wird, während der Endpunkt $P(x, y, z)$ sich auf der Gleitkurve (*Transversale*)

$$y = \bar{y}(x), \quad z = \bar{z}(x)$$

frei bewegen kann, so tritt für die Lösung dieser neuen Aufgabe noch die *Transversalitätsbedingung*

$$(\bar{y}' - y')\frac{\partial f}{\partial y'} + (\bar{z}' - z')\frac{\partial f}{\partial z'} + f(x, y, z, y', z') = 0$$

hinzu, welche die Lage von P auf der Gleitkurve bestimmt.[1]) Sie kann durch geometrische Betrachtung leicht gewonnen werden und geht, wenn f die Gestalt hat

$$f = g(x, y, z)\sqrt{1 + (y')^2 + (z')^2}$$

(Problem der Strahlung im isotropen inhomogenen Medium) einfach in die Forderung über, daß die Extremale in P senkrecht auf der Transversale stehen soll.

---

[1]) Die Transversalitätsbedingungen für sehr allgemeine Variationsprobleme sind bereits in Moigno-Lindelöf, Calcul des variations, Paris 1861 zu finden. Man gelangt zu ihnen durch einfache infinitisimalgeometrische Betrachtungen, wie sie weiter unten auch hier gebraucht werden.

Die Gesamtheit der Linienelemente $(\bar{y}', \bar{z}')$, die in einem Punkt $P(x, y, z)$ der Extremale zu ihrem Linienelement $(y' = u, z' = v)$ transversal gerichtet sind, erfüllt dann ein Flächenelement x, y, z, p, q und zwar findet man zur Festlegung des Flächenelementes, indem man

$$\bar{z}' = p + q\bar{y}'$$

in die obige Gleichung einsetzt und fordert, daß sie identisch für jeden Wert von $\bar{y}'$ bestehen soll, die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u} + q\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \tag{2}$$

$$f - u\frac{\partial f}{\partial u} + (p - v)\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$

aus denen noch folgt

$$\frac{\partial f}{\partial v}(v - p - qu) = f.$$

Durch u und v sind also p und q eindeutig bestimmt. Umgekehrt aber brauchen p und q die Größen u und v nicht eindeutig zu bestimmen (z. B. im Fall der Doppelbrechung).

Liegt sodann irgend eine Fläche

$$z = z(x, y) \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

vor, so geht von jedem ihrer Flächenelemente eine (bzw. mehrere) Extremale aus, deren Richtung (bzw. deren Richtungen)

$$dx : dy : dz = 1 : u : v$$

im Ausgangspunkt durch Auflösung der Gleichungen (2) nach u und v sich berechnet. Diese Extremalen wollen wir die *Pseudonormalen*[1]) der Fläche *hinsichtlich des Variationsproblems* A

[1]) Eine so definierte Liesche Pseudonormalenschar ist also identisch mit dem Gebilde, das O. Bolza (Vorlesungen über Variationsrechnung, Leipzig 1909, S. 639—646) ein „Mayersches Transversalenfeld“ nennt; der hier bewiesene allgemeine Gaußsche Satz wird von Bolza als „verallgemeinerter Kneserscher Transversalensatz“ bezeichnet. Vor Bolza hat übrigens schon Vessiot diesen Satz bewiesen in seiner

nennen, auch wohl das Linienelement (x, y, z, u, v) und das Flächenelement (x, y, z, p, q) kurzweg als *konjugiert zueinander* bezeichnen.

Wir werden jetzt mit Anwendung der für diesen Zweck ganz besonders geeigneten Lehre von den Berührungstransformationen die folgende Verallgemeinerung des angeführten Satzes von Gauß beweisen, in der selbstverständlich eine bestimmte Schar von Pseudonormalen herausgegriffen ist:

Trägt man auf den Pseudonormalen einer Fläche (F) gleiche reduzierte Längen (t) ab, d. h. bestimmt man auf jeder dieser Pseudonormalen den Punkt P_1 aus der Forderung, daß das längs der Pseudonormale vom Ausgangspunkt P auf F bis zum Punkt P_1 genommene Integral

$$\int_P^{P_1} f(x, y, z, y', z')\, dx = t = \text{konst.}$$

wird, so fallen die Pseudonormalen der von den P_1 gebildeten Fläche F_1 mit denen von F zusammen.

