Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1919

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über gewisse Verbiegungen der achsenaffinen Flächen, insbesondere der Flächen 2. Ordnung.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 15. November 1919.

1. Achsenaffin soll eine Fläche heißen, wenn es ein Büschel von Ebenen gibt, welche die Fläche in affinen Kurven schneiden; dabei soll die Achse des Büschels zugleich Affinitäts-Achse sein, und die Affinitäts-Richtung auf ihr senkrecht stehen.

Die Ebenen des Büschels sollen in erweitertem Sinn Meridianebenen, die affinen Kurven Meridiane heißen; die Affinitätsachse Achse der Fläche, ihre Schnittpunkte mit der Fläche Pole. Als Parallelkurven werden die untereinander ähnlichen Kurven der Fläche bezeichnet, welche durch die auf der Achse senkrechten Ebenen ausgeschnitten werden.

Als nächstliegendes Beispiel von achsenaffinen Flächen seien die Flächen 2. Ordnung erwähnt; jede Hauptachse ist eine Achse in dem oben festgelegten Sinn.

Im folgenden wird bewiesen, daß jede achsenaffine Fläche einer stetigen Verbiegung fähig ist, bei der sie achsenaffin bleibt; dabei bleiben sowohl die Meridiankurven als auch die Parallelkurven in ihrer Eigenschaft als solche erhalten. Die Aufstellung der Biegungsflächen erfordert nur die Ausführung einer Quadratur. Es ist also insbesondere möglich, in sehr einfacher Weise Biegungsflächen der Flächen 2. Grades aufzufinden, wobei jeder Hauptachse eine einfach unendliche Reihe solcher Biegungsflächen zugeordnet ist.

2. Nach einem Satz von D'Ocagne[1]) lassen sich Paare aufeinander abwickelbarer Rotationsflächen in folgender Weise erhalten: Ein beliebiger Zylinder wird durch eine auf den Mantellinien senkrechte Ebene E_0 in einer Kurve K_0 und durch eine beliebig geneigte Ebene E in einer Kurve K geschnitten; E_0 und E schneiden sich in einer Geraden Z. Wird der Zylindermantel abgewickelt, so geht K_0 in eine Gerade Z_1, K in eine Kurve K_1 über. Dann sind die beiden Rotationsflächen, die durch Umdrehung von K um Z und von K_1 um Z_1 entstehen, aufeinander abwickelbar; gleiches Krümmungsmaß herrscht in solchen Punkten der Meridiankurven K und K_1, welche auf dem Zylindermantel und seiner Abwicklung einander entsprechen.

Dieser Satz läßt sich verallgemeinern. Wir machen (Fig. 1) Z zum Träger eines Ebenenbüschels; dieses schneidet den Zylinder in einem Büschel von zueinander senkrecht affinen Kurven K (K' . . .) mit der Achse Z. Hieraus geht bei der Abwicklung des Zylindermantels ein Büschel K_1 (K_1' . . .) zueinander senkrecht affiner Kurven mit der Achse Z_1 hervor. Dann läßt sich beweisen: Ordnet man die Kurven K als Meridiankurven einer achsenaffinen Fläche F an, indem man ihre Ebenen um beliebige Winkel um die Achse Z

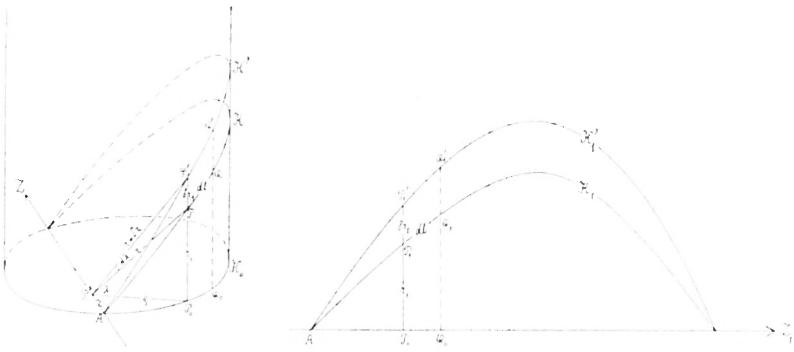

Fig. 1

[1]) D'Ocagne, Remarque sur la déformation des surfaces de révolution. Bulletin de la société mathématique de France 21, 1893, S. 85.

dreht, so ist es stets auf eine und nur eine Weise möglich, die Kurven K_1 als Meridiankurven einer auf F abwickelbaren achsenaffinen Fläche F_1 anzuordnen, indem man ihre Ebenen um geeignete Winkel um die Achse Z_1 dreht. Dabei herrscht auf F und F_1 gleiches Krümmungsmaß in solchen Punkten entsprechender Meridiankurven K und K_1, welche einander auf dem Zylindermantel und seiner Abwicklung entsprechen.

