Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die elementare Theorie der analytischen Funktionen und die komplexe Integration.

Von **Adolf Kneser** in Breslau.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 7. Februar 1920.

Weierstraß hat in seinen Vorlesungen die Theorie der analytischen Funktionen entwickelt, ohne von der Integration im komplexen Gebiet Gebrauch zu machen; indem er die Potenzreihe als Grundelement der Untersuchung nimmt, führt er die Funktionentheorie zum großen Teil in eine Art algebraischer Analysis über. Dabei gehen als Preis für die Reinheit der Methode die bedeutenden Vorteile verloren, die die komplexe Integration als Hilfsmittel der Untersuchung und des Beweises darbietet, und zwar nicht nur bei der Anwendung, sondern auch in der allgemeinen Theorie. Berechtigt und naheliegend erscheint daher die Frage, ob man die komplexe Integration irgendwie der Weierstraßischen Funktionentheorie einordnen kann, ohne deren Charakter zu zerstören. Diese Frage wird besonders dadurch nahegelegt, daß es in der Vorlesung von Weierstraß eine Stelle gibt, an der wohl jeder Mathematiker ein Ersatzmittel für die komplexe Integration erblicken wird, nämlich beim Beweis des Satzes, daß die Koeffizienten einer Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

die Ungleichung

$$|a_n| < g r^{-n}$$

erfüllen, wenn die Reihe auf der Kreislinie

$$|x| = r,$$

die dem Innern des Konvergenzgebietes angehört, die Ungleichung

$$|\mathfrak{P}(x)| < g$$

erfüllt[1]). Hier findet sich eine übrigens schon in der älteren Literatur begegnende Betrachtung über den Durchschnittswert der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ auf dem Kreise $|x| = r$, die aus der sonstigen Weierstraßischen Methode einigermaßen herausfällt. Diese Durchschnittsbildung ist von Herrn Pringsheim[2]) wesentlich vervollkommnet und bezüglich der algebraischen Hilfsmittel noch elementarer gestaltet, als sie bei Weierstraß vorliegt; mit ihrer Hilfe beweist Herr Pringsheim verschiedene Hauptsätze der allgemeinen Funktionentheorie, insbesondere den Laurentschen weit einfacher, als es bis dahin mit den Weierstraßischen Hilfsmitteln gelungen war.

Denselben Zielen kann man aber auch nachstreben, indem man davon ausgeht, daß die komplexe Integration in gewissem Sinne der elementaren d. h. Weierstraßischen Funktionentheorie überhaupt nicht fremd ist. Die Differentiation und Integration werden algebraisch eingeführt, und zwar beim Beweis der Taylorschen Formel

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}(a) + (x - a)\,\mathfrak{P}'(a) + \cdots,$$

indem einfach als Definition der Ableitung die Gleichung

$$\mathfrak{P}'(x) = a_1 + 2\,a_2\,x^2 + \cdots$$

angesetzt wird, woraus sich die Definition des Integrals der Reihe $\mathfrak{P}(x)$ durch die Gleichung

$$\mathfrak{Q}(x) = c + a_0\,x + \frac{a_1\,x^2}{2} + \cdots$$

mit konstantem c von selbst ergibt. Ist nun $\overline{\mathfrak{P}}(x - a)$ irgend eine analytische Fortsetzung des Funktionselements $\mathfrak{P}(x)$ und $\overline{\mathfrak{Q}}(x - a)$ das Integral von $\overline{\mathfrak{P}}(x - a)$, so ist bei passender Wahl der Integrationskonstanten $\overline{\mathfrak{Q}}(x - a)$ die Fortsetzung

1) Weierstraß Werke, Bd. 2, S. 224.

2) Über Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Funktionen. Math. Annalen, Bd. 47, S. 121 (1895).

des Elements $\mathfrak{Q}(x)$. Die Integration auf einem gewissen Wege ist also vollständig bestimmt, wenn es feststeht, was es heißt und daß es möglich ist, ein Funktionselement auf eben diesem Wege analytisch fortzusetzen. Integration und Fortsetzung erfolgen im Grunde nicht längs einer Linie, sondern längs eines Streifens, längs dessen man eine endliche Anzahl von Übergängen vornimmt wie von den Reihen $\mathfrak{P}(x)$ und $\mathfrak{Q}(x)$ zu den Reihen $\mathfrak{P}(x-a)$ und $\mathfrak{Q}(x-a)$. Der Satz, daß das Integral einer analytischen Funktion über den Umfang eines einfach zusammenhängenden Gebiets, auf dem die Funktion regulär ist, verschwindet, kann mit denselben Worten bewiesen werden wie der folgende grundlegende Satz der Weierstraßischen Funktionentheorie: Kann man ein Funktionselement auf jedem innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebiets verlaufenden Wege analytisch fortsetzen, so ist die Funktion, die das Element definiert, in dem Gebiet eindeutig. Dieser Satz ist von Herrn Pringsheim[1]) elementar bewiesen worden.