Eine infinitesimale Berührungstransformation (B. T.)

$$x_1 = x + \xi\,\delta t,\quad y_1 = y + \eta\,\delta t,\quad z_1 = z + \zeta\,\delta t,\quad p_1 = p + \varphi\,\delta t,\quad q_1 = q + \chi\,\delta t$$

ist gegeben, wenn man von den fünf darin auftretenden Koeffizienten z. B. die drei ersten, ξ, η, ζ kennt. Auch diese können nicht ganz frei gewählt werden, vielmehr erhält man die zwischen ihnen bestehenden Beziehungen[1]), außerdem aber die Funktionen φ und ψ, wenn man in

Arbeit „Sur l'interprétation mécanique des transformations de contact infinitísimales" (S. M. Fr. Bulletin 34, 1906, S. 230—269). Auf Seite 260 ist zu lesen: „Wenn ∞^2 Trajektorien einer Fläche konjugiert sind, so sind sie ∞^1 Flächen konjugiert, und die zwischen zwei solchen Flächen enthaltenen Bögen entsprechen gleichen Zeiten". Später hat H. Weber eine Arbeit veröffentlicht (Über den Satz von Malus für krummlinige Strahlen, Palermo Rend. 29, 1910, S. 396—406), die aber, wie auch einige anschließende Untersuchungen, nicht den allgemeinen Malusschen Satz, sondern den Gauß-Kneserschen zum Gegenstand hat mit Beschränknng auf isotrope Medien.

[1]) Lie-Engel, Theorie der Transformationsgruppen II, S. 521.

(3) $$d\zeta - p\,d\xi - q\,d\eta - \varphi\,dx - \chi\,dy \equiv \sigma(dz - p\,dx - q\,dy)$$

die Koeffizienten der fünf unabhängigen Differentiale dx, dy, dz, dp, dq auf beiden Seiten einander entsprechend gleich setzt.

Wir werden alsbald feststellen, daß es eine infinitisimale B. T. gibt, bei der der Vektor PP_1, welcher den Träger $P(x, y, z)$ eines Flächenelementes mit dem Träger P_1 des jeweils zugeordneten unendlich benachbarten Elementes verbindet, die Richtung
$$\xi : \eta : \zeta = \delta x : \delta y : \delta z = 1 : u : v$$
und die reduzierte Länge δt hat. Man setzt zu diesem Zweck

(4) $$\xi = \frac{1}{f}, \quad \eta = \frac{u}{f}, \quad \zeta = \frac{v}{f},$$

wobei u und v mit p und q durch die Gleichungen (2) verbunden sind. In (3) hat man sich dann nur an Stelle von p und q die u und v eingeführt zu denken und muß zeigen, daß die Gleichungen
$$\frac{\partial\zeta}{\partial u} - p\frac{\partial\xi}{\partial u} - q\frac{\partial\eta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial v} - p\frac{\partial\xi}{\partial v} - q\frac{\partial\eta}{\partial v} = 0$$
erfüllt sind. In der Tat erhält man durch Einsetzen der Werte (4)
$$-v\frac{\partial f}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial u} - q\left(f - u\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0,$$
$$f - v\frac{\partial f}{\partial v} + p\frac{\partial f}{\partial v} + qu\frac{\partial f}{\partial v} = 0,$$
und diese Gleichungen stimmen mit den zur Einführung von p und q an Stelle von u und v dienenden Gleichungen (2) überein.

Wir bestimmen sodann die Bahnen der aus der infinitisimalen Transformation entstehenden eingliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen und weisen nach, daß sie die Extremalen des Problems (A) sind. Man erhält die Differentialgleichungen
$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}\left(= \frac{dp}{\varphi} = \frac{dq}{\chi}\right) = dt.$$

Setzt man die Werte von ξ, η und ζ ein, so folgt

$$\frac{dy}{dx} = u, \quad \frac{dz}{dx} = v$$

und weiter[1]) mit Rücksicht auf (3) und (2)

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\varphi}{\xi} = f\left(\frac{d\zeta}{dx} - p\frac{d\xi}{dx} - q\frac{d\eta}{dx}\right) = -\frac{(v-p-qu)}{f}\frac{df}{dx}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial v}}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

und ebenso

$$\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dq}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Transformiert man anderseits die Gleichungen (1) mit Rücksicht auf $y' = u$, $z' = v$ und (2), so erhält man dieselben Gleichungen. Dies erkennt man am einfachsten durch Differentiation. Die erste Gleichung (2) gibt