Wir legen einen Punkt P_0 der Kurve K_0 durch die rechtwinkligen Koordinaten $AP^* = z$, $P^*P_0 = \varrho$ fest. In der Ebene E der Kurve K mit dem Neigungswinkel λ gegen E_0 tritt für den Punkt P an Stelle von ϱ die Entfernung $P^*P = r = \varrho : \cos\lambda$. Die Koordinaten des entsprechenden Punktes P_1 der Abwicklung sind der explizit nicht benötigte Bogen AP_0 und $P_0P_1 = r_1 = \varrho \operatorname{tg}\lambda$.

Es sollen nun die Änderungen der Koordinaten beim Übergang von P zu einem benachbarten Punkt Q derselben Meridiankurve mit d bezeichnet werden; die Änderungen beim Übergang zu einem auf derselben Mantellinie gelegenen Punkt P' der benachbarten Meridiankurve mit δ.

Dann ist: $P_0Q_0^2 = dz_1^2 = dz^2 + d\varrho^2$

$$PQ^2 = P_1Q_1^2 = dl^2 = dz^2 + dr^2 = dz_1^2 + dr_1^2$$

$$dr = \frac{d\varrho}{\cos\lambda}; \quad dr_1 = \operatorname{tg}\lambda\, d\varrho$$

$$\delta r = \frac{\partial r}{\partial\lambda}\, d\lambda = \frac{\varrho \sin\lambda}{\cos^2\lambda}\, d\lambda; \quad \delta r_1 = \frac{\partial r_1}{\partial\lambda}\, d\lambda = \frac{\varrho}{\cos^2\lambda}\, d\lambda.$$

Die achsenaffine Fläche F soll jetzt in der Weise hergestellt werden, daß der Winkel $d\lambda$ der Ebene E einer Kurve K mit der der benachbarten K' durch $d\varphi$ ersetzt wird, wo φ eine Funktion von λ ist (Fig. 2). Dann ist das Linienelement der Fläche F

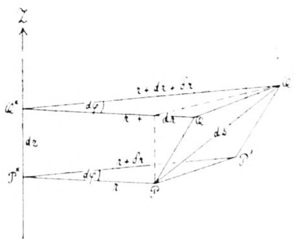

Fig. 2

$$PQ'^2 = ds^2 = r^2 d\varphi^2 + (dr + \delta r)^2 + dz^2.$$

Stellt man ebenso die Ebene E_1 einer Kurve K_1 mit der der benachbarten K_1' so zusammen, daß sie sich in Z_1 unter einem Winkel $d\psi$ schneiden, wo ψ eine Funktion von λ ist, so ist das Linienelement der so entstehenden achsenaffinen Fläche F_1

$$ds_1^2 = r_1^2 d\psi^2 + (dr_1 + \delta r_1)^2 + dz_1^2.$$

Es ist jetzt zu zeigen, daß die beiden Linienelemente ds^2 und ds_1^2 einander gleich gemacht werden können durch geeignete Wahl der beiden Funktionen $\varphi(\lambda)$ und $\psi(\lambda)$.

Hiezu muß

$$r^2 d\varphi^2 + dr^2 + 2\,dr\,\delta r + \delta r^2 + dz^2 = r_1^2 d\psi^2 + dr_1^2 + 2\,dr_1\,\delta r_1 + \delta r_1^2 + dz_1^2$$

werden. Wegen

$$dr^2 + dz^2 = dr_1^2 + dz_1^2 = dl^2$$

$$dr\,\delta r = dr_1\,\delta r_1 = \varrho \frac{\sin\lambda}{\cos^3\lambda}\,d\varrho\,d\lambda$$

folgt einfacher

$$r^2 d\varphi^2 + \delta r^2 = r_1^2 d\psi^2 + \delta r_1^2.$$

Führt man jetzt die Parameter λ und ϱ ein, so erweist sich diese Bedingungsgleichung als von ϱ frei; man erhält

$$\frac{d\varphi^2}{\cos^2\lambda} + \frac{\sin^2\lambda}{\cos^4\lambda}\,d\lambda^2 = \mathrm{tg}^2\lambda\,d\psi^2 + \frac{d\lambda^2}{\cos^4\lambda}$$

also

$$d\varphi^2 = d\lambda^2 + \sin^2\lambda\,d\psi^2.$$

Damit ist die Verallgemeinerung des D'Ocagneschen Satzes bewiesen. Insbesondere ist ersichtlich, daß eine der beiden Verteilungsfunktionen φ und ψ willkürlich angenommen werden kann; die andere ist dann durch eine Quadratur bestimmt. Man kann also aus jedem System von Schnittkurven eines beliebigen Zylinders mit einem Ebenenbüschel ∞ viele von einer willkürlichen Funktion abhängende Paare von aufeinander abwickelbaren achsenaffinen Flächen ableiten.