Durch diese naheliegenden Erwägungen wird zwar die Integration im komplexen Gebiet der Weierstraßischen Theorie bis zu einem gewissen Grade eingeordnet; doch fehlen im Kreise der elementar formulierten und bewiesenen Sätze noch zwei Eigenschaften des komplexen Integrals, auf denen seine wichtigsten Anwendungen in der allgemeinen Funktionentheorie wie in der Integralrechnung beruhen: erstens die Abschätzung des Integrals aus der Länge der Integrationslinie und einer oberen Schranke des absoluten Betrages des Integranden; zweitens der Residuensatz, nach welchem das über eine geschlossene Linie erstreckte Integral einer stellenweise außerwesentlich singulären Funktion durch die Residuensumme ausgedrückt wird. Diese beiden Kernsätze der Cauchyschen Funktionentheorie wollen wir beweisen, indem wir nur Begriffe und Hilfsmittel anwenden, die im Sinne der von Herrn Pringsheim auf-

[1]) Über eine charakteristische Eigenschaft sogenannter Treppenpolygone und deren Anwendung auf einen Fundamentalsatz der Funktionentheorie. Münchener Sitzungsber. 1915, S. 27.

gestellten Forderungen elementar sind; insbesondere wird von algebraischen Hilfsmitteln nur die Quadratwurzel benutzt. Auf diese Weise wird die Weierstraßische Funktionentheorie in dem Sinne ergänzt, daß ihr die wichtigsten Anwendungen des komplexen Integrals eingegliedert werden können, ohne den elementaren Charakter zu verwischen. Man mag den Wert solcher methodischer Ergebnisse hoch oder niedrig anschlagen; jedenfalls liegen sie in der Richtung der von Weierstraß einmal[1]) ausgesprochenen Forderung, „daß die Funktionentheorie auf dem Fundament algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muß".

§ I. Elementare Grenzprozesse.

Seien a und b irgend zwei komplexe Größen und sei bei reellen Werten von p, q, r

$$|b| \geqq |a| > 0, \quad \frac{b}{a} = c = r(p + qi), \quad r > 0, \quad p^2 + q^2 = 1.$$

Sei ferner $\varepsilon = +1$, wenn $q \geqq 0$; sonst sei $\varepsilon = -1$; jede Quadratwurzel werde positiv verstanden. Wir definieren dann zwei Größenreihen durch folgende Gleichungen:

$$p_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{1+p}{2}}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{1-p}{2}},$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{1-p_1}{2}};$$

weiter sei m eine ganze Zahl und $m > 1$; wir definieren dann allgemein

$$p_{m+1} = \sqrt{\frac{1+p_m}{2}}, \quad q_{m+1} = \sqrt{\frac{1-p_m}{2}}.$$

Ist nun zunächst c eine reelle positive Größe, so ist allgemein

$$p = 1, \quad q = 0, \quad p_1 = p_m = 1, \quad q_1 = q_m = 0.$$

---

[1]) Werke, Bd. 2, S. 235. Brief an Herrn Schwarz aus dem Jahre 1875.

Von diesem Falle abgesehen gelten folgende unmittelbar ersichtliche Beziehungen:

$$0 \leqq p_1^2 < 1, \quad 0 < q_1 \leqq 1, \quad 0 < p_m < 1, \quad 0 < q_m < 1,$$
$$2 p_1 q_1 = \varepsilon |q| = q, \quad p_1^2 - q_1^2 = p, \quad (p_1 + q_1 i)^2 = p + q i,$$
(1) $$2 p_{m+1} q_{m+1} = q_m, \quad 2 q_{m+1} > q_m,$$
$$(p_{m+1} + i q_{m+1})^2 = p_m + i q_m, \quad (p_m + i q_m)^{2^m} = p + q i.$$

