Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft II

Mai- bis Julisitzung.

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Systeme von Potentialflächen und Stromflächen.

Von **Max Lagally.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 13. Juni 1914.

Einleitung.

Die Stromlinien einer räumlichen Potentialströmung lassen sich unter Einführung einer willkürlichen Funktion zweier Veränderlicher zu ∞^1 Stromflächen zusammenfassen, die auf den Flächen konstanten Geschwindigkeitspotentials senkrecht stehen. Greift man zwei solche Scharen von Stromflächen $v =$ const. und $w =$ const. heraus, so können sie mit den Potentialflächen $u =$ const. zusammen als räumliches Koordinatensystem aufgefaßt werden, in dem die Flächen v und w im allgemeinen wechselnde und von 90^0 verschiedene Winkel miteinander bilden, während die Flächen u und v ebenso wie die Flächen u und w aufeinander senkrecht stehen. Anderseits genügt u bei richtiger Verteilung des Parameters auf den Potentialflächen der Laplaceschen Gleichung

$$\triangle_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

v und w dagegen lassen sich als zwei zunächst voneinander unabhängige „Stromfunktionen" betrachten, ähnlich wie Stokes[1])

[1]) Stokes, On the Steady Motion of Incompressible Fluids. Transactions of the Cambridge Philosophical society, Vol. VIII, 1842, p. 439. Stokes, Mathematical and Physical Papers, Vol. I, p. 1.

bei der ebenen Strömung und bei der rotationssymmetrischen Meridionalströmung eine Stromfunktion eingeführt hat, die eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung erfüllt. Jede Stromfunktion des allgemeinen räumlichen Problems genügt nun einer ähnlichen Differentialgleichung von höherer als zweiter Ordnung, die sich durch Einführung eines partikulären Integrals auf eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung reduziert, welche die von Stokes angegebenen Differentialgleichungen als spezielle Fälle in sich enthält. Eine besondere Vereinfachung läßt sich durch geeignete Auswahl der Funktionen v und w erzielen; nimmt man die eine der beiden Scharen von Stromflächen v willkürlich an, so kann man die zweite w immer so wählen, daß

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0$$

ist. Zwei solche Scharen von Stromflächen nenne ich ein *normiertes System*. Die geometrische Bedeutung der normierten Systeme liegt darin, daß die beiden Scharen von Stromflächen zusammen mit den Potentialflächen den von Flüssigkeit erfüllten Raum in ∞^3 Zellen teilen, deren Querschnitt der Länge proportional ist[1]). Dieser Satz gibt eine Verallgemeinerung der bekannten Einteilung der Ebene durch Potential- und Stromkurven in „unendlich kleine Quadrate". Das Potential selbst hängt dann mit den beiden Scharen von Stromflächen durch die Gleichung

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w$$

zusammen, die die in der Ebene geltenden Beziehungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

ebenso wie ähnliche für die Meridionalströmung geltende Gleichungen als spezielle Fälle umfaßt.

---

[1]) Eine geometrische Ableitung dieses Satzes und seine Anwendung auf die Dynamik der Strömungen gebe ich in einer Abhandlung über „Dynamische und geometrische Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung", die demnächst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik (Bd. 63, Heft 4) erscheinen wird.

Betrachtet man die 3 Flächenscharen u, v, w als räumliches Koordinatensystem, so ergibt sich durch Transformation der Gleichung zwischen dem Potential und den beiden normierten Stromfunktionen die neue Gleichung

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v} \times \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial w},$$

wo

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{i}\, x(u, v, w) + \mathfrak{j}\, y(u, v, w) + \mathfrak{k}\, z(u, v, w)$$

der Ortsvektor ist. Diese Gleichung enthält ebenfalls einige bekannte Formeln für einfache Strömungen als spezielle Fälle. Da sie in drei skalare Gleichungen zerfällt, müssen die Bedingungen der gemeinsamen Integrabilität untersucht werden. Es zeigt sich, daß $\mathfrak{x}$ einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung genügen muß, die in dem Fall, daß auch die Stromflächen aufeinander senkrecht stehen, als die von Jacobi aufgestellte Transformierte der Laplaceschen Gleichung erkannt wird. Die Vermutung, daß auch in dem allgemeinen Fall die Integrabilitätsbedingung die gleiche Bedeutung hat, wird durch die Ausführung der Transformation der Laplaceschen Gleichung auf ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem bestätigt. Die transformierte Gleichung erscheint dabei in einfacher und übersichtlicher Gestalt als Determinante 4. Ordnung.

