Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1920. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1920
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über Potentialtheorie und konforme Abbildung.

Von Georg Faber.

Vorgelegt von A. Pringsheim in der Sitzung am 7. Februar 1920.

Die folgenden Ausführungen gelten einem Kreis von Fragen und Aufgaben, der in den letzten Jahren vielfach und von verschiedenen Seiten erforscht wurde. Doch genügt es zur Herstellung des Zusammenhangs, wenn ich hier auf die unten angeführten Abhandlungen hinweise[1]).

§ I. Die Robinsche Belegung und die Näherungslemniskaten einer geschlossenen Kurve.

Die Punkte einer Ebene bezeichne ich in der bekannten Weise mit $x = \xi + i\eta$ und insbesondere die einer geschlossenen Kurve Γ mit $\bar{x} = \bar{\xi} + i\bar{\eta}$. Γ soll sich selbst nicht überkreuzen, darf aber ganz oder zum Teil auf ein (doppelt zu zählendes) Bogen- oder Geradenstück zusammenschrumpfen.

Es gibt bekanntlich auf Γ eine Belegungsfunktion $\mu(\bar{x})$, die folgende Eigenschaften besitzt: Das logarithmische Potential

$$1)\qquad u(\xi, \eta) = \int\limits_{+\Gamma} \mu(\bar{x})\, ln\, |x - \bar{x}|\, |d\bar{x}|$$

[1]) L. Bieberbach, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Berliner Sitzungsberichte, Bd. 38 (1916), S. 940—955. — G. Pick, Über den Koebeschen Verzerrungssatz. Leipziger Berichte, Bd. 68 (1916), S. 58 bis 64. — K. Löwner, Extremumsätze bei der konformen Abbildung. Math. Zeitschrift, Bd. 3 (1919), S. 65—77.

ist konstant auf Γ, etwa $= ln\,\varrho$, wo $\varrho > 0$; ferner gilt

$$\int_{+\Gamma} \mu(\bar{x})\,|d\bar{x}| = 1 \tag{2}$$

und

$$\mu(\bar{x}) \geqq 0. \tag{3}$$

$\mu(\bar{x})$ findet man bekanntlich mittels des Robinschen Verfahrens[1]); ϱ möge die Robinsche Konstante der Kurve Γ heißen, nötigenfalls schreiben wir statt ϱ deutlicher $\varrho(\Gamma)$.

Für alle x irgend eines Gebietes außerhalb Γ kann man das Integral (1) näherungsweise durch eine Summe

$$\begin{aligned} u_k(\xi,\eta) = \mu_1\,ln\,|x - \bar{x}_1| + \mu_2\,ln\,|x - \bar{x}_2| \\ + \cdots + \mu_k\,ln\,|x - \bar{x}_k| \end{aligned} \tag{4}$$

darstellen, wobei die μ_i noch die Gleichung

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k = 1 \tag{5}$$

befriedigen mögen (vgl. (2)). Außerdem dürfen wir uns die μ_i als rationale Zahlen mit dem gemeinsamen Nenner n vorstellen:

$$\mu_i = \frac{\nu_i}{n}. \tag{6}$$

Die Tatsache, daß gleichmäßig für alle x irgend eines außerhalb Γ gelegenen Gebietes

$$\lim_{k\to\infty} u_k(\xi,\eta) = u(\xi,\eta) \tag{7}$$

ist, läßt sich nun auch so ausdrücken: Die „Lemniskaten"

$$|x - \bar{x}_1|^{\nu_1} \cdot |x - \bar{x}_2|^{\nu_2} \cdots |x - \bar{x}_k|^{\nu_k} = (\varrho + \varepsilon)^n \tag{8}$$

unterscheiden sich, wenn k hinreichend groß und $\varepsilon > 0$ genügend klein ist, beliebig wenig von der Kurve Γ.

Durch die Gleichung

$$z = \lim_{k\to\infty} \left[(x - \bar{x}_1)^{\nu_1} \cdot (x - \bar{x}_2)^{\nu_2} \cdots (x - \bar{x}_k)^{\nu_k}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{9}$$

---

[1]) S. z. B. Enzykl. d. math. Wiss. II 3, S. 233.

mit der die n^{te} Wurzel eindeutig machenden Nebenbedingung

$$10)\qquad \lim_{x \to \infty} \frac{z}{x} = 1$$

wird das Äußere Γ_a der Kurve Γ auf das Äußere des Kreises $|z| = \varrho$ konform abgebildet. In der Umgebung der Stelle $x = \infty$ kann man für (9) auch schreiben:

$$11)\qquad z = x + c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots,$$

während die Umkehrung von (9) durch die für alle $|z| > \varrho$ konvergierende Potenzreihe

$$12)\qquad x = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

geleistet wird.

