Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1915. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1915
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Lösung der Spannungsaufgabe für das Ausnahmefachwerk.

Von **A. Föppl.**

Vorgelegt in der Sitzung am 1. Mai 1915.

Die Theorie des Fachwerks beschäftigt sich hauptsächlich mit der Ermittelung der Stabspannungen, die entweder in einem statisch bestimmten oder auch in einem unbestimmten Fachwerke durch gegebene Lasten hervorgebracht werden, die an den Knotenpunkten angreifen. Schon längst hat man verschiedene Verfahren gefunden, nach denen diese Spannungsaufgabe für das ebene wie für das räumliche Fachwerk in fast allen überhaupt möglichen Fällen ohne Schwierigkeit und in befriedigender Weise gelöst werden kann.

So weit es sich um statisch unbestimmte Fachwerke handelt, legt man bei der Lösung der Spannungsaufgabe die Annahme zu Grunde, daß die Längenänderungen der Stäbe proportional mit den Stabspannungen und zugleich so klein gegen die ursprünglichen Stablängen sind, daß sie mit hinreichender Genauigkeit als unendlich klein in die Rechnung eingeführt werden dürfen. Bei den praktischen Anwendungen, die man von der Theorie des Fachwerks im Bauwesen zu machen hat, trifft diese Voraussetzung stets mit großer Annäherung zu.

Größere Abweichungen bestehen freilich bei den praktischen Bauausführungen von der anderen Annahme, daß die Fachwerkstäbe in den Knotenpunkten frei drehbar miteinander verbunden sein sollen. Diese Annahme liegt indessen schon dem geometrischen Begriffe des Fachwerks zu Grunde. Wenn sie nicht genau genug erfüllt ist, wird dadurch zwar die Anwendbarkeit der Theorie auf den betreffenden Fall der Bauausführung entsprechend beeinträchtigt; der Fachwerktheorie selbst kann aber kein Vorwurf daraus gemacht werden, daß sie auf Umstände keine Rücksicht nimmt, die überhaupt nicht in ihren Aufgabenkreis fallen.

Mit diesen Vorbehalten kann man sagen, daß die Spannungsaufgabe der Fachwerktheorie, abgesehen von dem besonderen Falle, der hier besprochen werden soll, bereits als vollständig befriedigend gelöst angesehen werden darf. Bisher noch nicht gelöst ist nämlich die Aufgabe nur bei den sogenannten Ausnahmefachwerken. Darunter versteht man Fachwerke, die trotz genügender Stabzahl und sonst geeigneter Gliederung wegen der besonderen Lage, in der sich die Knotenpunkte gegeneinander befinden, keine steifen und gegen beliebige Belastungen widerstandsfähigen Stabverbände bilden. Um ein einfaches Beispiel dafür vor Augen zu haben, betrachte man den Zusammenschluß von zwei Dreiecken in der Ebene durch drei Verbindungsstäbe. Wenn man jeder Ecke des einen Dreiecks eine Ecke des anderen Dreiecks als entsprechend zuweist und zwischen je zwei entsprechende Ecken einen Verbindungsstab anordnet, erhält man im allgemeinen ein stabiles ebenes Fachwerk. Dagegen tritt der Ausnahmefall ein, sobald die Dreiecke so zueinander liegen und die Stäbe zwischen ihnen so geführt werden, daß sich ihre Richtungslinien entweder in demselben Punkte schneiden oder daß sie parallel zu einander sind.

Ein anderes sehr bekanntes Beispiel liefert das Pascalsche Sechseck. Ein Stabverband aus 9 Stäben, von denen 6 den Umfangsseiten eines Sechsecks und die anderen den drei Hauptdiagonalen folgen, bildet nämlich unter gewöhnlichen Umständen ein widerstandsfähiges Fachwerk. Sobald aber die Ecken des Sechsecks auf einem Kegelschnitte liegen, bildet der Stabverband ein Ausnahmefachwerk.

Die Ausnahmefachwerke haben seit langem in der Fachwerktheorie eine wichtige Rolle gespielt. Gewöhnlich hat man sich aber doch nur insoweit mit ihnen beschäftigt, als man die Bedingungen nachwies, unter denen der Ausnahmefall eintritt.[1] Auf die Spannungsaufgabe ging man nicht näher ein, sondern begnügte sich mit der Bemerkung, daß im Grenzfalle, der dem Ausnahmefachwerke entspricht, die Spannungen bei beliebig gegebenen Lasten unendlich groß ausfielen. Natürlich ist aber diese Aussage nur dahin zu verstehen und auch nur dahin verstanden worden, daß selbst noch so große Stabspannungen kein Gleichgewicht mit den Lasten herzustellen vermögen, ohne daß eine Gestaltänderung der Fachwerkfigur erfolgte. Wie groß aber die Spannungen nach einer solchen Gestaltänderung tatsächlich ausfielen, ließ man dahingestellt.

Eine Gestaltänderung tritt bei jedem Fachwerke ein, wenn es belastet wird, da die Stäbe durch die Spannungen elastische Längenänderungen erfahren. Unter gewöhnlichen Umständen bleibt jedoch die Gestaltänderung von derselben Größenordnung wie die Längenänderung der einzelnen Fachwerkstäbe, so daß sie bei der Spannungsermittelung überhaupt nicht beachtet zu werden braucht. Beim Ausnahmefachwerk ist dies aber anders; es stellt auch in dieser Beziehung einen Ausnahmefall dar, indem eine merkliche Gestaltänderung bereits möglich ist, wenn sich auch die Stablängen nur um im Vergleiche dazu unmerklich kleine Größen ändern. Um dieser geometrischen Eigenschaft der Ausnahmefachwerke durch eine anschauliche Bezeichnung Ausdruck zu geben, habe ich ihnen in meinem Lehrbuche der graphischen Statik das Eigenschaftswort „wackelig“ beigelegt. Man könnte daher die Ausnahmefachwerke auch als „Wackelfachwerke“ bezeichnen.