Setzen wir ferner

$$p_m' = \frac{q_m}{p_m},$$

so ist immer

(2) $$p_m' > q_m$$

und gelten die Beziehungen

$$2 p_{m+1}' = \frac{2 q_{m+1}}{p_{m+1}} = \frac{q_m}{p_{m+1}^2} = p_m' \cdot \frac{p_m}{p_{m+1}^2} = p_m' \cdot \frac{2 p_m}{1 + p_m},$$

(3) $$2 p_{m+1}' < p_m'.$$

Die drei Ungleichungen (1), (2), (3) ergeben nun, wenn s eine positive ganze Zahl ist,

$$p_m' > 2^s p_{m+s}' > 2^s q_{m+s} > q_m,$$
$$2^s q_{m+s} < 2^{s+1} q_{m+s+1}, \quad 2^s p_{m+s}' > 2^{s+1} p_{m+s+1}';$$

von den Größenreihen $2^m q_m$ und $2^m p_m'$ nimmt also bei wachsenden Werten von m die erste beständig zu, die zweite beständig ab; die Glieder beider Reihen bleiben dabei zwischen positiven Schranken. Es existieren also die positiven Grenzwerte

$$\lim_{m=\infty} 2^m q_m = A, \quad \lim_{m=\infty} 2^m p_m' = A';$$

daraus folgt weiter

(4) $$\lim_{m=\infty} q_m = 0, \quad \lim_{m=\infty} p_m = 1, \quad \lim_{m=\infty} \frac{p_m'}{q_m} = 1,$$

und die letzte dieser Gleichungen ergibt, da A und A' positiv sind,

$$A = A'.$$

Wir bezeichnen diesen Grenzwert auch durch $A(p, q)$; da die Größen $2^m q_m$ mit m wachsen, gilt noch die Beziehung

$$2^m q_m < A(p, q). \tag{5}$$

Setzen wir jetzt

$$n = 2^m,$$

so ist $\sqrt[n]{r}$ durch m-fach wiederholte Quadratwurzelziehung zu gewinnen; nehmen wir, wie festgesetzt, jede Quadratwurzel positiv, so ist auch $\sqrt[n]{r}$ positiv. Da ferner nach unseren Voraussetzungen

$$r = 1 + \varrho, \quad \varrho > 0$$

und allgemein die Beziehungen

$$\left(1 + \frac{\varrho}{2}\right)^2 > 1 + \varrho, \quad \sqrt{1 + \varrho} < 1 + \frac{\varrho}{2}$$

gelten, so ergibt sich durch wiederholte Quadratwurzelziehung

$$\sqrt[n]{r} < 1 + \frac{\varrho}{n},$$

also

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{r} = 1.$$

Dieses Ergebnis führt in Verbindung mit den Gleichungen (4), wenn man

$$\gamma = \sqrt[n]{r}\,(p_m + i\,q_m) = \sqrt[n]{c}$$

setzt, zu der Folgerung

$$\lim_{n=\infty} \gamma = 1 \tag{6}$$

sowie zu der Einsicht, daß auch in dem Sonderfalle $p = 1$, $q = 0$, $c = r$ dieselbe Gleichung gilt.

Wir benutzen die erhaltenen Ergebnisse, um die Grenzwerte einiger Summen zu bestimmen, die mit den Größen

$$x_\nu = x_0\gamma^\nu, \quad x_0 = a, \quad x_n = b \tag{7}$$

gebildet sind; wir beschränken uns dabei auf die Sonderfälle $p = 1$ und $r = 1$, d. h. die Fälle, daß das Verhältnis $b : a$ reell und positiv oder dem absoluten Betrage nach $= 1$ sei.

Sei erstens $p = 1$, also $\gamma = \sqrt[n]{r}$ und größer als Eins; wir bilden die Summe

$$(8)\qquad \begin{aligned}\sum_{\nu}^{0,\,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| &= |a| \sum_{\nu}^{0,\,n-1} \gamma^\nu (\gamma - 1) = |a| (\gamma^n - 1) \\ &= |b| - |a| = |b - a|.\end{aligned}$$

Sei zweitens $r = 1$, $|\gamma| = 1$ und γ von Eins verschieden; dann finden wir:

$$\sum_{\nu}^{0,\,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| = |a| \sum_{\nu}^{0,\,n-1} |\gamma^\nu| \, |\gamma - 1| = n\, |a| \, |\gamma - 1|.$$