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right) + \frac{dq}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} + q\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right) = 0$$

oder mit Rücksicht auf (1)

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{dq}{dx}\frac{\partial f}{\partial v} + q\frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

und ebenso führt die zweite nach kurzer Umrechnung auf

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dp}{dx}\frac{\partial f}{\partial u} + p\frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Damit ist die Identität der von einem Elemente x, y, z, p, q ausstrahlenden (zu ihm *konjugierten*) Extremale mit der Bahnkurve, welche der Träger des Elementes bei der ein-

---

[1]) $\frac{df}{dx}$ hat hier die Bedeutung $\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}$.

gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen beschreibt, nachgewiesen, indem nämlich die Differentialgleichungen auf dieselbe Form gebracht sind, eine Übereinstimmung übrigens, die schon bei infinitisimal-geometrischer Betrachtung durchaus selbstverständlich erscheint.[1])

Die endliche Transformation also (mit beliebigem Parameter t) verwandelt jede Fläche F, indem ihre Flächenelemente dauernd transversal zu den von F ausstrahlenden Pseudonormalen bleiben und alle längs der Pseudonormale um das gleiche Stück von der reduzierten Länge (t) wandern, in eine neue Fläche (mit denselben Pseudonormalen), und damit ist der verallgemeinerte Gaußsche Satz bewiesen.

§ 2. Der allgemeine Malussche Satz.

Die bisherigen Betrachtungen sollten den verallgemeinerten Malusschen Satz vorbereiten und einleiten. Um zu einem deutlichen Bild der angestrebten Verallgemeinerung zu gelangen, gehen wir von dem folgenden *Variationsproblem mit Trennungsfläche* aus.

Es sollen diejenigen Kurven bestimmt werden, welche die Summe

$$(\mathrm{C}) \qquad J = \int_{P_0}^{Q} f(x, y, z, y', z')\, dx + \int_{Q}^{P_1} f_1(x_1, y_1, z_1, y_1', z_1')\, dx_1 \doteq J + J_1$$

zu einem Minimum machen.

Dabei ist angenommen, daß P_0 und P_1 zwei im Raumteil $R(x, y, z)$ bzw. $R_1(x_1, y_1, z_1)$ festgegebene Punkte sind, während Q auf der Scheidewand

$$\bar{z} = g(x, y), \quad \left(\bar{p} = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \bar{q} = \frac{\partial g}{\partial y}\right)$$

---

[1]) Die Betrachtung setzt voraus, daß man aus den Transversalitätsbedingungen (2) wirklich p und q als Funktionen von u und v berechnen kann. Dafür ist die Bedingung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\right)^2 \neq 0$$

notwendig und hinreichend.

frei beweglich ist. Damit dann J ein Minimum wird, muß der in R verlaufende Teil der Kurve eine Extremale des Problems

$$\text{(A)} \qquad \int f(x, y, z, u, v)\, dx = \text{Min.} \quad \left(u = \frac{dy}{dx}, \quad v = \frac{dz}{dx}\right)$$

sein, und der in R_1 verlaufende Teil eine Extremale des Problems

$$\text{(B)} \quad \int f_1(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1)\, dx_1 = \text{Min.} \quad \left(u_1 = \frac{dy_1}{dx_1}, \quad v_1 = \frac{dz_1}{dx_1}\right)$$

sein, und man hat nur noch das Verhalten an der Übergangsstelle (Q), also die an der Scheidewand eintretende *Brechung* zu untersuchen. Ersetzt man Q durch einen unendlich benachbarten auf der Scheidewand gelegenen Punkt

$$x + \varepsilon, \quad y + \varepsilon \bar{y}', \quad z + \varepsilon \bar{z}' \quad (\bar{z}' = \bar{p} + \bar{q}\, \bar{y}'),$$

so erhält man die weitere Forderung

$$\delta \bar{J} = \delta J + \delta J_1 = \varepsilon \left\{ (\bar{y}' - u) \frac{\partial f}{\partial u} + (\bar{z}' - v) \frac{\partial f}{\partial v} + f(x, y, z, u, v) \right.$$
$$\left. - (\bar{y}' - u_1) \frac{\partial f_1}{\partial u_1} - (\bar{z}' - v_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_1} - f_1(x, y, z, u_1, v_1) \right\} = 0$$