Nachdem sich eine kleine Gestaltänderung vollzogen hat, ist der Ausnahmefall nicht mehr genau verwirklicht und der Stabverband wird um so widerstandsfähiger gegen weitere Form-

---

[1]) Eine sehr ausführliche und gründliche Untersuchung dieser Art, die sich auch auf das räumliche Fachwerk erstreckt, hat neuerdings Herr Prof. Ernst Kötter in Aachen unter dem Titel „Über den Grenzfall u. s. f.“ im Anhange zu den Abhandlungen der Berliner Akademie für 1912 veröffentlicht. Sonderabdruck im Verlage d. Akad., Berlin 1913.

änderungen, je mehr die Gestaltänderung fortschreitet. Diese Überlegung lehrt, daß jeder Grund fehlt, die Stabspannungen als unendlich groß anzusehen; sie werden nur sehr groß ausfallen im Verhältnisse zu stabilen Fachwerken unter sonst ähnlichen Umständen, weil sich die Fachwerkfigur auch nach der Formänderung immerhin nicht viel von der dem Ausnahmefalle entsprechenden unterscheidet. Aber wenn die Belastung, die von dem Fachwerke aufgenommen werden muß, ziemlich klein ist, können die Stabspannungen, die dadurch hervorgerufen werden, leicht unterhalb der Grenzen bleiben, die man als zulässig anzusehen hat. Es liegt dann kein erhebliches Bedenken gegen eine praktische Ausführung dieser Art vor.

Freilich sind die Ausnahmefachwerke im Vergleiche mit ihnen sonst ähnlichen Anordnungen von stabilen Fachwerken stets nur in geringem Maße widerstandsfähig. Man wird sie daher, wenn nicht zwingende Gründe von anderer Art vorliegen, stets sorgfältig zu vermeiden suchen. Hierin ist jedenfalls der Grund dafür zu erblicken, daß man sich bisher so wenig um die Lösung der Spannungsaufgabe für die Ausnahmefachwerke bemüht hat. In der ersten Auflage meines vorher erwähnten Lehrbuchs, die im Jahre 1900 erschienen ist, habe ich zwar bereits für einen besonders einfachen Fall, der bei gewissen praktischen Anwendungen tatsächlich vorkommt, eine Lösung der Spannungsaufgabe gegeben. Daran habe ich damals die folgende Bemerkung geknüpft: „Ein ganz allgemein anwendbares direktes Verfahren für die Lösung dieser Aufgabe ist bisher, so viel mir bekannt ist, nicht ausgearbeitet worden und ich will mich jetzt auch nicht mit einem Versuche aufhalten, die Lücke auszufüllen.“ Hierin war offensichtlich eine Anregung ausgesprochen, diese Frage in Angriff zu nehmen. Aber obschon das Buch in den Kreisen, die sich mit Fragen dieser Art beschäftigen, eine große Verbreitung gefunden hat, scheint bisher noch Niemand der Aufforderung, wenigstens nicht mit einem merklichen Erfolge, entsprochen zu haben. Als ich vor einiger Zeit selbst Veranlassung fand, mich mit diesen Dingen von neuem zu beschäftigen, beschloß ich daher, selbst den Versuch zu einer Lösung zu machen, die immerhin von vornherein keineswegs leicht erschien. Dabei stellte sich jedoch schließlich heraus, daß die Lösung durch Einführung von Vernachlässigungen, die den Rahmen der auch sonst üblichen nicht wesentlich überschreiten, weit einfacher gestaltet werden kann, als ich anfänglich vermutet hatte.

Hier werde ich mich damit begnügen, das Verfahren ganz allgemein zu beschreiben und zu begründen und die allgemein gültigen Schlußfolgerungen abzuleiten, die sich daraus ergeben. Zur besseren Erläuterung wäre freilich auch die Behandlung einiger Beispiele wünschenswert; aber diese möchte ich lieber auf eine andere Gelegenheit verschieben.

Um zu einer leicht verständlichen, möglichst einfachen Ausdrucksweise zu gelangen, lege ich bei der Auseinandersetzung des Verfahrens ein ebenes Fachwerk zu Grunde, wie ja auch von jeher das ebene Fachwerk den Hauptgegenstand fast aller Arbeiten über die Fachwerktheorie gebildet hat. Ich bemerke jedoch, daß dieselben Überlegungen mit geringen Änderungen ebenso auch bei räumlichen Ausnahmefachwerken zum Ziele führen.

Um n Knotenpunkt in der Ebene steif miteinander zu verbinden, braucht man $2n-3$ Stäbe. Diese müssen zwischen den Knotenpunkten so verteilt sein, daß niemals zwischen irgendwie ausgewählten n' von diesen Knotenpunkten $(n > n' > 1)$ mehr als $2n'-3$ Verbindungsstäbe verlaufen. Die Erfüllung dieser Bedingungen führt im allgemeinen zu einem geometrisch und statisch bestimmten Fachwerke; dem Begriffe des „Ausnahmefachwerks“ oder „Grenzfachwerks“ entspricht es, daß dieselben Bedingungen bei ihm ebenfalls erfüllt sein sollen.