Der Punkt $x = -c_0 = a_0$ ist offenbar der Schwerpunkt der Robinschen Belegung, während die übrigen Koeffizienten von den höheren Momenten dieser Belegung abhängen; für die Koeffizienten der Entwickelung

$$13)\qquad \frac{d \ln z}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \cdots$$

ergeben sich aus (9) die Formeln:

$$14)\qquad b_2 = \int\limits_{+\Gamma} x\,\mu(x)\,|dx|, \quad b_3 = \int\limits_{+\Gamma} x^2\,\mu(x)\,|dx| \quad \text{usw.}$$

§ 2. Zusammenhang mit dem Cauchyschen Integralsatz.

Es verlohnt sich, den Zusammenhang zwischen Potentialtheorie und Funktionentheorie noch von einer anderen Seite her zu beleuchten. Wir gehen daher von der Formel (9) aus, die wir kurz so schreiben:

$$15)\qquad z = \varphi(x).$$

Durch diese Funktion wird also das Außengebiet Γ_a auf das Äußere des Kreises $|z| = \varrho$ abgebildet; daher ist $\varphi(x)$ in Γ_a von Null verschieden und regulär bis auf einen Pol im

Punkte ∞. Ist nun x_1 irgend ein Punkt im Innern[1]) von Γ, so wird $ln\,\dfrac{\varphi(x)}{x-x_1}$ in Γ_a regulär; man wähle dabei etwa den Zweig der Funktion $ln\,\dfrac{\varphi(x)}{x-x_1}$, der für $x=\infty$ verschwindet. Nach dem Cauchyschen Integralsatz erhält man

$$16)\qquad ln\,\frac{\varphi(x)}{x-x_1}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\Gamma} ln\,\frac{\varphi(\bar{x})}{\bar{x}-x_1}\,\frac{d\bar{x}}{\bar{x}-x}$$

und nach partieller Integration:

$$17)\qquad =\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\Gamma}\left(\frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})}-\frac{1}{\bar{x}-x_1}\right) ln\,(x-\bar{x})\,d\bar{x}.$$

Für $ln\,(x-\bar{x})$ kann irgend ein Zweig dieser Funktion eingesetzt werden, da

$$\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})}-\frac{1}{\bar{x}-x_1}\right)d\bar{x}$$

verschwindet. Nun ist

$$\int\limits_{+\Gamma} ln\,(x-\bar{x})\,\frac{d\bar{x}}{\bar{x}-x_1}$$

für alle x irgend eines endlichen ganz in Γ_a gelegenen einfach zusammenhängenden Bereiches eine eindeutige und reguläre Funktion $\chi(x)$; durch Differenzieren unter dem Integralzeichen findet man

$$\chi'(x)=\int\limits_{+\Gamma}\frac{d\bar{x}}{(x-\bar{x})(\bar{x}-x_1)}.$$

Die hier zu integrierende Funktion von $\bar{x}$ hat im Innern von Γ den einen Pol $\bar{x}=x_1$ mit dem Residuum $\dfrac{1}{x-x_1}$; es ist also

[1]) Falls Γ kein Inneres besitzt, sind die Überlegungen durch Einschiebung eines weiteren Grenzüberganges ein wenig abzuändern.

$$18)\qquad \chi'(x) = \frac{2\pi i}{x - x_1},$$

also

$$19)\qquad \chi(x) = 2\pi i\,(\ln(x - x_1) + \ln C),$$

wo $\ln C$ eine Integrationskonstante bedeutet.