Nun ist

$$n(\gamma - 1) = 2^m (p_m - 1) + 2^m q_m i;$$

dabei ist nach unsern Definitionen

$$q_m^2 = 1 - p_m^2 > 1 - p_m,$$

$$2^m (1 - p_m) < \frac{(2^m q_m)^2}{2^m}, \quad \lim_{m=\infty} 2^m q_m = A(p, q);$$

also folgt

$$\lim_{m=\infty} 2^m (1 - p_m) = 0,$$

und weiter

$$(9)\qquad \lim_{m=\infty} n(\gamma - 1) = i\, A(p, q),$$

also endlich, da A eine positive Größe ist,

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,\,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| = |a|\, A(p, q);$$

die Ungleichung (5) gibt noch

$$(10)\qquad \sum_{\nu}^{0,\,n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| < |a|\, A(p, q).$$

Für eben diesen Fall $r = 1$, $p < 1$ läßt sich auch der Grenzwert der Summe

$$\sum_{\nu}^{0,\,n-1} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{x_\nu} = \sum_{\nu}^{0,\,n-1} \frac{\gamma^{\nu+1} - \gamma^\nu}{\gamma^\nu} = n(\gamma - 1)$$

sofort angeben; die Gleichung (9) gibt

$$(11)\qquad \lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,n-1} \frac{x_{\nu+1}-x_\nu}{x_\nu} = i\,A(p,q).$$

Endlich bilden wir noch, unter k eine positive ganze Zahl verstehend, den Grenzwert der Summe

$$\sum_{\nu}^{0,n-1} (x_{\nu+1}-x_\nu)\,x_\nu^k$$

und zwar bei beliebigen Werten des Quotienten $b:a$, d. h. gleichviel, welchen von Null verschiedenen Wert die Größe γ hat; wir finden aus den Gleichungen (7)

$$\sum_{\nu}^{0,n-1}(x_{\nu+1}-x_\nu)\,x_\nu^k = a^{k+1}(\gamma-1)\sum_{\nu}^{0,n-1}\gamma^{\nu k+\nu} = a^{k+1}(\gamma-1)\cdot\frac{\gamma^{n(k+1)}-1}{\gamma^{k+1}-1}$$

$$= \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{1+\gamma+\gamma^2+\cdots+\gamma^k}.$$

Nun gilt die Gleichung (6) allgemein; also folgt

$$(12)\qquad \lim_{m=\infty}\sum_{\nu}^{0,n-1}(x_{\nu+1}-x_\nu)\,x^k = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{k+1}.$$

Diese Rechnung wird von Dirichlet benutzt, um das bestimmte Integral einer Potenz aus dem Begriff des Integrals als Grenzwertes einer Summe herzuleiten, ohne Rückgang auf das unbestimmte Integral[1]).

§ 2. Abschätzung der Integrale von Polynomen und Potenzreihen.

Die Gleichung (12) ergibt unmittelbar, wenn

$$P(x) = \sum_{\nu}^{0,s} a_\nu\,x^\nu$$

ein beliebiges Polynom, c eine Konstante ist und

$$Q(x) = c + \sum_{\nu}^{0,s}\frac{a_\nu\,x^{\nu+1}}{\nu+1}$$

gesetzt wird,

$$(13)\qquad Q(b)-Q(a) = \lim_{m=\infty}\sum_{\nu}^{0,n-1}(x_{\nu+1}-x_\nu)\,P(x_\nu).$$

[1]) Vorlesungen über bestimmte Integrale, herausgegeben von Arendt, S. 19 (Braunschweig 1904).

Diese Formel gilt ebenso allgemein wie die Gleichung (12) und gibt den Zusammenhang zwischen unbestimmter und bestimmter Integration eines Polynoms, wobei von a bis b längs einer logarithmischen Spirale integriert wird, die aber auch in eine Gerade oder einen Kreis ausarten kann.

