Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1919. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1919
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Binäre kubische Formen und Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene.

Von **F. Lindemann.**

Vorgelegt in der Sitzung am 17. Mai 1919.

In seiner bekannten Programmschrift[1]) hatte sich F. Klein auch mit der Darstellung einer binären kubischen Form und ihrer Kovarianten auf der Kugelfläche beschäftigt. Während der Zeit, wo ich in Erlangen mit ihm zusammen arbeitete (1873 und 74), war die Frage nach der invarianten-theoretishen Bedeutung der sogenannten merkwürdigen Punkte des Dreiecks (insbesondere der Brocardschen Punkte) für die kubischen Formen wiederholt Gegenstand unserer Unterhaltung; es schien eine einfache Beantwortung sich nicht zu bieten. Es freut mich, nun endlich die Lösung der Aufgabe in befriedigend einfacher Weise Klein zu seinem siebenzigsten Geburtstage mitteilen zu können.

Es handelt sich erstens um Auffindung der zusammengehörigen Nullpunkte einer Form des Büschels $\varkappa f^2 R + \lambda Q^2$ und zweitens um die Konstruktion der ersten und der zweiten Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf die durch die Ecken des Dreiecks dargestellte binäre kubische Form.

[1]) Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872, abgedruckt in Bd. 43 der Math. Annalen.

§ I. Homogene Koordinaten in der komplexen Ebene.

Bedeuten a_i die Winkel, welche die Normalen zu den Seiten des gegebenen Dreiecks mit der X-Axe bilden, und p_i die Längen der Normalen, so sind die Größen

$$(1) \qquad x_i = -(x\cos a_i + y\sin a_i - p_i) \text{ für } i = 1, 2, 3$$

die Abstände des Punktes x, y von den Seiten des Dreiecks und können als homogene Koordinaten desselben in Anspruch genommen werden. Liegt der Anfangspunkt $x = 0$, $y = 0$ im Innern des Dreiecks, so sind die x_i positiv für einen inneren Punkt. Bei passender Lage des Axensystems sind dann die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 des Dreiecks durch die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{gathered} \pi = \varphi_1 + a_3 - a_2 = \varphi_2 + a_1 + 2\pi - a_3 = \varphi_3 + a_2 - a_1 \\ \varphi_1 = a_2 - a_3 + \pi, \quad \varphi_2 = a_3 - a_1 - \pi, \quad \varphi_3 = a_1 - a_2 + \pi \end{gathered}$$

gegeben. Die Auflösungen der Gleichungen (1) lauten:

$$(3) \qquad x = \frac{A_{11}x_1 + A_{21}x_2 + A_{31}x_3}{A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3}, \quad y = \frac{A_{12}x_1 + A_{22}x_2 + A_{32}x_3}{A_{13}x_1 + A_{23}x_2 + A_{33}x_3},$$

wo nun:

$$\begin{gathered} A_{11} = p_2\sin a_3 - p_3\sin a_2, \quad A_{22} = p_1\cos a_3 - p_3\cos a_1, \\ A_{33} = \sin(a_2 - a_1) = \sin\varphi_3, \\ A_{12} = p_3\cos a_2 - p_2\cos a_3, \quad A_{13} = \sin\varphi_1, \quad A_{23} = \sin\varphi_2, \\ A_{21} = p_3\sin a_1 - p_2\sin a_3, \quad A_{31} = p_3\cos a_1 - p_1\cos a_3, \\ A_{32} = p_2\cos a_3 - p_1\cos a_2. \end{gathered}$$

Setzen wir also, wie im folgenden immer:

$$(4) \qquad s_k = \sin\varphi_k, \quad A_k = e^{ia_k} \text{ für } k = 1, 2, 3; \quad i = \sqrt{-1},$$

so folgt aus (3)

$$(5) \qquad (x + iy)(s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3) = -i \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

wobei die zweite Klammer der linken Seite bekanntlich dem Inhalte des Dreiecks proportional und gleich einer Konstanten ist.

Die komplexen Koordinaten der Ecken des Dreiecks sind folglich:

$$(6)\qquad \begin{aligned} z_1 &= x_1 + i y_1 = -\frac{i}{s_1}(p_2 A_3 - p_3 A_2),\\ z_2 &= x_2 + i y_2 = -\frac{i}{s_2}(p_3 A_1 - p_1 A_3),\\ z_3 &= x_3 + i y_3 = -\frac{i}{s_3}(p_1 A_2 - p_2 A_1). \end{aligned}$$