Setzt man diesen Wert in (17) ein, so findet man

$$20)\qquad \ln\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{+\Gamma}\frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})}\ln(x - \bar{x})\,d\bar{x} - \ln C,$$

wo jetzt beide Seiten bloß bis auf Vielfache von $2\pi i$ bestimmt sind. Entwickelt man beiderseits in eine Reihe der Form $\ln x + \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \cdots$ (vgl. 11), so ergibt sich durch Koeffizientenvergleichung: $\ln C = 0$. Nun ist

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'(\bar{x})}{\varphi(\bar{x})} &= \frac{d}{|d\bar{x}|}\left[\ln|\varphi(\bar{x})| + i\,\mathrm{arcus}\,\varphi(\bar{x})\right]\frac{|d\bar{x}|}{d\bar{x}}\\ &= i\,\frac{d}{|d\bar{x}|}\left[\mathrm{arcus}\,\varphi(\bar{x})\right]\frac{|d\bar{x}|}{d\bar{x}}, \quad \text{weil } |\varphi(\bar{x})| \text{ konstant} = \varrho \text{ auf } \Gamma,\\ &= i\,\frac{d}{dn}\ln|\varphi(\bar{x})|\,\frac{|d\bar{x}|}{d\bar{x}},\end{aligned}$$

wo nunmehr nach der äußeren Normalen von Γ differenziert wird. Durch Einsetzen in (20) erhält man schließlich

$$21)\qquad \begin{aligned}\ln\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{+\Gamma}\frac{d\ln|\varphi(\bar{x})|}{dn}\ln(x - \bar{x})\,|d\bar{x}|\\ &= \frac{1}{2\pi\varrho}\int\limits_{+\Gamma}\frac{d\,|\varphi(\bar{x})|}{dn}\ln(x - \bar{x})\,|d\bar{x}|.\end{aligned}$$

Trennt man in Gleichung (21) Reelles und Imaginäres, so erhält man:

$$22)\qquad \ln|\varphi(x)| = u(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{+\Gamma}\frac{d\ln|\varphi(\bar{x})|}{dn}\ln|x - \bar{x}|\,|d\bar{x}|,$$

23) $$\operatorname{arcus} \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{+\Gamma} \frac{d \ln |\varphi(x)|}{d n} \operatorname{arcus}(x - x)\, |d x| .$$

Die Vergleichung von (1) und (22) führt zu der bekannten Formel:

24) $$\begin{aligned} \mu(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{d \ln |\varphi(x)|}{d n} = \frac{1}{2\pi} \frac{d u(\xi, \eta)}{d n} \\ &= \frac{1}{2\pi\varrho} \frac{d |\varphi(x)|}{d n} = \frac{1}{2\pi\varrho} |\varphi'(x)| , \end{aligned}$$

falls dieser Differentialquotient existiert.

Die Gleichungen (22), (23) geben Aufschluß über die Verzerrung, die eine Figur der x-Ebene durch die Abbildung (15) erleidet. Man entnimmt aus ihnen mit Rücksicht auf (2) unmittelbar folgenden Satz:

Sind x, z zwei einander entsprechende Punkte und x', x'' zwei auf Γ passend gewählte Punkte, so ist

25) $$|z| = |x - x'| ,$$

26) $$\operatorname{arcus} z = \operatorname{arcus}(x - x') .$$

Ein ebenso anschaulicher Verzerrungssatz ergibt sich aus Gleichung (12), wenn man beachtet, daß beispielsweise für $a_0 = 0$ und für $|z| = \varrho = 1$.

27) $$|x| \leqq 2$$

bleibt (s. § 4). Daraus folgt, daß es eine Konstante $r < 3$ gibt der Art, daß für alle $|z| \geqq 1$ die Reihe

$$\left| \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots \right| < r ,$$

also auch

28) $$< \frac{r}{|z|}$$

bleibt (nach dem sog. Schwarzschen Lemma). D. h. aber:

Bildet die Funktion

29) $$x = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

das Äußere des Einheitskreises der z-Ebene schlicht ab, so liegt der Bildpunkt irgend eines Punktes $z = a$ in einem Kreis mit dem Radius $\frac{r}{|a|}$ um den Punkt $x = a$. r ist $\geqq 1$ und < 3.

§ 3. Die Tschebyscheffschen Polynome.

Wir betrachten nun noch die zur Kurve Γ gehörigen Tschebyscheffschen Polynome

30) $$T_n(x) = x^n + t_{n-1}^{(n)} x^{n-1} + t_{n-2}^{(n)} x^{n-2} + \cdots + t_0^{(n)},$$

deren Maximum des Betrags auf Γ möglichst klein ausfällt. Dieses Maximum bezeichnen wir mit τ_n^n und nennen τ_n die n^{te} Tschebyscheffsche Konstante der Kurve Γ. Zu einer Γ ganz umschließenden Kurve Γ' gehören offenbar Tschebyscheffsche Konstante $\tau_n' > \tau_n$.