Nimmt man aus dem hiernach aufgebauten Verbande der $2n-3$ Stäbe einen beliebig ausgewählten Stab heraus, so wird ein zwangläufiger Mechanismus entstehen. Das gilt ebenfalls nicht nur für das statisch bestimmte Fachwerk, sondern im allgemeinen auch noch für das Ausnahmefachwerk. Man muß allerdings hinzufügen, daß Herr Ernst Kötter in seinem Beitrage zur Festschrift für Müller-Breslau und auch in der vorher schon angeführten Akademieschrift darauf hingewiesen hat, daß dies nicht unbedingt so sein muß. Man kann nämlich, wie Herr Kötter gezeigt hat, auch solche Stabverbände angeben, die bei n Knotenpunkten und weniger als $2n - 3$ Stäben trotzdem „in sich einspannbar“, d. h. fähig sind, ein Spannungsbild von Eigenspannungen ohne Mitwirkung äußerer Lasten aufzunehmen und die außerdem bei streng unveränderlichen Stablängen auch als unverschieblich zu betrachten wären. Es ist daher nicht ausgeschlossen, daß man nach Entfernung eines Stabes aus dem Verbande von $2n - 3$ Stäben nicht auf einen Mechanismus, sondern auf einen solchen Kötterschen Stabverband kommt. Aber von diesem ganz besonderen Falle will ich hier absehen und mich damit begnügen, ein gewöhnliches Ausnahmefachwerk zu untersuchen, das durch Fortnahme eines Stabs in einen Mechanismus verwandelt werden kann.

Daß der Stabverband ein Ausnahmefachwerk bildet, ist alsdann darauf zurückzuführen, daß der Stab, den man entfernt hatte, um einen Mechanismus herzustellen, nach seinem Wiedereinsetzen wenigstens eine kleine Bewegung des Mechanismus nicht zu verhindern vermag. Das ist nur unter der Bedingung möglich, daß sich der Abstand der Knotenpunkte des Mechanismus, zwischen denen der herausgenommene Stab verlief, bei einer kleinen Bewegung des Mechanismus ohnehin nicht ändert und daß daher die bestehende Bewegungsmöglichkeit durch das Einsetzen des Stabs nicht wieder aufgehoben werden kann. Diese Überlegung führt zu dem von Mohr für die Ausnahmefachwerke angegebenen Kennzeichen, daß irgend ein Stab, etwa der, den wir uns herausgenommen dachten, eine Länge haben muß, die entweder ein Maximum oder ein Minimum bildet, das mit den als gegeben anzusehenden Längen aller übrigen Stäbe aus Gründen des geometrischen Zusammenhangs noch verträglich ist.

Der kürzeren Ausdrucksweise wegen soll hier der Stab, durch dessen Herausnahme man das Fachwerk in den vorher besprochenen Mechanismus verwandelt, als der H a u p t s t a b bezeichnet werden. Bei der Bezifferung, durch die wir hernach die einzelnen Stäbe des Fachwerks voneinander unterscheiden wollen, soll er die Ziffer 0 erhalten. Welchen Stab des Fachwerks man als den Hauptstab ansehen will, ist im allgemeinen gleichgültig, wenn nur für ihn das vorher genannte Mohrsche Kennzeichen zutrifft. Gewöhnlich und so auch bei den vorher als Beispiele angeführten einfachen Fällen kann sogar jeder Stab des Fachwerks als Hauptstab ausgewählt werden. Gehen jedoch z. B. von einem Knotenpunkte nur zwei Stäbe aus, die nicht in einer geraden Linie liegen, so kann von diesen beiden Stäben jedenfalls keiner als Hauptstab angesehen werden, da das vorher angeführte Mohrsche Kennzeichen für ihn nicht zutrifft. Ferner ergibt sich aus den weiteren Betrachtungen, daß nur solche Stäbe nicht als Hauptstäbe gelten können, die bei dem in dem Ausnahmefachwerke möglichen Spannungsbilde von Eigenspannungen nicht beteiligt sind, sondern beim Fehlen äußerer Lasten notwendig spannungslos bleiben müssen. Die Entscheidung nicht nur über die zulässige, sondern zugleich auch über eine zweckmäßige Auswahl des Hauptstabs wird in der Regel bei den Ausnahmefachwerken, für die man die Spannungsaufgabe zu lösen wünscht, keinerlei Schwierigkeiten verursachen.

Die augenblickliche Stellung des Mechanismus, der durch Entfernen des Hauptstabs hervorgegangen ist, soll durch eine geeignet gewählte Veränderliche φ gekennzeichnet werden. Am zweckmäßigsten wird es gewöhnlich sein, als Hülfsveränderliche φ einen Winkel zu wählen, den zwei Stäbe miteinander bilden, die sich bei einer Bewegung des Mechanismus gegeneinander drehen. Für die Ausgangsstellung, die der Mechanismus im gegebenen Ausnahmefachwerke einnahm, sei der Winkel mit φ_0 bezeichnet und für die Drehung $\varphi - \varphi_0$ sei, unter der Voraussetzung, daß die Drehung ziemlich klein bleibt, kürzer $\Delta\varphi$ geschrieben.