Nehmen wir an, das Verhältnis $b:a$ sei reell und positiv, so ist auch γ reell, und die Punkte x_ν liegen in der Ebene der komplexen Zahlen auf der geraden Strecke, die a und b verbindet. Alsdann gilt die Gleichung (8), und wenn auf der bezeichneten Strecke die Ungleichung

$$(14) \qquad |P(x)| < g$$

besteht, so folgt

$$(15) \qquad |Q(b) - Q(a)| < |b - a|\, g.$$

Die Voraussetzung, die bisher gilt, daß die Punkte 0, a, b in dieser Folge auf einer Geraden liegen, kann aber fallen gelassen werden. Denn setzen wir mit einer beliebigen Konstanten ξ etwa

$$x = \xi + \bar{x},\ P(x) = \bar{P}(\bar{x}),\ Q(x) = \bar{Q}(\bar{x}),\ b = \xi + \bar{b},\ a = \xi + \bar{a},$$

so ist $\bar{P}(\bar{x})$ ein ebenso allgemeines Polynom wie $P(x)$; in der $\bar{x}$-Ebene gilt die Ungleichung

$$|\bar{P}(\bar{x})| < g$$

auf der geraden Strecke, die die Punkte $\bar{a}$ und $\bar{b}$ verbindet, die aber nicht mehr durch den Punkt $\bar{x} = 0$ zu gehen braucht, und da offenbar

$$\bar{b} - \bar{a} = b - a$$

ist, so folgt aus der Ungleichung (15)

$$|\bar{Q}(\bar{b}) - \bar{Q}(\bar{a})| < |\bar{b} - \bar{a}|\, g.$$

Damit ist die Ungleichung (15) in dem bezeichneten allgemeineren Sinne bewiesen; sie gilt bei beliebiger Lage der Stellen a und b, wenn auf der Verbindungsstrecke derselben die Voraussetzung (14) gilt, und die Form des Ergebnisses zeigt, daß es gleichgültig ist, welche der Größen $|a|$ und $|b|$ die größere ist oder ob beide gleich sind.

Jetzt sei $P(x)$ bei verschiedenen Werten der Gradzahl s ein Abschnitt der Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu}^{0,\infty} a_\nu x^\nu = P(x) + R(x);$$

sei ferner

$$\mathfrak{Q}(x) = c + \sum_{\nu}^{0,\infty} \frac{a_\nu x^{\nu+1}}{\nu+1} = Q(x) + S(x);$$

die Reihen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ seien regulär und also gleichmäßig konvergent auf dem Gebiete

(16) $$|x| \leqq r,$$

dem auch die Werte a und b angehören mögen; auf der geraden Strecke, die a und b verbindet, sei

$$|\mathfrak{P}(x)| < G.$$

Ist dann ε eine beliebig klein gewählte positive Größe, so kann man s so groß wählen, daß bei der Annahme (16) immer

(17) $$|R(x)| < \varepsilon, \quad |S(x)| < \varepsilon,$$

mithin auf der geraden Strecke, die a und b verbindet,

$$|P(x)| < G + \varepsilon.$$

Dann lehrt die Ungleichung (15)

$$|Q(b) - Q(a)| < |b - a| (G + \varepsilon)$$

oder

$$|\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a) - (S(b) - S(a))| < |b - a| (G + \varepsilon);$$

da nun die zweite Ungleichung (17) ergibt

$$|S(b) - S(a)| < 2\varepsilon,$$

so folgt

$$|\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a)| - 2\varepsilon < |b - a| (G + \varepsilon),$$

und da in dieser Ungleichung die von dem Buchstaben ε freien Glieder auch von ε unabhängige Größen bedeuten, so folgt

(18) $$|\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a)| \leqq G |b - a|.$$

Jetzt sei $f(x)$ eine analytische Funktion und werde durch die Stellen $c_0, c_1, \ldots, c_k$ hin fortgesetzt; d. h. sie werde in der Umgebung der Stelle c_ν durch eine Potenzreihe $\mathfrak{P}_\nu(x - c_\nu)$ dargestellt, deren Konvergenzbereich die Stelle $c_{\nu+1}$ in seinem Innern enthält. Stehen ferner die Reihen $\mathfrak{Q}_\nu$ zu $\mathfrak{P}_\nu$ in derselben Beziehung wie bisher schon $\mathfrak{Q}$ zu $\mathfrak{P}$, so daß die Konvergenzbereiche der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ und $\mathfrak{Q}_\nu$ übereinstimmen, und werden die konstanten Glieder der Reihen $\mathfrak{Q}_\nu$ immer so bestimmt, daß

$$\mathfrak{Q}_{\nu+1}(0) = \mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1} - c_\nu), \tag{19}$$

so sind auch die Reihen $\mathfrak{Q}_\nu(x - c_\nu)$ analytische Fortsetzungen voneinander und Elemente einer analytischen Funktion $F(x)$. Die Größe