Nun sei Γ'' eine aus Γ durch ähnliche Vergrößerung entstehende Kurve, die ganz außerhalb der Γ umschließenden Lemniskate L, deren Gleichung (8) ist, verläuft. Das Vergrößerungsverhältnis sei $(1 + \eta) : 1$; dabei darf angenommen werden, daß η mit ε beliebig klein wird. Dann folgt aus der Ungleichung $\tau_n(\Gamma'') > \tau_n(L) > \tau_n(\Gamma)$ und aus den Gleichungen $\tau_n(\Gamma'') = (1 + \eta)\,\tau_n(\Gamma)$, $\tau_n(L) = \varrho + \varepsilon$:

31) $$\lim_{n \to \infty} \tau_n = \varrho.$$

Ferner erkennt man: es sind alle

32) $$\tau_n \geqq \varrho;$$

wäre nämlich $\tau_n < \varrho$, so wäre im Widerspruch mit (31) für $m = 2, 3, \cdots$: $\tau_{nm} \leqq \tau_n < \varrho$. Zugleich ist ersichtlich, daß in (32) das Zeichen $=$ nur dann möglich ist, wenn Γ eine Lemniskate ist.

Wenn Γ kein Kreis ist so gilt die Umgleichung

33) $\varrho^2 \pi >$ Fläche des Innengebiets von Γ (Bieberbach, a. a. O. S. 943).

Aus (32), (33) folgt:

I. Umschließt die Kurve Γ einen Flächeninhalt $\geqq r^2\pi$, so nimmt der Betrag jedes Polynoms der Form

$$34)\qquad x^n + k_{n-1}x^{n-1} + k_{n-2}x^{n-2} + \cdots + k_0$$

auf Γ einen Maximalwert $> r^n$ an, außer wenn das Polynom gleich $(x-a)^n$ und Γ ein Kreis um a vom Radius r ist.

Dem Satze (33) kann man den folgenden gegenüberstellen:

II. Wenn Γ kein Kreis ist, so ist der Umfang von $\Gamma > 2\pi\varrho$. Denn

$$\int\limits_{+\Gamma} |dx| = \int\limits_{|z|=\varrho} \left|\frac{dx}{dz}\right| |dz| = \varrho \int\limits_{|z|=\varrho} \frac{1}{|z|}\left|\frac{dx}{dz}\right| |dz| \geqq \varrho \left|\int\limits_{|z|=\varrho} \frac{1}{z}\frac{dx}{dz} dz\right| = 2\pi\varrho;$$

das Zeichen $=$ gilt hier überall nur dann, wenn $x = z$ ist.

Für besondere Kurven kann man viel genauere Aussagen machen als die des Satzes I, z. B. gilt für eine Ellipse[1]) mit den Halbachsen a, b: $2^n\tau_n^n = (a+b)^n + (a-b)^n$; ferner für einen doppelt zählenden Kreisbogen vom Radius r und vom Zentriwinkel 4ϑ $(< 2\pi)$: $\tau_n > \varrho = r\sin\vartheta$, dagegen für das Gebiet, das aus dem Innern zweier einander rechtwinkelig schneidender Kreise der Radien r_1, r_2 besteht, $\tau_n > \varrho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

§ 4. Koeffizientenabschätzung bei konformer Abbildung. Verzerrungssätze[2]).

Neben den Tschebyscheffschen Polynomen $T_n(x)$ betrachten wir andere

$$35)\qquad L_n(x) = x^n + l_{n-1}^{(n)}x^{n-1} + \cdots + l_0^{(n)},$$

[1]) Vgl. meine Abhandlung im 150. Bande des Crelleschen Journals, S. 84–86.

[2]) Wenn auch die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze nur zum geringsten Teil neu sind (vgl. die S. 1 angeführten Abhandlungen und zwar deren erste zu Satz II, III, IV, die zweite zu Satz IX, XI, die dritte zu Satz V, VI, X), so scheint mir doch das Beweisverfahren neu und mitteilenswert zu sein.

deren Nullstellen alle auf Γ liegen und deren Betrag auf Γ einen möglichst kleinen Maximalwert χ_n^n ($\geq \tau_n^n$) annimmt. Aus (8), (31) folgt sofort:

$$\lim_{n \to \infty} \chi_n = \varrho. \tag{36}$$

Den durch Gleichung (36) formulierten Satz kann man auch so aussprechen:

Das logarithmische Potential einer stetigen von der Robinschen verschiedenen Belegung, welches der Bedingung (2) genügt, nimmt auf der belegten Kurve Γ einen Maximalwert an, der $> ln\, \varrho(\Gamma)$ ist; man kann hinzufügen: und einen Minimalwert $< ln\, \varrho(\Gamma)$ (vgl. S. 98/99 meiner S. 56 angeführten Abhandlung).