3. Nachdem die Existenz von Paaren achsenaffiner Flächen erkannt ist, die aufeinander abwickelbar sind derart, daß sich sowohl die Meridiankurven als auch die Parallelkurven auf beiden Flächen entsprechen, soll jetzt nach stetigen Verbiegungen achsenaffiner Flächen gesucht werden.

Stellt man einen Ausgangsmeridian in der Form

$$r = U(u); \quad z = z(u)$$

dar, so erhält man für jede dazu senkrecht affine Kurve

$$r = U(u)\,V(v); \quad z = z(u).$$

Dabei hängt der die Maßstabsänderung der r-Koordinaten bestimmende Faktor $V(v)$ mit dem Winkel w zusammen, den die allgemeine Meridianebene mit der Ebene des Ausgangsmeridians bildet; es ist also

$$w = w(v).$$

Somit ergibt sich für eine beliebige achsenaffine Fläche die Parameterdarstellung:

$$\begin{aligned} x &= U(u)\,V(v)\cos w(v) \\ y &= U(u)\,V(v)\sin w(v) \\ z &= z(u). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten ihres Linienelements

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

werden:

$$E = U'^2 V^2 + z'^2; \quad F = U U' V V'; \quad G = U^2 (V'^2 + V^2 w'^2).$$

Es handelt sich bei der Aufsuchung von stetigen Verbiegungen achsenaffiner Flächen darum, von einem veränderlichen Parameter c abhängige Funktionen U, V, w, z zu finden, derart, daß E, F, G diesen Parameter nicht enthalten. Für eine Ausgangsfläche x_0, y_0, z_0 sollen die Veränderlichen u und v so definiert werden, daß $w_0 = v$ und $z_0 = u$ gesetzt wird; dann sind die Koeffizienten ihres Linienelements:

$$E_0 = U_0'^2 V_0^2 + 1; \quad F_0 = U_0 U_0' V_0 V_0'; \quad G_0 = U_0^2 (V_0'^2 + V_0^2).$$

Als Bedingungen für die gesuchte Abwickelbarkeit ergaben sich die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\text{a)}\quad U'^2 V^2 + z'^2 = U_0'^2 V_0^2 + 1 \\ &\text{b)}\quad U U' V V' = U_0 U_0' V_0 V_0' \\ &\text{c)}\quad U^2 (V'^2 + V^2 w'^2) = U_0^2 (V_0'^2 + V_0^2). \end{aligned}$$

Zunächst erkennt man aus (c), daß sich U von U_0 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden kann; die Form des Linienelements läßt aber ersehen, daß ein Faktor von U auch in die Funktion V hineingenommen werden kann, so daß man ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$1)\qquad U = U_0$$

setzen kann. Dann ergibt die Integration von b)

$$2)\qquad V^2 = V_0^2 + c; \quad V = \sqrt{V_0^2 + c},$$

wo c eine willkürliche Konstante ist. Dann folgt aus (a)

$$3)\qquad z = \int \sqrt{1 - c\, U_0'^2}\, du$$

und aus (c)

$$4)\qquad w = \int \frac{\sqrt{V_0^4 + c(V_0^2 + V_0'^2)}}{V_0^2 + c}\, dv$$

Die aus (1) — (4) erhaltenen Größen U, V, z, w bestimmen, da sie von einem Parameter c abhängen, eine einfach unendliche stetige Folge von aufeinander abwickelbaren achsenaffinen Flächen. Die zu z und w noch hinzutretenden additiven Konstanten sind unwesentlich und verschieben nur den Anfangspunkt der Zählung.