In Veränderlichen X, Y stellt die Gleichung

$$Z - z = 0 \text{ oder } X + iY - (x + iy) = 0$$

diejenige imaginäre Linie dar, welche den Punkt $x + iy$ mit dem einen der beiden imaginären Kreispunkte verbindet[1]); in homogenen Koordinaten wird diese Gleichung nach (15):

$$(X p A)\, s_x - (x p A)\, s_x = 0,$$

wenn dem Punkte Z der Punkt X_1, X_2, X_3 entspricht und wenn

$$(x p A) = \sum \pm x_1 p_2 A_3 \text{ und } s_x = s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3$$

gesetzt wird. Nun ist identisch:

$$(X p A)\, s_x - (X p x)\, s_A + (X A x)\, s_p - (p A x)\, s_X = 0.$$

Hier ist aber $s_A = 0$, denn nach (5) ist $s_x = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden und A_1, A_2, A_3 sind die Koordinaten des einen der beiden (auf dieser Geraden liegenden) imaginären Kreispunkte. Mittelst der Gleichungen (2) und (4) läßt sich die Gleichung $s_A = 0$ auch leicht direkt bestätigen. Die Gleichung der geraden Linie, welche den imaginären Kreispunkt A mit dem Punkt x verbindet, ist daher:

$$(7)\qquad (X x A) = 0;$$

und für zwei verschiedene Punkte Z, z besteht die Identität:

$$(8)\qquad Z - z = \frac{-i}{s_X\, s_x} \cdot (X x A)\, s_p.$$

[1]) Vgl. meine Darstellung dieser Beziehungen in Bd. II der Vorlesungen über Geometrie nach Clebsch, S. 621 ff., 1891.

Das Doppelverhältnis σ von vier Punkten z, z', z'', z''' der komplexen Ebenen ist bekanntlich

$$\sigma = \frac{z - z''}{z - z'''} \cdot \frac{z' - z'''}{z' - z''} . \tag{9}$$

In homogenen Koordinaten wird dieses Doppelverhältnis nach (8)

$$\sigma = \frac{(x x'' A)}{(x x''' A)} \cdot \frac{(x' x''' A)}{(x' x'' A)} , \tag{10}$$

wenn den Punkten z, z', z'', z''' bzw. die homogenen Koordinaten x_i, x_i', x_i'', x_i''' zukommen.

Besonders ausgezeichnet ist der Fall eines reellen Doppelverhältnisses. Lassen wir die Punkte x', x'', x''' mit den Ecken des Dreiecks, also bzw. mit den Punkten

$$1, 0 0;\ 0, 1, 0;\ 0, 0, 1 \tag{11}$$

zusammenfallen, so wird

$$\sigma = \frac{x_1 A_3 - x_3 A_1}{x_2 A_1 - x_1 A_2} \cdot \frac{- A_2}{A_3} . \tag{12}$$

Soll dasselbe reell sein, so erhält man durch einfache Umformungen die Bedingung:

$$s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1 + s_3 x_1 x_2 = 0;$$

das ist also die Gleichung des dem Dreieck umgeschriebenen Kreises, wie vorauszusehen war.

Ausgezeichnet und für die Gestalt des Dreiecks charakteristisch ist das Doppelverhältnis seiner drei Ecken mit dem unendlich fernen Punkte der komplexen Ebene. Setzen wir in (9) $z = \infty$, so wird nach (5) und (8) das Doppelverhältnis von drei Punkten mit dem unendlich fernen Punkte:

$$\sigma = \frac{z' - z'''}{z' - z''} = \frac{(x' x''' A)}{(x' x'' A)} \cdot \frac{s_{x''}}{s_{x'''}} .$$

Ersetzen wir x', x'', x''' bzw. durch die Ecken (11) des Dreiecks, so wird

$$\begin{aligned} \sigma &= -\frac{s_2}{s_3} e^{(\alpha_2-\alpha_3)i} = \frac{s_2}{s_3} e^{\varphi_1 i}, \\ (13) \qquad 1-\sigma &= \frac{z'''-z''}{z'-z''} = \frac{s_1}{s_2} e^{-\varphi_2 i}, \\ \frac{\sigma}{\sigma-1} &= \frac{z'-z'''}{z''-z'''} = \frac{s_2}{s_1} e^{-\varphi_3 i}. \end{aligned}$$

Ist also eines dieser Doppelverhältnisse reell, so liegen die Ecken des Dreiecks in gerader Linie; ist eines derselben rein imaginär, so ist das Dreieck rechtwinklig; hat eines derselben den absoluten Betrag 1, so ist das Dreieck gleichschenklich; ist eines derselben äquianharmonisch, so ist das Dreieck gleichseitig; hat eines derselben einen negativen reellen Teil, so ist das Dreieck stumpfwinklig.

§ 2. Systeme assoziierter Punkte.