Aus Gleichung (36) ergibt sich auch ein sehr einfacher Beweis des folgenden Satzes[1]):

I. Wenn es innerhalb oder auf Γ zwei Punkte P_1, P_2 mit der Entfernung $P_1 P_2 = 4$ gibt, und wenn Γ nicht aus der doppelt zählenden Strecke $P_1 P_2$ besteht, so ist $\varrho(\Gamma) > 1$.

Es möge vorausgesetzt werden, daß die beiden Punkte P_1, P_2 auf Γ liegen, daß ihre Entfernung gleich 4 sei und daß es auf Γ keine zwei Punkte mit größerer Entfernung von einander gibt. Die doppelt zählende Strecke $P_1 P_2$ soll Γ' heißen; $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_k$ sollen die gleiche Bedeutung wie in (4) haben. Die Behauptung lautet dann

$$\varrho(\Gamma) > \varrho(\Gamma')\ (= 1). \tag{37}$$

Zum Beweise projiziere man die Punkte $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots \bar{x}_k$ als $\bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \cdots \bar{x}'_k$ senkreckt auf Γ'; ferner sei x irgend ein weiterer Punkt von Γ, x' seine Projektion auf Γ'. Dann gilt, falls Γ als nicht mit Γ' identisch vorausgesetzt wird, mit beliebigen

[1]) Ich benutze diese Gelegenheit, um einen sinnstörenden Druckfehler in einer dem gleichen Satze gewidmeten Note (diese Berichte 1916, S. 39) zu verbessern: in Gleichung (1) daselbst ist der Faktor a_1 durch 1 zu ersetzen.

positiven ganzzahligen Exponenten $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_k$, sofern nur die $\overline{x}_i$ dicht genug auf Γ liegen:

38) $$|x-x_1|^{\nu_1}|x-x_2|^{\nu_2}\cdots|x-x_k|^{\nu_k} > |x'-\overline{x}_1'|^{\nu_1}\cdots|x'-\overline{x}_k'|^{\nu_k},$$

das heißt

39) $$\chi_n(\Gamma) > \chi_n(\Gamma').$$

Da $\varrho(\Gamma') = 1$ ist, folgt aus (36), (39):

40) $$\varrho(\Gamma) \geqq 1.$$

Man sieht aber unmittelbar ein, daß hier das Zeichen $=$ nicht gelten kann, weil einerseits die Robinsche Belegung von Γ nur an Ausnahmestellen Null und andrerseits die Länge von Γ größer als die von Γ' ist[1]).

Mit ganz ähnlichen Überlegungen läßt sich auch folgender Satz beweisen:

II. Hat die Robinsche Belegung einer Kurve Γ ihren Schwerpunkt im Nullpunkt und ist $\varrho(\Gamma) = 1$, oder (was dasselbe heißt): wird durch

41) $$x = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots$$

das Gebiet $|z| > 1$ auf das Äußere Γ_a einer Kurve Γ der x-Ebene abgebildet, so liegt Γ völlig innerhalb des Kreisgebietes $|x| < 2$, außer wenn Γ aus einer doppelt zählenden im Nullpunkt halbierten Strecke der Länge 4 besteht.

Beweis: Es sei $\varrho(\Gamma) = 1$ und der Schwerpunkt der Robinschen Belegung sei der Nullpunkt. Auf dem Kreise $|x| = k$ liege der Punkt P von Γ; außerhalb aber dieses Kreises gebe es keine Punkte von Γ. Für die von Γ ab-

[1]) Man kann, indem man auch die Belegungen $\mu(x)|dx|$ von Γ auf Γ' projiziert, auch so schließen: Der Maximalwert des Potentials $\int_{\Gamma'} \mu(x)\, ln\, |x-x'| \left|\frac{dx}{dx'}\right| |dx'|$ auf Γ' ist einerseits $\geqq ln\, \varrho(\Gamma')$ andrerseits $< ln\, \varrho(\Gamma)$, also ist $\varrho(\Gamma) > \varrho(\Gamma') = 1$.