Man kann aber unter dem bei den folgenden Rechnungen vorkommenden Buchstaben φ auch den Abstand zwischen zwei passend ausgewählten Knotenpunkten des Mechanismus verstehen. In diesem Falle würde eine Stabvertauschung, bei der man den beseitigten Hauptstab durch den Stab von der Länge φ_0 ersetzt, das Ausnahmefachwerk in ein gewöhnliches stabiles Fachwerk verwandeln. Ich nehme hier zunächst an, daß φ ein die Stellung des Mechanismus beschreibender Winkel sein soll, mache jedoch darauf aufmerksam, daß die aufgestellten Formeln auch bei der anderen Deutung des Buchstabens ihre Gültigkeit behalten.

Der Abstand der Knotenpunkte, zwischen denen im Ausnahmefachwerke der Hauptstab verlief, sei für irgend eine Stellung des Mechanismus mit l bezeichnet und für die Anfangsstellung mit l_0. Der Abstand l ist als eine Funktion von φ aufzufassen und für die Änderung $l - l_0$ oder Δl, die l bei einer kleinen Bewegung $\Delta\varphi$ des Mechanismus erfährt, findet man nach dem Taylorschen Satze

$$\Delta l = \Delta\varphi \frac{\partial l}{\partial\varphi} + \tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 \frac{\partial^2 l}{\partial\varphi^2} + \cdots$$

Nach der Voraussetzung, daß es sich um ein Ausnahmefachwerk handeln soll, ist aber der erste Differentialquotient von l nach φ gleich Null. Unter Vernachlässigung von höheren Potenzen der kleinen Größe $\Delta\varphi$ behält man daher

$$\Delta l = \tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 \frac{\partial^2 l}{\partial\varphi^2}.$$

Der Wert des zweiten Differentialquotienten von l für die Anfangsstellung des Mechanismus kann und muß in jedem Beispiele, für das man die Spannungsaufgabe lösen soll, auf Grund einer geometrischen Betrachtung der Bewegung, die der Mechanismus ausführt, zahlenmäßig ermittelt werden. Sollten sich für eine genaue Berechnung irgend welche Schwierigkeiten einstellen, so wird es doch stets leicht möglich sein, auf graphischem Wege einen hinreichend genauen Näherungswert dafür abzuleiten, indem man mehrere aufeinander folgende Stellungen des Mechanismus im Maßstabe so genau als möglich aufzeichnet und die aus der Zeichnung abgemessenen Abstände l mit den zugehörigen Drehungen $\Delta\varphi$ aus der Anfangsstellung vergleicht. Jedenfalls darf daher für die weitere Untersuchung vorausgesetzt werden, daß der Wert des zweiten Differentialquotienten von l nach φ für die Anfangsstellung des Mechanismus bereits ermittelt sei. Er ist dann als eine bekannte konstante Größe anzusehen, für die weiterhin die Bezeichnung c_0 gebraucht werden soll. Die vorige Gleichung ist dann kürzer

$$\varDelta l = \tfrac{1}{2} c_0 \varDelta \varphi^2 \tag{1}$$

zu schreiben.

Bisher war angenommen, daß die Stablängen $l_1 l_2 \ldots l_k$ konstant bleiben sollten. Jetzt setze ich aber voraus, daß nicht nur der Winkel φ_0 eine Änderung um $\varDelta\varphi$ erfahren soll, sondern daß zugleich auch alle Stäbe des Mechanismus ihre Längen um beliebige kleine Größen $\varDelta l_1$, $\varDelta l_2 \ldots \varDelta l_k$ ändern sollen. Die augenblickliche Gestalt und Stellung des Mechanismus wird dann durch die voneinander unabhängigen Veränderlichen φ, l_1, $l_2 \ldots l_k$ beschrieben und der Abstand l der Endknotenpunkte des aus dem Ausnahmefachwerk herausgenommenen Hauptstabs ist als eine Funktion aller dieser Variabeln aufzufassen. Nachher sollen unter den $\varDelta l_1$ u. s. f. elastische Längenänderungen der Stäbe verstanden werden, die nach dem, was vorher besprochen wurde, und mit demselben Rechte wie bei der Spannungsberechnung für die gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke mit genügender Annäherung als unendlich klein angesehen werden dürfen. Hiernach ist die Änderung von l, die zu einer solchen Änderung $\varDelta l_1$ von l_1 gehört, wenn dabei die anderen unabhängigen Veränderlichen als konstant angesehen werden,

$$\varDelta l = \varDelta l_1 \frac{\partial l}{\partial l_1} \tag{2}$$

zu setzen. Der Differentialquotient von l nach l_1 verschwindet nämlich, wie wir nachher noch sehen werden, im allgemeinen nicht; in der Regel wird vielmehr $\varDelta l$ mit $\varDelta l_1$ von ungefähr gleicher Größenordnung sein. Von der Beifügung eines weiteren Gliedes in der Taylorschen Entwickelung mit dem Faktor $\varDelta l_1^2$ darf daher abgesehen werden.

Auch die Differentialquotienten von l nach l_1 u. s. f. können und müssen im einzelnen Falle sämtlich zahlenmäßig ermittelt werden. Das wäre, wie vorher bei c_0, durch eine Untersuchung der Bewegung möglich, die der Mechanismus ausführt. Kürzer und auch noch aus anderen Gründen zweckmäßiger ist aber ein anderes Verfahren.