und hieraus, wenn man erwägt, daß $\bar{z}' = \bar{p} + \bar{q}\, \bar{y}$ und die Beziehung für jeden Wert von $\bar{y}'$ und $\bar{z}'$ besteht, die beiden Gleichungen

$$\text{(2'')} \qquad \begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial u} + \bar{q} \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + \bar{q} \frac{\partial f}{\partial v_1}, \\ f - u \frac{\partial f}{\partial u} + (\bar{p} - v) \frac{\partial f}{\partial u} = f_1 - u_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + (\bar{p} - v_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_1}. \end{gathered}$$

Trifft eine Extremale des Raumes R die Scheidewand im Punkt $Q(x, y, z)$, so hat man hieraus, da u, v und $\bar{p}$, $\bar{q}$ bekannt sind, die Richtung

$$dx_1 : dy_1 : dz_1 = 1 : u_1 : v_1$$

ihrer Fortsetzung (des *gebrochenen Strahles* oder der *gebrochenen Extremale*) zu bestimmen, wobei sich selbstverständlich mehrere Richtungen ergeben können.

Unser Ziel ist jetzt der Beweis des folgenden *allgemeinen Satzes über gebrochene Extremalen:*

Trägt man auf den Pseudonormalen einer Fläche F des Gebietes R, die nach der Brechung gemäß (2'') als Extremalen des Variationsproblems (B) fortzusetzen sind, gleiche reduzierte Längen ab, wobei die reduzierte Länge in R durch

$$\int f(x, y, z, u, v)\, dx \qquad \left(u = \frac{dy}{dx},\ v = \frac{dz}{dx}\right)$$

und in R_1 durch

$$\int f_1(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1)\, dx_1 \left(u_1 = \frac{dy_1}{dx_1},\ v_1 = \frac{dz_1}{dx_1}\right)$$

zu messen ist, so ist der Ort der Endpunkte wieder transversal zu den gebrochenen Extremalen, d. h. es ist, wenn

$$z_1 = z_1(x_1, y_1) \qquad \left(p_1 = \frac{\partial z_1}{\partial x_1},\ q_1 = \frac{\partial z_1}{\partial y_1}\right)$$

die Gleichung dieses Ortes ist,

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} + q_1 \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0. \tag{2'}$$

$$f_1 - u_1 \frac{\partial f_1}{\partial u_1} + (p_1 - v_1) \frac{\partial f_1}{\partial v_1} = 0.$$

Diese Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes ist zu erweisen; sie enthält insbesondere auch den allgemeinen Malusschen Satz:

Jedes System von Pseudonormalen des Problems (A) geht nach der durch (2'') bestimmten Brechung an der Scheidewand in ein System von Pseudonormalen des Problems (B) über.

Für die Entwickelungen des § 3 ist übrigens die genauere erste Fassung wichtig; den Malusschen Satz, der darin mit enthalten ist, haben wir nur der Vollständigkeit halber ausgesprochen.

Da sowohl im Raum R wie im Raum R_1 der Gaußsche Satz des § 1 gilt, so ist nur noch die Brechung zu untersuchen, und zwar ist zu zeigen, daß je zwei benachbarte Elemente vereinigter Lage (oder vereinigte, zu zwei unendlich benachbarten Extremalen von A transversale Elemente) des Raumes R in zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage von R_1 übergehen. Diesen Vorgang wollen wir jetzt an der Hand der Formeln (2), (2′), (2″) im einzelnen verfolgen.

Wir betrachten ein Element x, y, z, p, q, dessen Träger Q ein Punkt der Trennungsfläche ist, die daselbst das Element $x, y, z, \bar{p}, \bar{q}$ hat. Das erste, dem Raume R angehörige Element wird dann *augenblicklich gedreht* und geht in ein Element x_1, y_1, z_1, p_1, q_1 des Raumes R_1 über. Dabei sind p_1 und q_1 aus $p, q, \bar{p}$ und $\bar{q}$ zu berechnen, wozu die sechs Gleichungen (2), (2′), (2″) dienen, aus denen u, v, u_1 und v_1 zu eliminieren sind.