hängige Zahl k gibt es nach dem vorigen Satze eine obere Grenze $g\,(< 4)$ und auf Grund bekannter Überlegungen ersieht man, daß es Kurven Γ gibt, für die $k = g$ ist. Es werde also angenommen, daß $OP = g$ ist. Bestünde nun Γ nicht aus einer doppelt zählenden Strecke, so würde man die Robinsche Belegung $\mu(x)\,|dx|$ jedes Bogenelements von Γ samt diesem Element auf die Strecke OP und ihre Verlängerung über O hinaus senkrecht projizieren; man würde so auf einer Strecke QP eine der Bedingung (2) genügende Belegung erhalten, deren Schwerpunkt der Nullpunkt ist und deren logarithmisches Potential auf QP einen Maximalwert $< ln\,\varrho\,(\Gamma)$, also < 0 annehmen würde. Man könnte also nach dem Verfahren, das von (1) zu (8) führte, ein Polynom $g(x) = x^n + h_2 x^{n-2} + \cdots + h_n$ bilden, dessen Nullstellen sämtlich auf QP liegen und dessen Maximalwert auf $QP < 1$ wäre. Die Lemniskate, deren Gleichung $|g(x)| = 1$ ist und deren Äußeres durch $z^n = g(x)$ auf das Gebiet $|z| > 1$ abgebildet wird, würde auf ihrer Begrenzung einen Punkt P' enthalten, dessen Entfernung OP' von $O > g$ wäre, was der Voraussetzung, g sei die obere Grenze solcher Entfernungen, widerspricht. Aus dem bewiesenen Satze ergibt sich ohne weiteres der folgende:

III. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab und ergibt sich für keinen dieser z-Werte $x = 0$, so ist $|a_0| \leq 2$; das Zeichen $=$ gilt nur, wenn das Bild des Kreises $|z| = 1$ eine doppelt zählende Strecke der Länge 4 ist, deren einer Endpunkt der Punkt $x = 0$ ist.

Und hieraus mittels der Substitution

42) $$u = \frac{1}{x}, \quad v = \frac{1}{z}:$$

IV. Bildet die Funktion

43) $$u = v + a_2 v^2 + a_3 v^3 + \cdots$$

das Gebiet $|v| < 1$ schlicht ab, so ist $|a_2| \leq 2$; das Zeichen $=$ gilt nur, wenn das Bild des Kreises $|v| = 1$

ein doppelt zählender Strahl ist, der die Verlängerung eines Halbmessers des Kreises $|u| = \frac{1}{4}$ bildet.

Genau mit den nämlichen Überlegungen wie den Satz II beweist man folgende Verallgemeinerung:

V. Bildet die Funktion (41) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab, so liegt das Bild des Kreises $|z| = \varrho\ (> 1)$ ganz innerhalb des Kreises $|x| = \varrho + \dfrac{1}{\varrho}$ und berührt diesen nun, falls das Bild des Kreises $|z| = 1$ eine doppelt zählende Strecke der Länge 4 ist.

Hieraus folgt weiter:

VI. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab und ergibt sich für keinen dieser z-Werte $x = 0$, so gilt für alle Bildpunkte x des Kreises $|z| = \varrho$ (> 1): $|x| \leqq 2 + \varrho + \dfrac{1}{\varrho}$, wobei das Zeichen $=$ nur in dem bei Satz III erwähnten Ausnahmefall gilt.

VII. Bildet die Funktion (43) das Gebiet $|v| < 1$ schlicht ab, so gilt für alle Bildpunkte u des Kreises $|v| = \varrho\ (\leqq 1)$: $|u| \geqq \dfrac{\varrho}{(1+\varrho)^2}$, wobei das Zeichen $=$ nur in dem bei Satz IV erwähnten Ausnahmefall gilt.