$$F(c_k) - F(c_0) = \mathfrak{Q}_k(0) - \mathfrak{Q}_0(0)$$

ist das im Weierstraßischen Sinne definierte Integral der Funktion $f(x)$, von c_0 bis c_k gebildet längs irgend einer Linie $\mathfrak{L}$, die die Punkte c_ν enthält und ganz im Innern des Gebiets liegt, das von den Konvergenzbereichen der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ bedeckt wird, und der Gleichung (19) zufolge kann man schreiben

$$F(c_k) - F(c_0) = \int_{c_0}^{c_k} f(x)\,dx = \mathfrak{Q}_k(0) - \mathfrak{Q}_0(0)$$

$$= \sum_{\nu}^{0,\,k-1} \{\mathfrak{Q}_{\nu+1}(0) - \mathfrak{Q}_\nu(0)\} = \sum_{\nu}^{0,\,k-1} \{\mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1} - c_\nu) - \mathfrak{Q}_\nu(0)\}.$$

Auf die Glieder des letzten Ausdrucks wenden wir die Ungleichung (18) an, indem wir voraussetzen, daß auf der polygonalen Linie, die die Stellen c_ν in der Reihenfolge ihrer Zeiger verbindet, die Ungleichung

$$|f(x)| < G$$

gelte; das ist sicher, wenn wir weiter annehmen, diese Ungleichung gelte in einem die polygonale Linie umfassenden Gebiet $\mathfrak{G}$, in welchem $f(x)$ auch regulär sei. Dann finden wir der Beziehung (18) zufolge

$$|\mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1}-c_\nu)-\mathfrak{Q}_\nu(0)|\leqq|c_{\nu+1}-c_\nu|\,G,$$

$$|F(c_k)-F(c_0)|\leqq\sum_\nu^{0,k-1}|\mathfrak{Q}_\nu(c_{\nu+1}-c_\nu)-\mathfrak{Q}_\nu(0)|,$$

$$|F(c_k)-F(c_0)|\leqq G\sum_\nu^{0,k-1}|c_{\nu+1}-c_\nu|.$$

Hat die Integrationslinie $\mathfrak{L}$ eine Länge l, und liegt sie im Gebiet $\mathfrak{G}$, so ist jedenfalls

$$\sum_\nu^{0,k-1}|c_{\nu+1}-c_\nu|<l,$$

und das erhaltene Ergebnis kann in die gewöhnliche Form

$$\left|\int_{c_0}^{c_k} f(x)\,dx\right|<Gl$$

gebracht werden. Hiermit ist unser erstes Ziel erreicht.

§ 3. Der Residuensatz.

Der zweite auf Integration im komplexen Gebiete bezügliche Satz, den wir im Rahmen der elementaren Funktionentheorie beweisen wollen, sagt aus, daß man um eine außerwesentlich singuläre Stelle einer analytischen Funktion in hinreichender Nähe der Stelle herum integrierend als Wert des Integrals das mit $2\pi i$ multiplizierte Residuum der Stelle erhält. Sei etwa $x=0$ die singuläre Stelle, und zwar ein Pol von der Ordnung h, in dessen Umgebung die betrachtete Funktion in der Form

$$f(x)=\sum_\nu^{-h,+\infty}a_\nu x^\nu$$

darstellbar sei. Wir beschränken die Untersuchung auf das Innere des Konvergenzbereichs dieser Reihe. Dann hat die Funktion

$$\varphi(x)=f(x)-\frac{a_{-1}}{x}$$

ein in der Umgebung der Stelle $x = 0$ eindeutiges Integral; d. h. setzt man

$$\Phi(x) = \sum_{\nu}^{-h,\,-2} \frac{a_\nu\, x^{\nu+1}}{\nu + 1} + \sum_{\nu}^{0,\,\infty} \frac{a_\nu\, x^{\nu+1}}{\nu + 1},$$

so ist offenbar

$$\Phi'(x) = \varphi(x),$$

und wenn man um die Stelle $x = 0$ herum integriert, hat man

$$\int \varphi(x)\, dx = 0$$

zu setzen, eine Gleichung, die nach der oben gegebenen Definition des Integrals auch in der elementaren Funktionentheorie ihren wohlbestimmten Sinn hat. In demselben Sinne findet man also

$$\int f(x)\, dx = \int \varphi(x)\, dx + a_{-1} \int \frac{dx}{x} = a_{-1} \int \frac{dx}{x},$$

und das letzte Integral ist auszurechnen. Will man seinen Wert nicht aus der Theorie der Exponentialfunktion ableiten, so kann man folgendermaßen verfahren.