Nach der Zeit δt ist dann dieses Element in ein neues des Raumes R_1 übergegangen mit den Koordinaten

$$(5) \qquad x + \xi_1 \delta t, \;\; y + \eta_1 \delta t, \;\; z + \zeta_1 \delta t, \;\; p_1 + \varphi_1 \delta t, \;\; q_1 + \chi_1 \delta t,$$

von denen die drei ersten den Träger P_1 bestimmen. Dabei ist nach § 1 zu setzen

$$(4') \qquad \xi_1 = \frac{1}{f_1}, \quad \eta_1 = \frac{u_1}{f_1}, \quad \zeta_1 = \frac{v_1}{f_1}$$

und φ_1 und χ_1 sind durch

$$(3') \qquad d\zeta_1 - p_1 d\xi_1 - q_1 d\eta_1 - \varphi_1 dx_1 - \chi_1 dy_1 \equiv \sigma_1 (dz_1 - p_1 dx_1 - q_1 dy_1)$$

bestimmt.

Ferner sei

$$x - \delta x, \quad y - \delta y, \quad z - \delta z, \quad (p - \delta p, \quad q - \delta q)$$

irgend ein zu x, y, z, p, q *unendlich benachbartes und mit ihm vereinigt liegendes Element des Raumes* R, dessen Koordinaten also die Forderung

$$\delta z - p \delta x - q \delta y = 0$$

erfüllen.

Wir wollen sodann den oben noch willkürlich gelassenen Faktor δt so bestimmen, daß der Träger P des *zweiten* Elementes gerade nach der Zeit δt in der Trennungsfläche liegt, daß also seine Koordinaten

$$(\mathrm{Q}_1) \quad x - \delta x + \xi\delta t, \; y - \delta y + \eta\delta t, \; z - p\delta x - q\delta y + \zeta\delta t$$

die Gleichung

$$z = \bar{z}(x, y) \quad \left(\bar{p} = \frac{\partial\bar{z}}{\partial x}, \; \bar{q} = \frac{\partial\bar{z}}{\partial y}\right)$$

erfüllen. Dies führt auf die Forderung

$$(6) \qquad \delta t(\zeta - \bar{p}\xi - \bar{q}\eta) = (p - \bar{p})\delta x + (q - \bar{q})\delta y,$$

welche δt bestimmt.

Wir wollen jetzt zeigen, daß das Element (5) und das aus dem zweiten durch Wanderung seines Trägers nach Q_1 und Drehung in R_1 (wie sie oben beschrieben worden ist) hervorgehende Element wieder zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage, nunmehr selbstverständlich in R_1, bilden. Dabei ist von vorneherein zu beachten, daß die beiden letzten Elementkoordinaten, die man vielleicht im Gegensatz zu den *Trägerkoordinaten* als *Richtungskoordinaten* bezeichnen kann, sich für die betrachteten Elemente voneinander und von p_1 und q_1 nur um Größen von der Ordnung δt unterscheiden. Man hat also nur nachzuweisen, daß die Komponenten des Vektors $P_1 Q_1$:

$$\bar{\delta x_1} = (\xi_1 - \xi)\delta t + \delta x, \quad \bar{\delta y_1} = (\eta_1 - \eta)\delta t + \delta y,$$
$$\bar{\delta z_1} = (\zeta_1 - \zeta)\delta t + p\delta x + q\delta y$$

die Bedingung

$$\bar{\delta z_1} = p_1\bar{\delta x_1} + q_1\bar{\delta y_1}$$

erfüllen, so daß die Aufgabe entsteht, die Gleichung

$$(7) \quad \delta t\{(\zeta_1 - \zeta) - p_1(\xi_1 - \xi) - q_1(\eta_1 - \eta)\} = \delta x(p_1 - p) + \delta y(q_1 - q)$$

unter Annahme von (6) für willkürliches δx und δy zu erweisen.