Wie vorher schon bemerkt, gehört es nämlich zu den wichtigsten und längst bekannten Eigenschaften des Ausnahmefachwerks, daß in ihm Spannungen auftreten können, die an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen, ohne daß dabei äußere Kräfte mitzuwirken brauchten. Um sich davon zu überzeugen, denke man sich den Hauptstab herausgenommen und an seinen beiden Endknotenpunkten Lasten S_0 angebracht von gleicher Größe und entgegengesetzten Richtungen, so wie sie einer vom Hauptstabe übertragenen Zugspannung entsprechen würden. Bei einer kleinen virtuellen Bewegung, die man hierauf mit dem Mechanismus vornimmt, ist die Summe der Arbeitsleistungen der beiden Kräfte S_0 gleich Null, weil sich nach der grundlegenden Eigenschaft des Ausnahmefachwerks der Abstand der beiden Angriffspunkte nicht, oder doch wenigstens nur um unendlich kleine Größen von der zweiten Ordnung ändert. Hierin besteht aber nach dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten das hinreichende Kennzeichen dafür, daß sich die beiden Lasten S_0 an dem Mechanismus im Gleichgewichte halten. Es müssen sich hiernach in den anderen Stäben Spannungen S_1, $S_2 \ldots S_k$ ausbilden, die zusammen mit den Lasten S_0 an jedem Knotenpunkte Gleichgewicht herstellen.

Das Spannungsbild S_0, S_1, $S_2 \ldots S_k$ der „Eigenspannungen läßt sich im einzelnen Falle auch durch einen Kräfteplan vor Augen führen, der für eine beliebige Annahme von S_0 in bekannter Weise mit geringer Mühe aufgezeichnet werden kann. Zweckmäßig ist es, die Spannung S_0 im Hauptstabe hierbei als eine Zugspannung von der Lasteinheit anzunehmen, wie es in ähnlicher Weise auch bei der Lösung der Spannungsaufgabe für die gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke zu geschehen pflegt. In der Folge bezeichne ich diesen Kräfteplan der Eigenspannungen mit dem Buchstaben u und zwar derart, daß die daraus entnommene Spannung des Stabes 1 mit u_1 bezeichnet wird u. s. f. Jedes u ist positiv zu rechnen, wenn es einer Zugspannung und negativ, wenn es einer Druckspannung entspricht. Für den Hauptstab hat man hiernach auf jeden Fall

$$u_0 = +1 \tag{3}$$

zu setzen.

Nachdem der Kräfteplan u gezeichnet ist, denke man sich außer dem Hauptstabe noch einen anderen Stab, etwa den Stab 1, der ja ein ganz beliebiger Stab sein kann, aus dem ganzen Verbande entfernt. Um das vorher betrachtete Gleichgewicht dann noch weiter aufrecht zu erhalten, bringe man an den Endknotenpunkten von Stab 1 zwei äußere Kräfte an von derselben Größe und Richtung wie die daran vorher angreifende Stabspannung von Stab 1. Die Größe stimmt daher mit u_1 überein und die Richtung bestimmt sich nach dem Vorzeichen von u_1. Bei einer virtuellen Bewegung des jetzt mit zwei Freiheitsgraden ausgestatteten Stabverbandes möge φ konstant bleiben, während sich die Entfernung der Endknotenpunkte des herausgenommenen Stabes 1, die vorher gleich l_1 war, um den kleinen Betrag Δl_1 ändern soll. Dann steht die zugehörige Änderung der Entfernung der Endknotenpunkte des gleichfalls herausgenommenen Hauptstabes Δl mit Δl_1 in dem durch Gl. (2) angegebenen Zusammenhange.

Bei dieser virtuellen Bewegung muß die Summe der Arbeitsleistungen der vier an dem Stabverbande angreifenden äußeren Kräfte gleich Null sein. Die beiden Kräfte u_1 leisten hierbei zusammen genommen eine Arbeit

$$-u_1 \Delta l_1,$$

wobei das negative Vorzeichen davon herrührt, daß die Zugspannungen positiv gerechnet werden und daß Δl_1 positiv ist, wenn es eine Verlängerung bedeutet, wobei aber die Zugspannungen, weil sich die Angriffspunkte entgegen den Kraftrichtungen voneinander entfernen, eine negative Arbeit leisten.

In derselben Weise läßt sich auch die Arbeit der an den Endknotenpunkten des herausgenommenen Hauptstabes angreifenden Zugspannungen von der Lasteinheit ausdrücken und die Arbeitsgleichung lautet daher

$$-\Delta l - u_1 \Delta l_1 = 0,$$

woraus in Verbindung mit Gl. (2)

$$\frac{\partial l}{\partial l_1} = -u_1 \tag{4}$$

gefunden wird. Hiernach können die Differentialquotienten von l nach den unabhängigen Veränderlichen $l_1 \ldots l_k$ ohne weiteres aus dem Kräfteplan u entnommen werden.

Hierauf kehren wir zur Betrachtung der Gestaltänderung zurück, die der durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltene Mechanismus erfährt, wenn sich gleichzeitig φ um $\Delta\varphi$ und die Stablängen $l_1, l_2 \ldots l_k$ um beliebige kleine Beträge $\Delta l_1 \ldots \Delta l_k$ ändern. Die zugehörige Änderung der Strecke l ergibt sich mit Rücksicht auf Gl. (4) zu

$$\Delta l = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2 - u_1 \Delta l_1 - u_2 \Delta l_2 \cdots - u_k \Delta l_k \tag{5}$$