Wir wenden die Gleichung (13) des § 2,

$$(20) \qquad Q(b) - Q(a) = \lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,\,n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\, P(x_\nu),$$

in der $P(x)$ ein Polynom und Q sein unbestimmtes Integral ist, jetzt auf den Fall $r = 1$ an, so daß die Gleichungen

$$x_\nu = a\gamma^\nu, \quad \gamma = p_m + i q_m, \quad |b| = |a|, \quad b = a(p + qi) = x_n$$

gelten. Dabei sei $P(x)$ ein Abschnitt der Potenzreihe, die die Funktion $1 : x$ in der Umgebung der Stelle $x = a$ darstellt, also

$$P(x) = \frac{1}{a} - \frac{x - a}{a^2} + \frac{(x - a)^2}{a^3} - \cdots \pm \frac{(x - a)^s}{a^{s+1}},$$

und es sei speziell

$$b = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}\, a, \quad p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

gesetzt, so daß die Stellen a und b auf dem Kreise $|x| = |a|$

einen Winkelabstand von 45° haben und ihr gerader Abstand kleiner als $|a|$ ist. Man kann nun s so groß wählen, daß im Innern eines Kreises $\mathfrak{K}$ mit dem Mittelpunkte a, der den Punkt $x = 0$ ausschließt, den Punkt $x = b$ aber einschließt, die Ungleichung

$$\left| \frac{1}{x} - P(x) \right| < \varepsilon \tag{21}$$

gilt, wobei ε eine beliebig klein gewählte positive Größe ist. Das Polynom $Q(x)$ ist dann ein entsprechender Abschnitt der Reihe

$$\mathfrak{Q}(x) = \frac{x-a}{a} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-a}{a}\right)^3 - \cdots,$$

die die Gleichung

$$\mathfrak{Q}'(x) = \frac{1}{x}$$

erfüllt; bei passender Wahl von s gilt auch die Ungleichung

$$|\mathfrak{Q}(x) - Q(x)| < \varepsilon \tag{22}$$

für das Innere des bezeichneten Kreises $\mathfrak{K}$. Die Gleichung (20) ergibt nun

$$\mathfrak{Q}(b) - \mathfrak{Q}(a) - (\mathfrak{Q}(b) - Q(b)) - (\mathfrak{Q}(a) - Q(a))$$
$$= \lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,\, n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\left(\frac{1}{x_\nu} + \left(P(x_\nu) - \frac{1}{x_\nu}\right)\right),$$

und die Stellen x_ν liegen alle im Innern des Kreises $\mathfrak{K}$; also folgt den Ungleichungen (21) und (22) und der in § 1 erhaltenen Beziehung (10) zufolge

$$|\mathfrak{Q}(b) - Q(b)| < \varepsilon, \quad |\mathfrak{Q}(a) - Q(a)| < \varepsilon,$$

$$\left| \sum_{\nu}^{0,\, n-1} (x_{\nu+1} - x_\nu)\left(P(x_\nu) - \frac{1}{x_\nu}\right) \right| < \varepsilon \sum_{\nu}^{0,\, n-1} |x_{\nu+1} - x_\nu| < \varepsilon A(p, q).$$

Der Gleichung (11) des § 1 zufolge ist nun

$$\lim_{m=\infty} \sum_{\nu}^{0,\, n-1} \frac{x_{\nu+1} - x_\nu}{x_\nu} = i A(p, q) = i A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

die Gleichung

$$\mathfrak{L}(b) - \mathfrak{L}(a) = i\,A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{23}$$

gilt also bis auf drei Glieder, die mit ε beliebig der Null genähert werden können. Die beiden Seiten dieser Gleichung sind aber von ε unabhängig; also gilt dieselbe genau.