Statt mit (6) und (7) rechnet man bequemer mit (6) und der aus (6) und (7) entstehenden Gleichung

$$(8) \qquad \begin{aligned} \delta t\{\zeta_1 - p_1\xi_1 - q_1\eta_1 + \xi(p_1 - \bar{p}) + \eta(q_1 - \bar{q})\} \\ = \delta x(p_1 - \bar{p}) + \delta y(q_1 - \bar{q}), \end{aligned}$$

und unsere Aufgabe ist gelöst, wenn wir erkannt haben, daß vermöge der Gleichungen (2), (2') und (2'') die Koeffizienten der entsprechenden Glieder in (6) und (8) einander proportional sind. Die genannten Gleichungen geben sofort

$$(p-\bar{p})\frac{\partial f}{\partial v}=(p_1-\bar{p}_1)\frac{\partial f_1}{\partial v_1},$$

$$(q-\bar{q})\frac{\partial f}{\partial v}=(q_1-\bar{q}_1)\frac{\partial f_1}{\partial v_1}.$$

Außerdem ist nach (4)

$$\zeta-\bar{p}\xi-\bar{q}\eta=\frac{v-\bar{p}-\bar{q}u}{f},$$

und nach (4') und (2')

$$\zeta_1-p_1\xi_1-q_1\eta_1+\xi(p_1-\bar{p})+\eta(q_1-\bar{q})$$

$$=\frac{v_1-p_1-q_1u_1}{f_1}+\frac{p_1-\bar{p}+u(q_1-\bar{q})}{f}=\frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial v_1}}+\frac{p_1-\bar{p}+u(q_1-\bar{q})}{f}.$$

Man hat also zum Nachweis der Proportionalität nur noch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial v}(v-\bar{p}-\bar{q}u)=f+\frac{\partial f_1}{\partial v_1}(p_1-\bar{p}+u(q_1-\bar{q})),$$

d. i. nach (2') und (2'')

$$=f+\frac{\partial f}{\partial v}(p-\bar{p}+u(q-\bar{q}))$$

oder endlich

$$v\frac{\partial f}{\partial v}=f+p\frac{\partial f}{\partial v}+uq\frac{\partial f}{\partial v}=u\frac{\partial f}{\partial u}+(v-p)\frac{\partial f}{\partial v}-u\frac{\partial f}{\partial u}=v\frac{\partial f}{\partial v}$$

zu beweisen, und damit ist sie bestätigt.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen:

Zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage des Raumes R (x, y, z) gehen unter der Annahme, daß der Träger Q (x, y, z) des ersten im Zeitpunkt t gerade die Trennungsfläche der beiden Räume erreicht hat, während der Träger P $(x-\delta x,\ y-\delta y,\ z-p\delta x-q\delta y)$ des zweiten noch innerhalb von R liegt, nach Verlauf der durch (6) bestimmten Zeit δt

in zwei unendlich benachbarte Elemente vereinigter Lage des Raumes $R_1(x_1, y_1, z_1)$ über mit den Trägern P_1 (innerhalb von R_1) und Q_1 auf der Trennungsfläche. Dabei sind die reduzierten Längen der Vektoren QP_1 und PQ_1 alle beide gleich δt.

Betrachtet man im Anschluß hieran die Wanderung *aller* Flächenelemente einer Fläche F des Raumes R, wie sie durch die Strahlung gegeben ist, dann die Brechung der Pseudonormalen und Drehung der Flächenelemente an der Scheidewand, endlich die Strahlung im Raum R_1, wobei jene Flächenelemente in Transversalstellung zu den gebrochenen Extremalen bleiben und wieder einen Verein von ∞^2 Flächenelementen bilden, so sieht man die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für gebrochene Extremalen.

§ 3. Der Brunssche Satz in allgemeiner Form.

Gegeben sei ein optisches System von folgender sehr allgemeiner Beschaffenheit: Es besteht aus einem Objektraum, der von homogenem isotropem Medium erfüllt ist, einer Folge von inhomogenen anisotropen Zwischenmedien und einem Bildraum, den wieder ein homogenes isotropes Medium erfüllt.

Die Lichtgeschwindigkeiten seien ferner

im Objektraum c
im Bildraum c_1

und im k-ten Zwischenmedium

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dx f_k\left(x, y, z, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}\right)},$$

also von Ort und Richtung abhängig.

Dann sind die Lichtwege oder *Strahlbahnen* durch die Forderung bestimmt, daß das längs einer Strahlbahn genommene Integral

$$c\int_P^{Q_1} ds + \int_{Q_1}^{Q_2} f_1(x, y, z, y', z')\,dx + \cdots + \int_{Q_n}^{Q_{n+1}} f_n(x, y, z, y', z')\,dx + c_1\int_{Q_{n+1}}^{P_1} ds$$

ein Minimum wird. Hierin bedeutet P den Ausgangspunkt, Q_k den Schnittpunkt der Strahlbahn mit der Trennungsfläche des $(k-1)$-ten und des k-ten Zwischenmediums, P_1 den Endpunkt im Objektraum.