4. Je nach dem Vorzeichen von c haben die Biegungsflächen verschiedenen Charakter, ähnlich wie das bei der Verbiegung der Rotationsflächen bekannt ist.

a) Für $c > 0$ wird $V^2 > V_0^2$; alle Punkte der Fläche vergrößern bei der Verbiegung ihren Abstand von der Achse. Jedoch ist z und somit ein Punkt der verbogenen Fläche nur reell, so lange $1 - c\, U_0'^2 > 0$, also $U_0'^2 < \frac{1}{c}$ ist. Der reelle

Teil der verbogenen Fläche endet mit einer oder mehreren, auch ∞ vielen Parallelkurven, deren Parameter $u = \bar{u}$ die Gleichung $U_0'^2 = \frac{1}{c}$ erfüllen. In den Endpunkten des reellen Teils der Meridiankurven ist somit $\frac{dz}{du} = 0$; und da $\frac{dr}{du} = U'V = U_0' \sqrt{V_0^2 + c}$ nicht gleichzeitig verschwinden kann, ist $\frac{dz}{dr} = 0$; also besitzt die Fläche in einer derartigen ebenen Grenzkurve des reellen Teiles eine der ganzen Grenzkurve gemeinsame, auf der Achse senkrechte Tangentialebene.

Auf der Ausgangsfläche entsprechen diesen Grenzkurven ebene Parallelkurven, für welche

$$z_0 = \bar{u}; \quad \frac{dz_0}{dr_0} = \frac{1}{U_0' V_0} = \pm \frac{\sqrt{c}}{V_0}$$

ist. Die Richtung der Tangente einer Meridiankurve in einem Punkt einer solchen Parallelkurve ist also nur von dem Parameter v des Meridians, nicht von dem Parameter $\bar{u}$ der Grenzkurve, bzw. der Parallelkurve abhängig. Sämtliche Tangenten der Meridiane längs einer Parallelkurve bilden einen Kegel; seine Spitze liegt auf der Achse und hat von der Parallelebene die Entfernung $r_0 \frac{dz_0}{dr_0} = \pm U_0 \sqrt{c}$. Hat also die verbogene Fläche mehr als eine Grenzkurve, so wird die Ausgangsfläche längs der entsprechenden Parallelkurven, die im allgemeinen nur ähnlich sind, von kongruenten, bzw. symmetrischen Kegeln berührt.

b) Für $c < 0$ wird $V^2 < V_0^2$; alle Punkte der Fläche verkleinern bei der Verbiegung ihre Entfernung von der Achse. z bleibt für jeden Wert von U_0' reell. Pole der Ausgangsfläche, in denen die Tangentialebene auf der Achse senkrecht steht, gehen in Knotenpunkte der verbogenen Fläche über; es treten dann spindelartige Flächen auf.

Eine Singularität, welche bei der Verbiegung der Rotationsflächen kein Seitenstück besitzt, ergibt sich aus Gleichung (2). Die verbogene Fläche wird imaginär, wenn $V_0^2 + c < 0$ wird. Der reelle Teil der Biegungsfläche endet also an den Meridiankurven, deren Parameter $v = \bar{v}$ die Gleichung $V_0^2 = -c$ erfüllen. Für diese Werte wird $V = 0$ und $r = 0$; die die Grenze des reellen Teiles bildenden Meridiane sind also Gerade und fallen in die Achse. Diese Singularität entsteht in der Weise, daß ein von Meridianen begrenztes Stück der Ausgangsfläche so lange in Richtung der Achse gestreckt werden kann, bis der kürzeste Meridian in eine Gerade übergegangen ist. Gleichzeitig wird nach (4) $\frac{dw}{dv} = \infty$, wenn nicht auch der Zähler $= 0$ wird für einen Wert $v = \bar{v}$, der $V_0^2 + c = 0$ erfüllt. Der Wert, den w selbst annimmt, wenn das in (4) auftretende Integral bis an eine Nullstelle des Nenners erstreckt wird, erfordert eine besondere Untersuchung, die hier nur mit einer Einschränkung Platz finden soll: Setzt man voraus, daß V_0' für $v = \bar{v}$ nicht verschwindet, so kann man V_0 in eine Reihe entwickeln von der Form

$$V_0 = \sqrt{-c} + c_1 (v - \bar{v}) + c_2 (v - \bar{v})^2 + \cdots,$$

wo $c_1 \neq 0$ ist. Dann ist der Zähler $\sqrt{V_0^4 + c(V_0^2 + V_0'^2)}$ regulär und von Null verschieden für $v = \bar{v}$; der Nenner wird

$$V_0^2 + c = 2\sqrt{-c}\, c_1 (v - \bar{v}) + \cdots,$$

folglich besitzt $\frac{dw}{dv}$ für $v = \bar{v}$ einen Pol erster Ordnung und mithin w selbst einen logarithmischen Pol.