Jetzt setzen wir

$$a = a_0, \quad b = a_1, \quad a_{\nu+1} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\,a_\nu,$$

$$\mathfrak{L}_\nu(x - a_\nu) = c_\nu + \frac{x - a_\nu}{a_\nu} - \frac{1}{2}\left(\frac{x - a_\nu}{a_\nu}\right)^2 + \cdots,$$

$$\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}_0(x - a_0),$$

dann wird $a_8 = a$, und da $a_{\nu+1}$ ebenso aus a_ν hervorgeht wie b aus a, so ergibt die Gleichung (23)

$$\mathfrak{L}_\nu(a_{\nu+1} - a_\nu) - \mathfrak{L}_\nu(0) = i\,A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right). \tag{24}$$

Die Reihe $\mathfrak{L}_{\nu+1}(x - a_{\nu+1})$ ist dann die analytische Fortsetzung von $\mathfrak{L}_\nu(x - a_\nu)$, wenn

$$\mathfrak{L}_\nu(a_{\nu+1} - a_\nu) = \mathfrak{L}_{\nu+1}(0) = c_{\nu+1}$$

gesetzt wird, da offenbar immer

$$\mathfrak{L}'_\nu(x - a_\nu) = \frac{1}{x};$$

addiert man die Gleichungen (24), in denen $\nu = 0, 1, \ldots, 7$ gesetzt wird, so folgt

$$\mathfrak{L}_7(a_8 - a_7) - \mathfrak{L}_0(0) = \mathfrak{L}_7(a - a_7) - \mathfrak{L}(a) = 8\,i\,A(p, q),$$

und diese Größe ist offenbar das über den Kreis $|x| = |a|$ im positiven Umlaufssinne erstreckte Integral

$$\int \frac{dx}{x}$$

in der Sprache der elementaren Funktionentheorie, dessen Wert hiermit feststeht; es ist $2\pi i$, wenn wir

$$A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

setzen.

Daß der Buchstabe π hier dieselbe Bedeutung hat wie in der Elementargeometrie, geht aus folgender Betrachtung hervor. Ist α die Hälfte eines rechten Winkels, den wir als Zentriwinkel in einen Kreis vom Radius 1 legen, so ist

$$p = q = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\alpha = \cos\alpha;$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{1+p}{2}} = \cos\frac{\alpha}{2}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{1-p}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2};$$

die Größe $2q_1$ ist also die Summe der Sehnen der beiden Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2}$, in die α zerfällt; ebenso $2^2 q_2$ die Summe der Sehnen der vier Zentriwinkel $\frac{\alpha}{2^2}$, in die α zerfällt usf. Der Grenzwert dieser Größen, d. h. $A(p, q)$ ist also ein Achtel des Kreisumfangs vom Radius 1 oder $\frac{\pi}{4}$ in der gewöhnlichen Bezeichnung. Ebenso ist, beiläufig bemerkt, $A(p, q)$ das Winkelargument der komplexen Größe $p + qi$ gemessen als Bogenlänge im Kreis vom Radius 1 und auf der Strecke von 0 bis 2π mit Ausschluß des letzteren Wertes.

Nachdem somit der Residuensatz elementar bewiesen ist, kommt man leicht zu den Sätzen, die bisher in der Weierstraßischen Funktionentheorie Weitläufigkeiten verursachten.

Sei insbesondere

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu}^{0,\infty} a_\nu x^\nu$$

eine Potenzreihe, die auf der Kreislinie

$$|x| = r$$

regulär ist und die Ungleichung

$$|\mathfrak{P}(x)| < g \tag{25}$$

erfüllt; diese Ungleichung gilt dann auch in einem die Kreislinie einschließenden, mit ihr konzentrischen und hinreichend schmalen Kreisringe, den wir mit dem am Schlusse des § 2 eingeführten Gebiete $\mathfrak{G}$ identifizieren können. Jetzt hat man zunächst die Gleichung

$$\int \frac{\mathfrak{P}(x)}{x^{n+1}} dx = 2\pi i a_n,$$

wobei links über die Kreislinie $|x| = r$ im positiven Sinne herum integriert werde. Auf der Integrationslinie ist offenbar nach (25)

$$\left| \frac{\mathfrak{P}(x)}{x^{n+1}} \right| < g r^{-n-1};$$

die Länge derselben ist $2\pi r$; der Abschätzungssatz des § 2 ergibt also

$$2\pi |a_n| < 2\pi r \cdot g r^{-n-1}, \quad |a_n| < g r^{-n},$$

d. h. die Formel, die beim Beweis des Weierstraßischen Doppelreihensatzes notwendig gebraucht wird. Weiter ist man jetzt in der Lage, den Laurentschen Satz ungefähr ebenso zu beweisen wie es in der Cauchyschen Funktionentheorie geschieht, aber ohne aus dem Bereich der elementaren Begriffe und Beweismittel herauszutreten.