Das erste Stück PQ_1 und das letzte $Q_{n+1}P_1$ der Strahlbahn ist geradlinig, die weiteren Stücke sind Extremalen der Variationsprobleme

$$\int f_k(x, y, z, y', z')\,dx = \text{Min.}$$

und die Brechungen an den Trennungsflächen sind nach § 2 bestimmt.

Wir wollen übrigens nicht alle Strahlbahnen betrachten, sondern nur eine ausgewählte Schar von ∞^4, die wirklich alle Zwischenmedien durchdringen. Demnach haben nicht alle Linienelemente eines Trägers P als Anfangselemente von Strahlbahnen zu gelten, sondern nur ein gewisser Ausschnitt, dessen Begrenzung durch den Mantel eines Kegels veranschaulicht werden kann, der P mit dem Rand der Öffnung einer geeignet gewählten Blende verbindet.

Beim Strahlungsvorgang hat man sich von P Kugelwellen ausgehend zu denken. Die Flächenelemente einer Kugelwelle wandern zunächst mit konstanter Geschwindigkeit c im Objektraum, in senkrechter Stellung zu den geradlinigen Strahlbahnen, dann in den Zwischenmedien, so daß die Träger auf einer Extremale bleiben, die Elemente die Transversalstellung einhalten; im Objektraum wird die Transversalstellung wieder einfach Orthogonalität, die Geschwindigkeit konstant gleich c_1.

Wenn nun P *optisch vollkommen* oder *anastigmatisch* abgebildet wird, d. h. wenn die von P ausgehenden Strahlbahnen sich in P_1 vereinigen, so bilden nach dem Satze des § 2 die *gleichzeitig* von P ausgehenden Elemente E im Objektraum einen Verein von Flächenelementen (E'), die zu den Strahlen, die sich in P_1 vereinigen, senkrecht stehen, sie erfüllen also (für einen Wert von t, der innerhalb gewisser Grenzen zu wählen ist) eine Kugel mit dem Mittelpunkt P_1; außerdem sind alle *reduzierten Längen* (EE') einander gleich, eben gleich t. Insbesondere kann man t so wählen, daß die Elemente E' den Punkt P_1 zum Träger haben. Es sind also die Durchlaufszeiten *aller* von P ausgehenden und in P_1 sich wieder vereinigenden Strahlbahnen *einander gleich*; dieser Wert von t möge als der *optische Abstand* (PP_1) bezeichnet werden.

Ist die Abbildung eines Teiles des Objektraums optisch vollkommen, so ist sie nach Abbé bekanntlich eine *Kollineation*, und wir können jetzt den in der Einleitung ausgesprochenen Ähnlichkeitssatz leicht beweisen. Er läßt sich so aussprechen:

Die durch eine Reihe ganz allgemeiner Zwischenmedien vermittelte, optisch vollkommene Abbildung eines homogenen isotropen Objektraums auf einen ebenfalls homogenen isotropen Bildraum ist notwendig ähnliche Abbildung.

Wir wählen im Objektraum vier in *einer Ebene gelegene* Punkte $ABCD$ so aus, daß AB, BC, AD und DC als Strecken von Strahlbahnen betrachtet werden können (wodurch die Richtungen gewissen Beschränkungen unterliegen, denn die Fortsetzungen der Strecken müssen durch die Blendenöffnung gehen), und daß überdies

$$AB + DC = AD + BC$$

ist, also $ABCD$ ein Tangentenviereck eines Kreises bildet. Wegen der vorausgesetzten Beziehung zwischen den Längen der vier Seiten kann man dann vier Flächenelemente E_1, E_2, E_3, E_4 angeben, deren Träger Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 auf AB, BC, DC und AD liegen, während die Elemente auf den Strahlbahnen senkrecht stehen und

$$AQ_1 = AQ_4, \quad Q_1B = BQ_2, \quad Q_2C = Q_3C, \quad Q_4D = DQ_3$$

ist, Q_1 kann beliebig gewählt werden, die drei andern Punkte sind dadurch bestimmt.