Insbesondere gilt diese Gleichung auch für den Fall, daß man unter den Δl die elastischen Längenänderungen versteht, die die Stäbe durch die Spannungen erfahren, die in dem Ausnahmefachwerk durch die daran angebrachte Belastung hervorgerufen werden. Bezeichnet man die Spannung, die hierbei der Hauptstab aufzunehmen hat, mit X, die der übrigen Stäbe mit $S_1, S_2 \ldots S_k$ und die Stabkonstanten mit $r_0, r_1, r_2 \ldots r_k$, so geht die vorige Gleichung hierfür über in

$$r_0 X = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2 - u_1 r_1 S_1 - u_2 r_2 S_2 \cdots - u_k r_k S_k \tag{6}$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Spannungen kann man sich zu einem Kräfteplan zusammengesetzt denken, in dem außer ihnen noch die gegebenen Lasten P auftreten. Aber die Stabspannungen sind, weil es sich um ein Ausnahmefachwerk handelt, jedenfalls bedeutend größer, als die Lasten P. Dies gilt um so mehr, je kleiner die Lasten sind und je kleiner hiermit auch die durch sie hervorgebrachte Gestaltänderung der Fachwerkfigur bleibt. Wenn beide klein genug sind, kann sich daher der Kräfteplan, vom Maßstabe abgesehen, nur sehr wenig von dem vorher bereits besprochenen Kräfteplan u der Eigenspannungen unterscheiden. Wirklich gleich dürfte man beide Kräftepläne freilich nur unter der Voraussetzung unendlich kleiner Lasten und hiermit einer unendlich kleinen Gestaltänderung der Fachwerkfigur setzen.

Aber die Annahme, daß es als genügend zu erachten sei, die Formänderungen als unendlich klein anzusehen und den daraus hervorgehenden Fehler mit in den Kauf zu nehmen, liegt der Lösung der Spannungsaufgabe bereits in allen anderen Fällen zu Grunde, mit denen sich die Fachwerktheorie beschäftigt. Man braucht daher auch in unserem Falle nicht zu zögern, sie sich anzueignen. Freilich ist die Ungenauigkeit, die dadurch herbeigeführt wird, hier größer als sonst, weil die Änderung $\Delta\varphi$, von der die Gestaltänderung des Ausnahmefachwerks hauptsächlich abhängt, weit größer ausfällt, als die verhältnismäßigen Längenänderungen der Fachwerkstäbe. Man kann sich aber, wenn aus diesem Grunde ein Bedenken erhoben wird, immer darauf zurückziehen, daß die Betrachtung nur für den Grenzfall unendlich kleiner Lasten und zugleich auch einer unendlich kleinen Gestaltänderung Anspruch auf genaue Gültigkeit erhebt. Da bei den praktischen Anordnungen der Theorie die zulässigen Fehlergrenzen gewöhnlich sehr weitherzig bemessen werden, so daß selbst auf einige Prozente mehr oder weniger im Schlußergebnisse nicht viel ankommt, wird man jedoch wohl in allen Fällen, die praktisch vorkommen können, unbedenklich die Formeln verwenden dürfen, die unter der Voraussetzung unendlich kleiner Lasten abgeleitet sind.

Auf Grund dieser Überlegungen genügt es, in Gl. (6)

$$S_1 = u_1 X \tag{7}$$

u. s. f. zu setzen. Hiermit geht Gl. (5) über in

$$X(r_0 + u_1^2 r_1 + \cdots + u_k^2 r_k) = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta\varphi^2$$

Hierbei ist es nach Gl. (3) zulässig, beim ersten Gliede in der Klammer noch den Faktor u_0^2 beizufügen, um es aut die gleiche Form wie die übrigen Glieder zu bringen. Die Gleichung lautet dann

$$X \Sigma u^2 r = \tfrac{1}{2} c_0 \Delta \varphi^2 \tag{8}$$

Die Summe ist über alle Stäbe des Ausnahmefachwerks zu erstrecken und leicht zahlenmäßig auszurechnen. Jedenfalls liefert sie einen positiven Wert und hieraus folgt, daß X und c_0 stets vom gleichen Vorzeichen sein müssen.

Um die gestellte Aufgabe zu lösen, müssen wir sowohl X als $\Delta \varphi$ berechnen und Gl. (8) liefert zunächst *eine* Gleichung zur Berechnung der beiden Unbekannten. Sie ging aus der Betrachtung des geometrischen Zusammenhangs der Fachwerkfigur hervor, indem für ein gegebenes $\Delta \varphi$ die geänderten Stablängen miteinander verträglich sein müssen, was eben durch Gl. (8) zum Ausdruck gebracht wird. Nun brauchen wir noch eine zweite Gleichung zwischen den beiden Unbekannten, die nur dadurch erhalten werden kann, daß man den statischen Zusammenhang zwischen dem von der Größe X abhängigen Spannungsbilde und den gegebenen Lasten P in geeigneter Weise zum Ausdruck bringt.