Faßt man die Ecken des Dreiecks als Grundpunkte einer binären Form f dritter Ordnung auf, so ordnen sich alle Punkte der komplexen Ebene in Gruppen zu je sechs, welche die Grundpunkte einer Kovariante $\varkappa R f^2 + \lambda Q^2$ bilden, wo R (in Clebschs Bezeichnungsweise) die Dicriminante, Q die kubische Kovariante von f bezeichnet. Je sechs so zusammengehörige Punkte bilden mit den Grundpunkten (Ecken des Dreiecks) die Doppelverhältnisse

$$\sigma, \ \frac{1}{\sigma}, \ 1-\sigma, \ \frac{1}{1-\sigma}, \ \frac{\sigma}{\sigma-1}, \ \frac{\sigma-1}{\sigma},$$

wenn σ für einen dieser Punkte das betreffende Doppelverhältnis bezeichnet. Wir wollen solche Punkte im Folgenden als einander assoziiert bezeichnen.

Im metrischen Sinne ausgezeichnet (d. h. merkwürdig) sind vor allem die dem unendlich fernen Punkte der komplexen Ebene assoziierten Punkte, deren Aufsuchung uns jetzt beschäftigen soll. Unter Berücksichtigung der Relationen (2) läßt sich die Gleichung (12) in folgender Weise schreiben:

$$\sigma = \frac{x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}}{x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}}. \tag{14}$$

Setzen wir für σ zuerst den reziproken Wert des durch die erste Gleichung (13) definierten Doppelverhältnisses ein, so wird:

$$\frac{s_3}{s_2} e^{-\varphi_1 i} = \frac{x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}}{x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}}$$

oder, indem man die Nenner fortschafft:

$$x_1 [s_3 (c_1 - i s_1) - s_2] + x_2 s_3 [\cos(\varphi_3 - \varphi_1) \\ + i \sin(\varphi_3 - \varphi_1)] - x_3 s_2 (c_2 - i s_2) = 0,$$

wo $c_i = \cos \varphi_i$, also z. B. $s_2 = c_1 s_3 + c_3 s_1$,

also auch:

$$x_1 s_1 c_3 - x_2 s_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + x_3 s_2 c_2 = 0,$$
$$x_1 s_1 s_3 - x_2 s_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) - x_3 s_2^2 = 0,$$

und hieraus ergibt sich:

$$\varrho x_1 = 2 s_2 s_3 c_1, \quad \varrho x_2 = s_2 s_1, \quad \varrho x_3 = s_3 s_1. \tag{15}$$

Ersetzt man die linke Seite von (14) durch den dritten Wert (13), so kommt ebenso:

$$s_2 (x_1 e^{-\varphi_3 i} + x_2) = (x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}) s_1,$$

oder:

$$x_1 s_3 c_2 - x_2 s_2 + x_3 s_1 c_2 = 0,$$
$$x_1 s_3 - x_3 s_1 = 0,$$

also:

$$\varrho x_1 = s_1 s_2, \quad \varrho x_2 = 2 s_3 s_1 c_2, \quad \varrho x_3 = s_3 s_2. \tag{16}$$

Drittens ersetzen wir die linke Seite von (14) durch den zweiten der Werte (13) und finden:

$$(x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) s_1 = s_3 (x_1 e^{\varphi_2 i} + x_3),$$

und hieraus:

$$\varrho x_1 = s_1 s_3, \quad \varrho x_2 = s_2 s_3, \quad \varrho x_3 = 2 s_1 s_2 c_3. \tag{17}$$

Die drei Punkte (15), (16) und (17) liegen bzw. auf den Geraden:

(18) $s_3 x_2 - s_2 x_3 = 0, \quad s_1 x_3 - s_3 x_1 = 0, \quad s_2 x_1 - s_1 x_2 = 0,$

den vierten harmonischen Geraden zu den Tangenten des Umkreises in den Ecken, welche sich bekanntlich im Grebeschen (Lemoineschen) Punkte schneiden. Die gefundenen drei Punkte scheinen sonst nicht weiter beachtet zu sein.

Viertens ersetzen wir die linke Seite von (14) durch den reziproken Wert des dritten Doppelverhältnisses (13) und finden:

$$s_1 (x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) = s_2 (x_1 e^{-\varphi_3 i} - x_3 e^{\varphi_1 i})$$

und hieraus:

$$x_1 s_3 c_2 + x_2 s_1 c_3 + x_3 s_2 c_1 = 0,$$
$$x_1 s_2 s_3 + x_2 s_1 s_3 + x_3 s_2 s_1 = 0,$$

also:

$$(18) \quad \begin{gathered} \varrho x_1 = s_1 s_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1), \quad \varrho x_2 = s_2 s_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \\ \varrho x_3 = s_3 s_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3). \end{gathered}$$