Läßt man obige Einschränkung fallen, so verschwindet der Zähler von $\frac{dw}{dv}$ gleichzeitig mit dem Nenner; doch zeigt sich, daß hiedurch im allgemeinen das Unendlichwerden von $\frac{dw}{dv}$ und w selbst nicht aufgehoben wird.

Es wird also der zu einem singulären, in eine Gerade ausartenden Meridian gehörige Zentriwinkel unendlich; die Fläche umschließt den singulären Meridian spiralig in ∞ vielen Windungen.

5. Als Beispiel sei eine einfache Verbiegung des 3achsigen Ellipsoids

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

behandelt. Unter Benützung der oben eingeführten Normierung der Parameter für die Ausgangsfläche erhält man für die Koordinaten:

$$x_0 = \frac{ab}{c} \sqrt{\frac{c^2 - u^2}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \cos v$$

$$y_0 = \frac{ab}{c} \sqrt{\frac{c^2 - u^2}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \sin v$$

$$z_0 = u.$$

Dabei ist

$$U_0 = \frac{ab}{c} \sqrt{c^2 - u^2}; \quad V_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}; \quad w = v.$$

Dann sind die entsprechenden Größen für die Biegungsflächen, wenn man, um Verwechslungen mit der Halbachse c zu vermeiden, die Konstante c der allgemeinen Untersuchung durch γ ersetzt:

$$U = \frac{ab}{c} \sqrt{c^2 - u^2}; \quad V = \sqrt{\frac{1 + \gamma (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}$$

$$z = \int \sqrt{1 - \gamma \frac{a^2 b^2}{c^2} \frac{u^2}{c^2 - u^2}}\, du$$

$$w = \int \frac{\sqrt{1 + \gamma \dfrac{a^4 \sin^2 v + b^4 \cos^2 v}{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}}{1 + \gamma (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)}\, dv$$

Hieraus folgen ohne weiteres die Koordinaten einer stetigen Folge von Biegungsflächen des Ellipsoids; sie sollen hier nicht vollständig angegeben, sondern statt dessen ein besonderer Fall weiter verfolgt werden.

Es sei $a > b$ vorausgesetzt; dann ist der in der YZ-Ebene liegende Meridian der kürzeste. Das Ellipsoid soll unter spindelartiger Verbiegung soweit gestreckt werden, daß dieser Meridian in eine Gerade übergeht. Der Meridian gehört zu dem Parameter $v = \frac{\pi}{2}$; für diesen Wert muß also $V = 0$ werden. Hieraus ergibt sich die Konstante $\gamma = -\frac{1}{a^2}$.

Für diese spezielle Biegungsfläche erhält man also:

$$U = \frac{ab}{e}\sqrt{e^2 - u^2}; \quad V = \frac{e}{a}\,\frac{\cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}},$$

wo $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ist;

$$z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + \frac{b^2}{e^2}\,\frac{u^2}{e^2 - u^2}}\,du$$

$$w = \frac{ab}{e}\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\cos v \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} =$$

$$\left[\frac{b}{e} \lg \frac{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v}\right]_{v_0}^{v}.$$

Dabei muß erwähnt werden, daß hier gerade der Fall eintritt, daß außer dem Nenner von $\frac{dw}{dv}$ zunächst auch der Zähler für $v = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, wenn auch von niedrigerer Ordnung als der Nenner. w selbst nimmt für $v = \frac{\pi}{2}$ den Wert ∞ an. Das bedarf für das positive Vorzeichen der Quadratwurzel keiner weiteren Überlegung; für das negative Vorzeichen läßt die Umformung

$$\frac{a \sin v - \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v} = \frac{-b \cos v}{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}$$

erkennen, daß für $v = \frac{\pi}{2}$ der Logarithmand Null, also $w = \infty$ wird.

Es entspricht somit dem kürzesten Meridian des Ellipsoids auf der Biegungsfläche eine Gerade, um die sich die Fläche spiralig windet.

Die Koordinaten der Biegungsfläche sind, wenn $v_0 = 0$ gesetzt wird:

$$x = \frac{bc}{c} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}\cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \cos\left[\frac{b}{c} \lg \frac{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v}\right]$$

$$y = \frac{bc}{c} \frac{\sqrt{c^2 - u^2}\cos v}{\sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}} \sin\left[\frac{b}{c} \lg \frac{a \sin v + \sqrt{a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v}}{b \cos v}\right]$$

$$z = \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + \frac{b^2}{c^2} \frac{u^2}{c^2 - u^2}}\, du.$$

Man bestätigt nachträglich leicht die Isometrie der gefundenen Fläche mit dem Ellipsoid durch Berechnung des Linienelements.