In der Darstellung tritt neben den gewöhnlichen Vektoroperationen auch die unbestimmte Produktbildung auf; insbesonders kommt das unbestimmte Quadrat des symbolischen Vektors

$$\triangle = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

als symbolische Dyade in ausgedehntem Maß zur Verwendung. Wenn ich mich von dem in Deutschland herrschenden Gebrauch abweichend für die Gibbssche Beziehungsweise[1]) entschlossen habe, so liegt der Grund in der Schwierigkeit, eine andere Be-

[1]) Vector Analysis. Founded upon the lectures of J. W. Gibbs by E. B. Wilson. New York, London 1901. *Im folgenden als „Gibbs" zitiert.*

zeichnungsweise für Dyaden- und Triadensummen, insbesondere mit symbolischen Operatoren, konsequent, kurz und eindeutig durchzubilden. Um die Verwendbarkeit der angewandten Methoden an einem weiteren Beispiel zu zeigen, habe ich anhangsweise damit eine kurze Ableitung der Cayley-Darbouxschen Gleichung gegeben. Diese Gleichung, die Bedingung dafür, daß eine Flächenschar einem dreifachen Orthogonalsystem angehört, hängt mit den vorausgegangenen Untersuchungen nur insofern zusammen, als darin die Frage nach den dreifachen Orthogonalsystemen von Potentialflächen aufgeworfen und mit gewissen Einschränkungen auch beantwortet wurde.

I. Bedingung für die Existenz einer zu zwei gegebenen Flächenscharen orthogonalen Flächenschar.

Wenn zwei Flächenscharen

$$v(x y z) = \text{const} \quad \text{und} \quad w(x y z) = \text{const.}$$

eine gemeinsame Schar von Orthogonalflächen $u(x y z) = \text{const.}$ haben, bestehen gleichzeitig die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} = 0 = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0 = \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} w = 0.$$

Aus ihnen lassen sich die partiellen Differentialquotienten von u durch die von v und w ausdrücken:

$$\frac{\partial u}{\partial x} : \frac{\partial u}{\partial y} : \frac{\partial u}{\partial z} = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{matrix} \right\|.$$

Führt man Vektoren ein und bezeichnet mit $\varrho(x y z)$ einen skalaren Proportionalitätsfaktor, so ist

$$\mathfrak{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \varrho(x y z) \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}$$

oder

1) $$\operatorname{grad} u = \varrho(x\,y\,z) \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w.$$

Die Identität
$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} u = 0$$

liefert die Integrabilitätsbedingung der Gleichung (1) in der Form

2) $$\operatorname{curl} \{\varrho \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w\} = 0.$$

Das Bestehen dieser Gleichung (2) ist die Bedingung dafür, daß die beiden Flächenscharen $v =$ const. und $w =$ const. eine gemeinsame Schar von Orthogonalflächen besitzen.

Zur weiteren Umformung der Gleichung (2) ist es von Vorteil, ∇, $\nabla\cdot$ und $\nabla\times$ an Stelle von grad, div und curl einzuführen, wobei ∇ den symbolischen Vektor

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

der Punkt die skalare und das Andreas-Kreuz die vektorielle Produktbildung bedeutet. Dann wird (2)

2a) $$\nabla \times [\varrho \nabla v \times \nabla w] = 0$$

und durch Ausrechnen ergibt sich

2b) $$\nabla\varrho \times [\nabla v \times \nabla w] + \varrho \nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = 0$$ [1]

oder

$$\operatorname{grad}\varrho \times [\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] + \varrho \operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0.$$

Die beiden dreifachen Vektorprodukte lassen sich noch umformen, und zwar ist

$$\nabla\varrho \times [\nabla v \times \nabla w] = (\nabla\varrho\cdot\nabla w)\nabla v - (\nabla\varrho\cdot\nabla v)\nabla w$$

oder

$$\operatorname{grad}\varrho \times [\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w]$$
$$= (\operatorname{grad}\varrho\cdot\operatorname{grad} w)\operatorname{grad} v - (\operatorname{grad}\varrho\cdot\operatorname{grad} v)\operatorname{grad} w,$$