Gehen wir endlich von dem reziproken Werte des zweiten Doppelverhältnisses (13) aus, so ergibt sich

$$s_3 (x_1 e^{\varphi_2 i} - x_2 e^{-\varphi_1 i}) = s_1 (x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i})$$

oder:

$$(19) \quad \begin{gathered} x_1 s_2 c_3 + x_2 s_3 c_1 + x_3 s_1 c_2 = 0, \\ x_1 s_2 s_3 + x_2 s_3 s_1 + x_3 s_1 s_2 = 0, \end{gathered}$$

also:

$$(20) \quad \begin{gathered} \varrho x_1 = s_1 s_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad \varrho x_2 = s_2 s_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_3), \\ \varrho x_3 = s_3 s_2 \sin(\varphi_3 - \varphi_1). \end{gathered}$$

Die beiden Punkte (18) und (20) liegen auf der Lemoineschen Geraden, d. h. auf der Kordalen des Büschels von Kreisen, welche die drei Apollonischen Kreise orthogonal schneiden[1]). Auf ihre sonstige Bedeutung kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

---

[1]) Vgl. hier und im folgenden meine Darstellung der Dreieckgeometrie in den „Vorlesungen über Geometrie nach Clebsch", Bd. I, 2. Aufl., S. 312 ff., 1906. Die dort gemachten Literaturangaben seien ergänzt durch den Hinweis auf die Königsberger Inauguraldissertation von Berkhan: Zur projektivischen Behandlung der Dreieckslehre, Leipzig 1905.

§ 3. Die dem Mittelpunkte des Umkreises assoziierten Punkte.

Metrisch ausgezeichnet sind ferner diejenigen sechs einander assoziierten Punkte, welche mit den Ecken des Dreiecks Doppelverhältnisse bilden, die zu den im vorigen Paragraphen betrachteten Doppelverhältnissen konjugiert imaginär sind. Bekanntlich haben zwei Punkte konjugiert imaginäre Doppelverhältnisse, wenn sie auseinander durch eine Transformation mit reziproken Radien an dem Umkreise des Dreiecks hervorgehen.

Dem unendlich fernen Punkte entspricht so der Mittelpunkt des Umkreises; die homogenen Koordinaten des letztern sind bekanntlich c_1, c_2, c_3; und aus (14) ergibt sich in der Tat:

$$\frac{c_1 + c_3 e^{-\varphi_2 i}}{c_1 + c_2 e^{\varphi_3 i}} = \frac{c_1 + c_3(c_2 - i s_2)}{c_1 + c_2(c_3 + i s_3)} = \frac{s_2}{s_3} e^{-\varphi_1 i},$$

d. h. konjugiert imaginär zu dem ersten Werte (13). Der Punkt x, welcher dem reziproken Werte entspricht, ergibt sich aus

$$s_2(x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}) = s_3 e^{\varphi_1 i}(x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) = s_3(x_1 e^{\varphi_1 i} - x_2 e^{-\varphi_2 i})$$

oder:

$$x_1[s_2 - s_3 c_1 - i s_3 s_1] + x_2(s_3 c_2 - i s_3 s_2) + x_3(s_2 c_2 - i s_2^2) = 0,$$

also:
$$x_1 s_1 c_3 + x_2 s_3 c_2 + x_3 s_2 c_2 = 0,$$
$$x_1 s_1 s_3 + x_2 s_3 s_2 + x_3 s_2^2 = 0$$

und somit:

(21) $$\varrho x_1 = 0, \quad \varrho x_2 = s_2, \quad \varrho_3 = -s_3.$$

Der zum dritten Werte (13) konjugierte Wert führt ebenso zu den Gleichungen

$$x_1 s_3 c_1 + x_2 s_2 c_3 + x_3 s_1 c_1 = 0,$$
$$x_1 s_1 s_3 + x_2 s_2 s_3 + x_3 s_1^2 = 0, \text{ also:}$$

(22) $$\varrho x_1 = s_1, \quad \varrho x_2 = 0, \quad \varrho x_3 = -s_3.$$

Das zum zweiten Werte (13) konjugierte Doppelverhältnis ergibt:

$$s_1(x_1 e^{\varphi_2 i} - x_2 e^{-\varphi_1 i}) = s_3(x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}),$$

oder: $$x_1(s_3 - s_1 c_2) + x_2 s_1 c_1 + x_3 s_3 c_2 = 0,$$

$$x_1 s_1 s_2 + x_2 s_1^2 + x_3 s_2 s_3 = 0, \text{ also:}$$

(23) $$\varrho x_1 = s_1, \quad \varrho x_2 = -s_2, \quad \varrho x_3 = 0.$$

Nehmen wir endlich den konjugierten Wert zum reziproken Werte des zweiten Doppelverhältnisses (13), so wird:

$$s_3(x_1 + x_2 e^{\varphi_3 i}) = s_1(x_1 e^{\varphi_2 i} + x_3),$$

oder: $$x_1(s_3 - s_1 c_2) + x_2 s_3 c_3 - x_3 s_1 = 0,$$

$$x_1 s_1 s_2 - x_2 s_3^2 = 0,$$

und hieraus

(24) $$\varrho x_1 = s_1 s_3^2, \quad \varrho x_2 = s_2 s_1^2, \quad \varrho x_3 = s_3 s_2^2$$

und ebenso ergibt der konjugierte Wert des reziproken Wertes zum dritten Doppelverhältnisse (13):

$$\frac{s_1}{s_2} e^{-\varphi_3 i} = \frac{x_1 + x_3 e^{-\varphi_2 i}}{x_1 + x_2 e^{\varphi_2 i}}$$

und somit

(25) $$\varrho x_1 = s_1 s_2^2, \quad \varrho x_2 = s_2 s_3^2, \quad \varrho x_3 = s_3 s_1^2.$$

Die Werte (21), (22) und (23) sind bekanntlich die Koordinaten der Mittelpunkte der drei Apollonischen Kreise, und in (24), (25) haben wir die Koordinaten der beiden Brocardschen Punkte gefunden[1]). Diese Punkte erscheinen also als simultane Kovarianten der Ecken des Dreiecks und des unendlich fernen Punktes.

Dem Mittelpunkt des Umkreises sind daher in obigem Sinne assoziiert: die beiden Brocardschen Punkte und die Mittelpunkte der drei Apollonischen Kreise.

Damit ist auch die Bedeutung der im vorigen Paragraphen gefundenen ausgezeichneten Punkte klar gestellt: Die fünf Punkte (15), (16), (17), (18) und (20), die dem unendlich fernen Punkte assoziert sind, findet man durch eine Transformation reziproker Radien in Bezug auf den

[1]) Vgl. „Vorlesungen", a. a. O., S. 318 und S. 322 f.

Umkreis aus den Zentren der drei Apollonischen Kreise und aus den beiden Brocardschen Punkten.

Beiläufig ergibt sich hier der Satz: Der Kreis, welcher durch diese Transformation der reziproken Radien aus der Lemoineschen Geraden entsteht, geht durch die beiden Brocardschen Punkte.

Da ferner die drei Punkte (21), (22), (23) auf der Lemoineschen Geraden liegen, so folgt weiter:

Die drei dem unendlich fernen Punkte assoziierten Punkte (15), (16), (17) liegen auf dem Kreise, welcher aus der Lemoineschen Geraden durch die erwähnte Transformation hervorgeht, sind also Schnittpunkte dieses Kreises mit den drei Kreisen, welche man mittels derselben Transformation aus den Seiten des Grunddreiecks erhält, und zugleich Schnittpunkte dieses Kreises mit den Linien (18).

Die einem beliebigen Punkte der Ebene assoziierten Punkte lassen sich nun leicht finden, indem man den Mittelpunkt des Umkreises durch eine die Grundform f ungeändert lassende lineare Transformation an eine beliebige Stelle der Ebene bringt.

Die hier dargelegten Beziehungen kann man auch dahin aussprechen, daß die sechs einander assoziierten Punkte sich untereinander vertauschen, wenn man durch lineare Transformation der Variabeln z die Ecken des Dreiecks ineinander über-

---

[1]) Das Doppelverhältnis von vier Punkten bestimmt die Gestalt des Fußpunktdreiecks eines dieser Punkte in Bezug auf das Dreieck der drei anderen. Die nahe Beziehung zwischen dem Zentrum des Umkreises und den beiden Brocardschen Punkten macht sich deshalb auch bei Untersuchung der Fußpunktdreiecke bemerkbar; vgl. Schick, Isogonalzentrik und Invariantentheorie, diese Sitzungsberichte, Bd. 30, 1900, S. 259 f.; für den Fall eines gleichseitigen Dreiecks bemerkt sie auch Godt: Über einige merkwürdige Punkte des Dreiecks, II, Programm des Katharineums zu Lübeck, 1903. Man kann allerdings jedes Dreieck in ein gleichseitiges transformieren (wie es auch Klein in seinem Programm von 1872 tut), dadurch legt man aber das Doppelverhältnis des unendlich fernen Punktes als ein äquianharmonisches fest und verdeckt die allgemeinen Beziehungen.

führt. Allen sechs Punkten kommen also im Sinne der Invariantentheorie wesentlich die gleichen Eigenschaften zu. Hieraus ergibt sich die Konstruktion der einem beliebigen Punkte P assoziierten fünf Punkte in folgender Weise:

Die Ecken des Dreiecks seien mit E_1, E_2, E_3 bezeichnet. Man lege dann den Kreis $P - E_1 - E_2$ durch P, E_1 und E_2, ebenso den Kreis $P - E_2 - E_3$ und den Kreis $P - E_3 - E_1$; ferner konstruiere man einen Kreis K_1, der durch E_2 und E_3 geht und $P - E_3 - E_1$ in E_3 berührt, dann einen Kreis K_2 durch E_3 und E_1, der $P - E_1 - E_2$ in E_1 berührt, und einen Kreis K_3 durch E_1 und E_2, den $P - E_2 - E_3$ in E_2 berührt; diese Kreise K_1, K_2, K_3 schneiden sich dann in einem der fünf zu P assoziierten Punkte, und zwar in demjenigen, welcher mit E_1, E_2, E_3 das Doppelverhältnis $(1 - a)^{-1}$, oder in demjenigen, der mit E_1, E_2, E_3 das Doppelverhältnis $(a - 1)\,a^{-1}$ bildet, wenn a dem Doppelverhältnisse der Punkte P, E_1, E_2, E_3 konjugiert ist. Die anderen drei assoziierten Punkte ergeben sich dann leicht.

Legen wir z. B. P in einen Brocardschen Punkt, etwa in den Punkt (24) und ist σ der zu dem Doppelverhältnisse des unendlich fernen Punktes konjugierte Wert (d. h. gleich dem Doppelverhältnisse des Zentrums des Umkreises), so ist nach obigem $a = (1 - \sigma)^{-1}$, also $(1 - a)^{-1} = (\sigma - 1)\,\sigma^{-1}$; d. h. die konstruierten drei Kreise schneiden sich in dem andern Brocardschen Punkte. Wählt man dagegen die Konstruktion der Kreise K_1, K_2, K_3 von P aus im anderen Sinne, so wird $(a - 1)\,a^{-1} = (\sigma - 1)\,\sigma^{-1}$, also $a = \sigma$, d. h. und die Kreise arten aus in die Seiten des Dreiecks.

§ 4. Die lineare Polare eines Punktes.

Bezeichnen wir die Grundpunkte der kubischen Form f wieder mit z', z'', z''', so genügt der Pol ζ eines Punktes z der Gleichung:

$$(\zeta - z')(z - z'')(z - z''') + (z - z')(\zeta - z'')(z - z''') + (z - z')(z - z'')(\zeta - z''') = 0. \tag{26}$$

Kommen dem Punkte z die homogenen Koordinaten x_i, dem Punkte ζ die Koordinaten ξ_i zu, so wird diese Gleichung infolge (8):

$$
\begin{aligned}
&(\xi_3 A_2 - \xi_2 A_3)(x_1 A_3 - x_3 A_1)(x_2 A_1 - x_1 A_2) \\
(27)\quad &+ (x_3 A_2 - x_2 A_3)(\xi_1 A_3 - \xi_3 A_1)(x_2 A_1 - x_1 A_2) \\
&+ (x_3 A_2 - x_2 A_3)(x_1 A_3 - x_3 A_1)(\xi_2 A_1 - \xi_1 A_2) = 0.
\end{aligned}
$$

Wir legen den Punkt z in den unendlich fernen Punkt, dann wird Gleichung (26):

$$(\zeta - z') + (\zeta - z'') + (\zeta - z''') = 0,$$

woraus unmittelbar hervorgeht, daß der lineare Pol des unendlich fernen Punktes mit dem Schnitte der Mittellinien zusammenfällt. Es wird dies durch folgende Rechnung bestätigt: Zufolge (27) ist, wenn z', z'', z''' wieder bzw. in den Ecken 1, 0, 0; 0, 1, 0 und 0, 0, 1 liegen:

$$
\begin{aligned}
s_2 s_3 (\xi_3 A_2 - \xi_2 A_3) + s_3 s_1 (\xi_1 A_3 - \xi_3 A_1) \\
+ s_1 s_2 (\xi_2 A_1 - \xi_1 A_2) = 0
\end{aligned}
$$

oder:

$$
\begin{aligned}
- s_2 s_3 (\xi_3 e^{\varphi_1 i} + \xi_2) \\
+ s_3 s_1 (\xi_1 + \xi_3 e^{-\varphi_2 i}) - s_1 s_2 (\xi_2 e^{-\varphi_2 i} - \xi_1 e^{\varphi_1 i}) = 0;
\end{aligned}
$$

diese Gleichung zerfällt in die beiden:

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 s_1 (s_3 + s_2 c_1) - \xi_2 s_2 (s_3 + s_1 c_2) - \xi_3 s_3 (s_2 c_1 - s_1 c_2) = 0 \\
&\xi_1 s_1^2 s_2 + \xi_2 s_2^2 s_1 - 2 \xi_3 s_1 s_2 s_3 = 0
\end{aligned}
$$

und hieraus ergeben sich die bekannten Koordinaten des Schnittpunktes der Mittellinien:

$$(28)\qquad \varrho \xi_1 = s_2 s_3, \quad \varrho \xi_2 = s_3 s_1, \quad \varrho \xi_3 = s_1 s_2.$$

Indem man den unendlich fernen Punkt durch lineare Transformation an eine beliebige andere Stelle P bringt, ergibt sich folgende allgemeine Konstruktion der linearen Polare von P:

Man lege durch P und je zwei Ecken des Dreiecks drei Kreise K_1, K_2, K_3; suche auf jedem den vierten harmonischen Punkt von P in Bezug auf die beiden Ecken, wodurch man drei Punkte R_1, R_2, R_3 findet. Durch P, R_i und die i^{te} Ecke lege man einen Kreis K_i'. Diese drei Kreise K_1', K_2', K_3' schneiden sich in einem weiteren Punkte, und dieser stellt die lineare Polare von P dar.

Die Berechnung der linearen Polare anderer ausgezeichneter Punkte scheint nicht zu einfachen Resultaten zu führen. Für den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises (d. i. den Punkt 1, 1, 1) findet man z. B.

$$\varrho\,\xi_1 = c_2 - c_3, \quad \varrho\,\xi_2 = c_3 - c_1, \quad \varrho\,\xi_3 = c_1 - c_2.$$

Der Punkt liegt auf der Chordale ($\sum c_i x_i = 0$) des Kreisbüschels, das durch den Feuerbachschen Kreis und den Umkreis bestimmt wird.

Für die lineare Polare des Lemoineschen Punktes findet man:

$$\varrho\,\xi_1 s_1 = s_1^4 - s_2^2 s_3^2, \quad \varrho\,\xi_2 s_2 = s_2^4 - s_3^2 s_1^2, \quad \varrho\,\xi_3 s_3 = s_3^4 - s_1^2 s_2^2.$$

Es ist dies der Gegenbrennpunkt des Punktes, welcher der Perspektivitäts-Axe[1]) des Brocardschen und des Grunddreiecks als Pol in Bezug auf den imaginären Kegelschnitt $\sum x_i^2 = 0$ entspricht.

§ 5. Die quadratische Polare eines Punktes.

Ist ζ der gegebene Pol, so werden die beiden Punkte der quadratischen Polare durch die in z quadratische Gleichung (26) gegeben, oder in homogenen Koordinaten durch die Gleichung (27). Letztere stellt in Variabeln x_i das Linienpaar dar, das die besagten beiden Punkte der ersten Polare mit einem der imaginären Kreispunkte verbindet.

Wir wählen als Pol ζ den Schnittpunkt der Mittellinien; dann fällt in (26) das in z quadratische Glied aus und es bleibt eine lineare Gleichung, welche denjenigen Punkt bestimmt, der mit dem unendlich fernen Punkte zusammen die quadratische Polare von ζ darstellt; es ergibt sich indessen so kein übersichtliches Resultat.

[1]) Vgl. „Vorlesungen", a. a. O., S. 323.

Die homogene Gleichung (27) wird hier:

$$\begin{aligned}&(x_2 e^{\alpha_3 i} - x_3 e^{\alpha_2 i})(x_3 e^{\alpha_1 i} - x_1 e^{\alpha_3 i})(s_2 e^{\alpha_2 i} - s_1 e^{\alpha_1 i}) s_3 \\ &+ (x_3 e^{\alpha_1 i} - x_1 e^{\alpha_3 i})(x_1 e^{\alpha_2 i} - x_2 e^{\alpha_1 i})(s_3 e^{\alpha_3 i} - s_2 e^{\alpha_2 i}) s_1 \\ &+ (x_1 e^{\alpha_2 i} - x_2 e^{\alpha_1 i})(x_2 e^{\alpha_3 i} - x_3 e^{\alpha_2 i})(s_1 e^{\alpha_2 i} - s_3 e^{\alpha_3 i}) s_2 = 0.\end{aligned}$$

Die linke Seite muß in zwei lineare Faktoren zerfallen, deren einer bekannt ist, denn der eine muß, gleich Null gesetzt, die unendlich ferne Gerade darstellen. Die linke Seite der letzten Gleichung ist daher von der Form

$$(s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3)(u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3).$$