Zu diesem Zwecke wollen wir eine virtuelle Bewegung des durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltenen Mechanismus betrachten, bei der sich von den unabhängigen Veränderlichen nur der Winkel φ, der durch die Formänderung die Größe $\varphi_0 + \Delta \varphi$ angenommen hatte, weiterhin um einen unendlich kleinen Betrag $\delta \varphi$ ändert, während die Längen l_1 bis l_k die Größen beibehalten, die sie durch die elastische Formänderung erhalten haben. Die Länge l des Hauptstabs muß sich dagegen infolge davon auch um ein Differential $\delta \Delta l$ bei der virtuellen Verschiebung ändern und zwar finden wir aus Gl. (5)

$$\delta \Delta l = c_0 \Delta \varphi \cdot \delta \varphi \tag{9}$$

Bei der virtuellen Verschiebung, die hiermit näher bezeichnet ist, legen die Angriffspunkte der gegebenen Lasten P

gewisse Wege zurück, die für jeden gegebenen Fall ohne Schwierigkeit festgestellt werden können. Zunächst kann man den Weg δs_1, der vom Angriffspunkte der Last P_1 in der Richtung dieser Last zurückgelegt wird, in der Form

$$\delta s_1 = \frac{\partial s_1}{\partial \varphi} \delta \varphi$$

anschreiben. Da wir aber annehmen dürfen, daß der Zusammenhang zwischen dem Wege s_1 und dem Winkel φ oder $\Delta \varphi$ in jedem Falle, für den man die Spannungsaufgabe zu lösen wünscht, ohne weiteres ersichtlich sein wird, dürfen wir den in dieser Gleichung vorkommenden Differentialquotienten als eine, wenn nicht genau, so doch mindestens mit hinreichender Annäherung zahlenmäßig angebbaren Wert ansehen, den wir weiterhin s_1' bezeichnen wollen. Die vorige Gleichung lautet dann

$$\delta s_1 = s_1' \delta \varphi$$

und für die Arbeit aller äußeren Kräfte P bei der betrachteten virtuellen Verschiebung findet man

$$\delta \varphi \Sigma P s'.$$

Bei der Berechnung der Summe kommt es natürlich nur auf die relativen Verschiebungen der Knotenpunkte gegeneinander an, denn bei einer Verschiebung ohne Gestaltänderung wird die Summe der Arbeiten aller P gleich Null, da diese den Gleichgewichtsbedingungen am starren Körper auf jeden Fall genügen müssen.

Für die Arbeit der Kräfte X, die an den Endknotenpunkten des beseitigten Hauptstabs noch als weitere äußere Kräfte am Mechanismus angreifen, erhält man

$$- X \delta \Delta l$$

und mit Rücksicht auf Gl. (9) läßt sich daher nach Wegheben des gemeinschaftlichen Faktors $\delta \varphi$ die Arbeitsgleichung

$$\Sigma P s' - X c_0 \Delta \varphi = 0 \qquad (10)$$

schreiben. — Es bleibt jetzt nur noch übrig, die beiden Gleichungen (8) und (10) nach den Unbekannten X und $\Delta\varphi$ aufzulösen. Man findet

$$X = \sqrt[3]{\frac{(\Sigma P s')^2}{2 c_0 \Sigma u^2 r}} \tag{11}$$

$$\Delta\varphi = \sqrt[3]{\frac{2 \Sigma u^2 r \cdot \Sigma P s'}{c_0^2}}, \tag{12}$$

womit die Aufgabe gelöst ist, da alle auf den rechten Seiten beider Gleichungen vorkommenden Größen nach den darüber früher gemachten Bemerkungen als bereits bekannt anzusehen sind, und die übrigen Spannungen aus Gl. (7) folgen, nachdem X berechnet ist.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn die Lasten P so gegeben sind, daß für sie

$$\Sigma P s' = 0 \tag{13}$$

wird. Dann erhält man nach den vorhergehenden Gleichungen sowohl X als $\Delta\varphi$ gleich Null. Das ist indessen nicht wörtlich zu nehmen. Vielmehr muß man dieses Rechenergebnis dahin deuten, daß X keineswegs, wie bei der Ableitung der Formeln vorausgesetzt war, sehr viel größer wird, als die Lasten P sind. Die in Gl. (7) ausgesprochene Näherungsannahme verliert daher in diesem Falle ihre Gültigkeit und damit fallen auch alle Folgerungen, die daraus gezogen wurden. Nur wenn $\Sigma P s'$ von Null so viel verschieden ist, daß das mit diesem Werte nach Gl. (11) berechnete X bedeutend größer ausfällt, als jede der Lasten P, sind die Gleichungen (11) und (12) überhaupt anwendbar.

Übrigens ist der durch Gl. (13) gekennzeichnete Belastungsfall schon früher näher untersucht und die Spannungsaufgabe für ihn bereits gelöst worden. Er ist von der Art, daß der durch Herausnahme des Hauptstabs erhaltene Mechanismus unter dem Einflusse der Kräfte im Gleichgewicht bleibt, ohne daß dabei eine Spannung X mitzuwirken braucht. Andererseits kann man aber für das Ausnahmefachwerk auch unendlich viele Spannungsbilder angeben, bei denen X einen beliebigen Wert annimmt, während keine Lasten an den Knotenpunkten angreifen. Beim Bestehen von Gl. (13) sind daher unendlich viele Gleichgewichtsmöglichkeiten vorhanden, die durch Übereinanderlegung des zuerst angeführten Spannungsbildes mit einem der zuletzt erwähnten herauskommen. Die Aufgabe, die Spannungen zu bestimmen, ist statisch unbestimmt in demselben Sinne wie bei den Fachwerken mit einem überzähligen Stabe und sie kann auch mit denselben Hülfsmitteln wie bei diesen gelöst werden. In meinem früher schon erwähnten Lehrbuche der graphischen Statik kann man diese Lösung finden.

Weiterhin sehe ich von diesem Falle ab, nehme also an, daß die Gleichungen (11) und (12) wirklich als zutreffend gelten dürfen.