Bezeichnet man immer unter der Voraussetzung, daß die Funktion (41) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht abbilde mit Γ_ϱ, $\Gamma_{\varrho'}$ die Bilder der Kreise $|z| = \varrho\ (> 1)$ und $|z| = \varrho' > \varrho$, so gibt es offenbar eine untere Grenze $k(\varrho, \varrho')$ für das Minimum der Entfernung zweier Punkte P, P', von denen der eine auf Γ_ϱ, der andere auf $\Gamma_{\varrho'}$ liegt, und diese untere Grenze ist ein erreichbares Minimum. Es werde also angenommen, daß P auf Γ_ϱ, P' auf $\Gamma_{\varrho'}$ liege und daß die Entfernung $PP' = k(\varrho, \varrho')$ sei. Auf die Halbgerade $P'P\infty$ projiziere man mittels Kreisbögen um P' die Bogenelemente $|d\bar{x}|$ der Kurve $\Gamma (= \Gamma_1)$ samt ihren Robinschen Belegungen $\mu(x)\,|d\bar{x}|$. Man erhält so auf einer Strecke h' eine der Bedingung (2) genügende Belegung, deren Potential $w(\xi, \eta) = \int\limits_{h'} \mu(x) \left|\frac{dx}{dx'}\right| ln|x - x'|\,|dx'|$ in P' den nämlichen Wert $ln\,\varrho'$ annimmt wie das ursprüngliche Potential $u(\xi, \eta)$ (1) der Belegung von Γ; dagegen ist, falls Γ als nicht aus einer doppelt zählenden Strecke der Länge 4 bestehend vorausgesetzt wird, im Punkte $P: w(\xi, \eta) < u(\xi, \eta) = ln\,\varrho$, weil dann für die Punkte x der Strecke PP': $ln|x - x'|$ im allgemeinen $<$ und niemals $>$ $ln|x - \bar{x}|$ ist. Es gibt somit zwischen P und P' einen (von P und P' verschiedenen) Punkt P'', an dem $w(\xi, \eta) = ln\,\varrho$ wird. Nun ist für alle Punkte der Strecke h' offenbar $w(\xi, \eta) < 1$, denn der Maximalwert des Potentials w auf h' ist kleiner als der konstante Wert 1 des Potentials u auf Γ, wieder weil im allgemeinen $ln|x - x'| < ln|x - \bar{x}|$ ist. Daraus folgt, daß die Kurve Γ', deren Gleichung $w(\xi, \eta) = 1$ ist, aus einem geschlossenen Zuge besteht und doppelpunktlos[1]) ist. Zu Γ' gehören die Kurven Γ'_ϱ und $\Gamma'_{\varrho'}$, wie zu Γ die Kurven Γ_ϱ und $\Gamma_{\varrho'}$ gehören. Man ersieht danach, daß unsere Annahme, Γ bestehe nicht aus einer doppelt zählenden Strecke der Länge 4, wegen $P'P'' < P'P$ im Widerspruch steht mit der Voraussetzung, $k(\varrho, \varrho')$ sei die untere Grenze solcher Entfernungen. Das ergibt folgenden Satz:

VIII. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab, so haben die Bilder der Kurven $|z| = \varrho$ (> 1) und $|z| = \varrho' > \varrho$ überall einen Abstand $\geq \varrho' + \frac{1}{\varrho'} - \varrho - \frac{1}{\varrho}$ und $\leq \varrho' + \frac{1}{\varrho'} + \varrho + \frac{1}{\varrho}$ (wie man wegen V hinzufügen kann). Über das Gleichheitszeichen gilt das bei Satz V Bemerkte.

---

[1]) In einem Doppelpunkt einer Kurve $w(\xi, \eta) =$ konst. erleidet nämlich ein Massenpunkt keine Anziehung durch die auf h' verteilte Masse (wenn die anziehende Kraft umgekehrt proportional der Entfernung angenommen wird). Somit können außerhalb der Strecke h' und um so mehr im Gebiete $w(\xi, \eta) > 1$ keine Doppelpunkte von Kurven $w(\xi, \eta) =$ konst. liegen.

Insbesondere ergibt sich hieraus für $\varrho = 1$ nach der Transformation (42):

IX. In Satz VII kann ohne sonstige Änderung die Aussage $|u| \geqq \frac{\varrho}{(1+\varrho)^2}$ durch $|u| \leqq \frac{\varrho}{(1-\varrho)^2}$ ersetzt werden.

Aus VIII folgt weiter für $\lim \varrho' = \varrho$:

X. Bildet die Funktion (12) das Gebiet $|z| > 1$ schlicht ab, so gilt für alle $|z| = \varrho\,(>1)$: $\left|\frac{dx}{dz}\right| \geqq 1 - \frac{1}{\varrho^2}$.

Ferner mit Rücksicht auf VII:

XI. Bildet die Funktion (43) das Gebiet $|v| < 1$ schlicht ab, so gilt für alle $|v| = \varrho\,(<1)$: $\left|\frac{du}{dv}\right| \geqq \frac{1-\varrho}{(1+\varrho)^3}$.

§ 5. Die Blasiusschen Formeln und der Kutta-Joukowskysche Satz[1]).