Vergleicht man beiderseits die Koeffizienten von x_1^2, x_2^2, x_3^2, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u_1 &= -e^{(\alpha_2+\alpha_3) i}(s_3 e^{\alpha_3 i} - s_2 e^{\alpha_2 i}) \\ u_2 &= -e^{(\alpha_3+\alpha_2) i}(s_1 e^{\alpha_1 i} - s_3 e^{\alpha_3 i}) \\ u_3 &= -e^{(\alpha_1+\alpha_2) i}(s_2 e^{\alpha_2 i} - s_1 e^{\alpha_1 i}).\end{aligned}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} s_3 e^{\alpha_3 i} - s_2 e^{\alpha_2 i} &= \sin\varphi_3 \cos\alpha_3 - \sin\varphi_2 \cos\alpha_2 \\ &\quad + i(\sin\varphi_3 \sin\alpha_3 - \sin\varphi_2 \sin\alpha_2)\end{aligned}$$

und hierin:

$$\begin{aligned} \sin\varphi_3 \cos\alpha_3 - \sin\varphi_2 \cos\alpha_2 &= (\sin\alpha_2 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2 \sin\alpha_1)\cos\alpha_3 \\ &\quad - (\sin\alpha_3 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_3 \sin\alpha_1)\cos\alpha_2 \\ &= \cos\alpha_1 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_3) = -\cos\alpha_1 \cdot s_1 \\ \sin\varphi_3 \sin\alpha_3 - \sin\varphi_2 \sin\alpha_2 &= -\sin\alpha_1 \cdot s_1,\end{aligned}$$

also:

$$s_3 e^{\alpha_3 i} - s_2 e^{\alpha_2 i} = -s_1 \cdot e^{\alpha_1 i}.$$

Durch analoge Umformungen findet man:

$$\varrho u_1 = s_1, \quad \varrho u_2 = -s_2 e^{2\varphi_1 i}, \quad \varrho u_3 = -s_3 e^{-2\varphi_2 i}.$$

Der gesuchte Punkt x genügt also den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 s_1 - x_2 s_2 (c_3^2 - s_3^2) - x_3 s_3 (c_2^2 - s_2^2) &= 0, \\ -2 x_2 s_2 s_3 c_3 + 2 x_3 s_2 s_3 c_2 &= 0; \end{aligned} \tag{29}$$

es wird:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= c_2 s_2 (c_3^2 - s_3^2) + c_3 s_3 (c_2^2 - s_2^2) \\ &= \sin(\varphi_2 + \varphi_3) \cdot \cos(\varphi_2 + \varphi_3) = s_1 c_1 \\ \varrho x_2 &= s_1 c_2, \quad \varrho x_3 = s_1 c_3.\end{aligned}$$

Die quadratische Polare des Schnittpunktes der Mittellinien besteht demnach aus dem unendlich fernen Punkte und dem Mittelpunkte des Umkreises. Hieraus folgt allgemein:

Die beiden Punkte der quadratischen Polare eines beliebigen Punktes liegen invers in Bezug auf den Umkreis.

Außerdem sind sie bekanntlich harmonisch zu den beiden isodynamischen Zentren (Schnittpunkten der drei Apollonischen Kreise), welche die Nullpunkte der Hesseschen Kovariante $\varDelta$ darstellen. Um ihre Konstruktion zu bewerkstelligen, gehen wir davon aus, daß der Schnittpunkt der Mittellinien auf der Eulerschen Geraden (die auch den Höhenschnittpunkt und das Zentrum des Umkreises enthält) liegt und daß diese Gerade der Ort der Mittelpunkte aller Kreise des Büschels

$$s_1 x_2 x_3 + s_2 x_3 x_1 + s_3 x_1 x_2 + \lambda (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3)(s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3) = 0 \tag{30}$$

ist (mit der gemeinsamen Chordale $\sum c_i x_i = 0$). Diese Gerade schneidet also alle Kreise des Büschels und insbesondere den Umkreis ($\lambda = 0$) und den Polarkreis ($\lambda = 1$) des Dreiecks orthogonal. Macht man eine beliebige lineare Transformation von z, welche die binäre kubische Form (d. h. die Ecken des Dreiecks) ungeändert läßt, so bleiben die beiden erwähnten Kreise des Büschels ungeändert. Die Eulersche Gerade geht also in denjenigen Kreis K über, welcher diese beiden Kreise orthogonal schneidet und durch den beliebigen Punkt P geht, in welchen der Schnittpunkt der Mittellinien übergeführt werden mag. Auf letzterem Kreise liegen die beiden gesuchten Punkte der quadratischen Polare von M, und zwar invers zum Umkreise. Es sind also die beiden Punkte, welche gleichzeitig harmonisch liegen zu den Schnittpunkten des Kreises K mit dem Umkreise und zu den beiden isodynamischen Zentren (Punkten $\varDelta = 0$), und als solche sind sie in bekannter Weise zu konstruieren.