Dann ist ferner der Grenzfall zu erwähnen, daß alle Stabkonstanten r gleich Null zu setzen sind. Das würde heißen, daß die Stäbe als starr betrachtet werden sollen. Die Formeln liefern dann $\Delta\varphi = 0$, d. h. man erfährt daraus, was an sich selbstverständlich ist, daß bei vollkommen unveränderlichen Stablängen keine Gestaltänderung der Fachwerkfigur eintreten kann, und ferner $X = \infty$. Das ist die Lösung, mit der man sich gewöhnlich bei der Behandlung der Statik des Ausnahmefachwerks begnügt und die in der allgemeinen gültigen Lösung auch mit enthalten ist. — Sollte $c_0 = 0$ werden, so wäre $\Delta\varphi = \infty$, d. h. man hätte eine so große Gestaltänderung zu erwarten, daß die vorhergehenden Betrachtungen, die eine kleine Gestaltänderung voraussetzen, nicht mehr anwendbar blieben. Insbesondere würde dieser Fall eintreten, wenn der Stabverband einen sogenannten übergeschlossenen Mechanismus bildete; man hätte es aber dann nicht mehr mit einem Ausnahmefachwerke im gewöhnlichen Sinne dieses Wortes zu tun.

Wenn die Gleichungen (11) und (12) hiernach überhaupt zu Recht bestehen, läßt sich als wichtigste Folgerung daraus entnehmen, nach welchem Gesetze die Stabspannungen und die Gestaltänderung der Fachwerkfigur zunehmen, wenn man die Lasten P wachsen läßt und zwar so, daß alle Lasten P proportional miteinander wachsen. Man sieht, daß die Gestaltänderung mit der $\frac{1}{3}$ten und die Spannungen mit der $\frac{2}{3}$ten Potenz der Lasten wachsen. Zur 8-fachen Belastung gehört demnach eine verdoppelte Gestaltänderung und in jedem Stabe eine vierfache Spannung.

Zu demselben Schlusse war ich schon früher bei dem einfachen Beispiele gekommen, das ich, wie bereits erwähnt, in der ersten Auflage meines Lehrbuchs der graphischen Statik (und dann auch in den folgenden) behandelt hatte. Es hat sich aber jetzt herausgestellt, daß diesem Ergebnisse eine viel allgemeinere Gültigkeit zukommt. Während bei dem gewöhnlichen statisch unbestimmten Fachwerke die Spannungen und die Formänderungen proportional mit den Lasten zunehmen und auch noch bei den Ausnahmefachwerken das Gleiche gilt, wenn für die Lasten die durch Gl. (13) ausgesprochene Bedingung erfüllt ist, zeigen die Ausnahmefachwerke anderenfalls und im Gegensatze hierzu das durch die Gl. (11) und (12) ausgesprochene Verhalten.

Schließlich möchte ich noch einige Bemerkungen über die Genauigkeit machen, mit der die Gleichungen (11) und (12) voraussichtlich für einen bestimmten, praktisch vorliegenden Fall zutreffen werden. Daß man bei der Anwendung dieser Gleichungen an gewisse Beschränkungen gebunden ist, war schon erwähnt und ich möchte nur nochmals betonen, daß sie nur für Belastungen gelten, die nicht so groß sind, um Stabspannungen hervorzurufen, durch die die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Außerdem muß aber auch in Erinnerung behalten werden, daß bei der Ableitung der Gleichungen, wie bei allen Berechnungen, die zur Fachwerktheorie im engeren Sinne gehören, keine Rücksicht auf den Einfluß der Steifigkeit der Knotenpunkte genommen wurde. Wie groß die Abweichungen sind, die hierdurch gegenüber dem wirklichen Verhalten eines genieteten Stabverbandes hervorgerufen werden, muß ich vorläufig unentschieden lassen. Man könnte daran denken, eine Berechnung nach Art der Theorie der Sekundärspannungen vorzunehmen, um zu einem Urteile darüber zu gelangen. Besser wäre aber eine experimentelle Prüfung, die in einem Vergleiche von Gl. (12) mit den Ergebnissen eines Belastungsversuchs an einem geeigneten Modell bestehen könnte. Ich werde mir noch überlegen, ob ich einen Versuch dieser Art oder vielmehr eine Versuchsreihe, da ein einzelner Versuch nicht ausreichend erscheinen könnte, bei Gelegenheit selbst vornehmen oder sie wenigstens in die Wege leiten soll.

Bei dem Vergleiche der Formeln mit den Ergebnissen eines Belastungsversuchs wird man übrigens jedenfalls noch auf einen anderen Umstand zu achten haben, von dem bisher noch nicht die Rede war. Geringe unbeabsichtigte und leicht unbeachtet bleibende Abweichungen der Fachwerkgestalt von der dem Ausnahmefalle entsprechenden infolge von Ungenauigkeiten in der Ausführung, die bis zu einem gewissen Grade überhaupt unvermeidlich sind, können nämlich gerade beim Ausnahmefachwerke unter Umständen von erheblichem Einflusse auf das Verhalten des Versuchsmodells sein. Sie dürften sich darin äußern, daß die Formänderung nicht einfach proportional mit der dritten Wurzel aus der Belastung zunimmt, sondern so, als wenn den wirklich aufgebrachten Lasten schon eine Anfangsbelastung vorausgegangen wäre, durch die man sich die bereits bestehende Abweichung von der Figur des Ausnahmefalls hervorgebracht denken könnte. Um dem Rechnung zu tragen, ließe sich in Gl. (12) zu $\Sigma P s'$ ein konstantes Glied beifügen. Einstweilen scheint es aber nicht nötig, hierauf näher einzugehen.