Da ein Teil der vorausgehenden Ansätze für die Theorie des Flugs wichtig geworden sind, möge zum Schluß noch eine, wie mir scheint, besonders einfache Ableitung der Blasiusschen Formeln und des Kutta-Joukowskyschen Satzes Platz finden. Ein unendlich langer Kreiszylinder, dessen Grundkreis in der komplexen z-Ebene die Gleichung $|z| = \varrho$ haben möge, werde in einer Flüssigkeitsströmung festgehalten, die in allen Parallel-Ebenen zur z-Ebene die nämliche ist und die im Unendlichen den Charakter einer Parallelströmung unter dem Winkel $-\alpha$ gegen die reelle Achse hat. Dann ist das Geschwindigkeits-Potential gleich dem Realteil der folgenden Funktion[2])

$$44)\qquad f(z) = -u\left(e^{i\alpha} z + \frac{e^{-i\alpha}\varrho^2}{z}\right) - \frac{Ji}{2\pi}\, ln\, z;$$

(u ist der Betrag der Geschwindigkeit im Unendlichen, J die

[1]) Vgl. für das folgende v. Mises, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 1917, Heft 21/22.

[2]) Vgl. Lamb, Hydrodynamik, Leipzig 1907, S. 92.

Konstante der Zirkulation um den Zylinder). Ersetzt man nun den kreisförmigen Querschnitt durch einen anderen Γ (in der $x = \xi + i\eta$-Ebene), ohne sonst an den Bedingungen der Aufgabe etwas zu ändern, so hat man als Geschwindigkeitspotential den Realteil $\Phi(\xi, \eta)$ der Funktion

45) $$F(x) = f(z(x)) = \Phi(\xi, \eta) + i\,\Psi(\xi, \eta)$$

zu wählen, wobei $z(x)$ die Funktion (12) ist.

Der Druck, der von der Strömung auf das Zylinderstück, das sich über dem Bogenelement ds des Profils Γ erhebt, ausgeübt wird, hat nach dem Bernoullischen Theorem die Komponenten:

in der ξ-Richtung: $-\dfrac{\delta}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 \cos(n, \xi)\, ds = \dfrac{\delta}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 d\eta,$

" " η- " : $-\dfrac{\delta}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 \cos(n, \eta)\, ds = -\dfrac{\delta}{2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 d\xi;$

δ ist die Dichte der Flüssigkeit.

Bezeichnet man mit P_ξ, P_η die Komponenten der von der Flüssigkeit auf den Zylinder ausgeübten Gesamtkraft und mit M deren Moment bezüglich des Nullpunkts, so erhält man

46) $$\begin{aligned} P_\eta + i P_\xi &= -\frac{\delta}{2}\int\limits_{+\Gamma}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s}\right)^2 (d\xi - i\,d\eta) \\ &= -\frac{\delta}{2}\int\limits_{+\Gamma}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} + i\frac{\partial \Psi}{\partial s}\right)^2 (d\xi - i\,d\eta), \end{aligned}$$

da ja

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

ist. Nun ist $ds^2 = (d\xi + i\,d\eta)(d\xi - i\,d\eta)$, also

47) $$P_\eta + i P_\xi = -\frac{\delta}{2}\int\limits_{+\Gamma}\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 dx.$$

Multipliziert man unter den Integralzeichen in (46) und (47) noch mit $\xi + i\eta$, so ergibt sich ebenso

48) $$M = -\frac{\delta}{2}\,\mathfrak{R}\int\limits_{+\Gamma} x\left(\frac{dF(x)}{dx}\right)^2 dx.$$

(47) und (48) sind die beiden Blasiusschen Formeln[1]).

Führt man in (47) die Veränderliche z mittels (11) ein, so findet man:

$$49)\quad P_\eta + i P_\xi = -\frac{\delta}{2}\int\limits_{+\Gamma}\left[-u\left(e^{i\alpha}-\frac{e^{-i\alpha}\varrho^2}{z^2}\right)-\frac{Ji}{2\pi}\frac{1}{z}\right]^2$$
$$\left(1-\frac{a_1}{z^2}-\frac{2a_2}{z^3}-\cdots\right)dz = \delta u J e^{i\alpha}$$

(nach dem Cauchyschen Integralsatz); das ist der Kutta-Joukowskysche Satz.

---

[1]) Zeitschr. für Math. u. Phys., Bd. 58 (1910), S. 93 und 96.