Die Elemente E_1, E_2, E_3, E_4 gehen nach Verlauf eines innerhalb gewisser Grenzen beliebig wählbaren Zeitabschnittes t in vier Elemente E_1', E_2', E_3', E_4' über, die im Bildraum liegen, senkrecht zu den Strecken A_1B_1, B_1C_1, D_1C_1 und A_1D_1 stehen und als Träger vier Punkte haben, die auf diesen Strecken liegen, den Fortsetzungen der Strahlbahnen AB, BC,

DC und AD oder, was dasselbe ist, den Verbindungslinien der Bildpunkte A_1, B_1, C_1, D_1.

Für die reduzierten Längen findet man auf Grund unserer Entwickelungen

$$(A_1 E_1') = (A E_1) + (E_1 E_1') - (A A_1)$$
$$(A_1 E_4') = (A E_4) + (E_4 E_4') - (A A_1),$$

und hieraus wegen $(E_1 E_1') = (E_4 E_4') = t$

und $$(A E_1) = \frac{A Q_1}{c} = \frac{A Q_4}{c} = (A E_4)$$

$$(A_1 E_4') = (A_1 E_1'), \quad \text{also } A_1 Q_4' = A_1 Q_1'.$$

Ebenso lassen sich die übrigen Gleichheiten

$$Q_1' B_1 = B_1 Q_2', \quad Q_2' C_1 = Q_3' C_1, \quad Q_4' D_1 = D_1 Q_3'$$

beweisen, und man erhält

$$A_1 B_1 + D_1 C_1 = B_1 C_1 + A_1 D_1$$

Durch die optische vollkommene Abbildung hat sich also das Tangentenviereck $ABCD$ wieder in ein Tangentenviereck eines Kreises verwandelt.

Läßt man jetzt X auf AD und Y auf BC sich so bewegen, daß XY beständig Anfangsstrecke einer Strahlbahn ist und den dem Viereck $ABCD$ einbeschriebenen Kreis berührt, so berührt auch $X_1 Y_1$ immer einen und denselben Kreis im Bildraum. Hieraus folgt zunächst, daß die Kollineation ∞^6 zwar in ihrer Auswahl und Begrenzung durch die Forderung, daß die Tangenten XY Stücke von Strahlbahnen sein sollen — nicht aber in der Dimension ihrer Mannigfaltigkeit beschränkte Kreisbögen wieder in Kreisbögen überführt. Also ist die Kollineation *Ähnlichkeit*, wozu im Falle der Spiegelung noch Symmetrie treten kann.

Schließlich ist leicht zu zeigen, daß *alle* optischen Abstände (PP_1) einander gleich sind.[1])

[1]) Die folgende Betrachtung unterscheidet sich kaum von der entsprechenden bei Klein, a. a. O. S. 379.

Betrachtet man zu diesem Zweck ein gleichschenkliges Dreieck mit den Seiten

$$BA = AC = c\tau_1, \quad BC = c\tau_2$$

und das ihm ähnliche Dreieck der Bildpunkte mit den Seiten

$$B_1 A_1 = A_1 C_1 = c_1 \tau_1', \quad B_1 C_1 = c_1 \tau_2',$$

so findet man

$$\begin{aligned}(CC_1) &= (AA_1) + \tau_1' - \tau_1 \\ (CC_1) &= (BB_1) + \tau_2' - \tau_2 \\ (BB_1) &= (AA_1) + \tau_1 - \tau_1',\end{aligned}$$

also $\quad \tau_1 - \tau_1' = (BB_1) - (AA_1) = \tau_2 - \tau_2' - \tau_1 + \tau_1'$

oder $\quad 2(\tau_1 - \tau_1') = \tau_2 - \tau_2'.$

Da aber das Verhältnis $\tau_1 : \tau_1'$ wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke gleich $\tau_2 : \tau_2'$ ist, so folgt

$$\tau_1 = \tau_1', \quad \tau_2 = \tau_2' \quad \text{und} \quad (AA_1) = (BB_1) = (CC_1)$$

oder allgemein:

(PP_1) ist von der Wahl von P unabhängig; auch wird

$$\frac{PQ}{c} = (PQ) = (P_1 Q_1) = \frac{P_1 Q_1}{c_1};$$

d. h.: *Entsprechende Strecken verhalten sich wie die Lichtgeschwindigkeiten in den beiden Räumen.*