---

[1] Gibbs, S. 157.

ferner das symbolische dreifache Produkt

$$\nabla \times [\nabla v \times \nabla w]$$
$$= \nabla\nabla v \cdot \nabla w - \nabla\nabla w \cdot \nabla v + \nabla \cdot \nabla w \nabla v - \nabla \cdot \nabla v \nabla w\text{[1]}.$$

Dabei ist

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \triangle_2$$

der Laplacesche Operator, dagegen

$$\nabla\nabla = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \mathfrak{i}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \mathfrak{i}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \mathfrak{j}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} + \mathfrak{j}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$
$$+ \mathfrak{j}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \mathfrak{k}\mathfrak{i}\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} + \mathfrak{k}\mathfrak{j}\frac{\partial^2}{\partial z \partial y} + \mathfrak{k}\mathfrak{k}\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$$

eine symbolische Dyadensumme[2]), also

$$\nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = \nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v + \triangle_2 w \nabla v - \triangle_2 v \nabla w$$

oder

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w]$$
$$= \nabla^2 v \cdot \operatorname{grad} w - \nabla^2 w \cdot \operatorname{grad} v + \triangle_2 w \operatorname{grad} v - \triangle_2 v \operatorname{grad} w.$$

Somit läßt sich die Existenzbedingung einer Schar von gemeinsamen Orthogonalflächen in die folgende Form bringen:

2c)
$$\begin{gathered}(\nabla \varrho \cdot \nabla w)\nabla v - (\nabla \varrho \cdot \nabla v)\nabla w \\ + \varrho\{\nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v + \triangle_2 w \nabla v - \triangle_2 v \nabla w\} = 0.\end{gathered}$$

Bei der Untersuchung zweier gegebenen Flächenscharen v und w auf die Existenz einer gemeinsamen Schar von Orthogonalflächen ist über den Faktor ϱ von vornherein nichts bekannt; es empfiehlt sich daher, aus den drei skalaren Glei-

---

[1]) Gibbs S. 407.

[2]) Eine symbolische Triadensumme

$$\nabla^3 = \mathfrak{i}\mathfrak{i}\mathfrak{i}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \mathfrak{i}\mathfrak{i}\mathfrak{j}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + \mathfrak{i}\mathfrak{i}\mathfrak{k}\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z} + \cdots$$

kommt später zur Verwendung.

chungen, in welche die Vektorgleichung (2) zerfällt, ϱ samt seinen Differentialquotienten zu eliminieren. Dies gelingt am einfachsten durch skalare Multiplikation von (2 b) mit $[\nabla v \times \nabla w]$; hiebei verschwindet der erste Summand identisch und es bleibt nur

$$[\nabla v \times \nabla w] \cdot \nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = 0 \tag{3}$$

oder

$$[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] \cdot \operatorname{curl} [\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0 .$$

Multipliziert man (2 c) mit dem gleichen Faktor $[\nabla v \times \nabla w]$, so verschwinden die beiden Produkte

$$\nabla v \cdot [\nabla v \times \nabla w] \qquad \text{und} \qquad \nabla w \cdot [\nabla v \times \nabla w]$$

identisch und es ergibt sich

$$\{\nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v\} \cdot [\nabla v \times \nabla w] = 0 . \tag{3 a}$$

Diese Gleichung ist die einfachste Form der Bedingung für das Vorhandensein einer gemeinsamen Schar von Orthogonalflächen.

2. Implizite Darstellung der Potential- und Stromflächen.

Sollen die Orthogonalflächen u Potentialflächen, die Flächen v und w also Stromflächen und ihre Schnittkurven Stromlinien sein, so muß u der Gleichung

$$\triangle_2 u = 0$$

oder

$$\nabla \cdot \nabla u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0$$

genügen.

Aus (1) folgt dann die Gleichung

$$\operatorname{div} \{\varrho \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w\} = 0 \tag{4}$$

oder

$$\nabla \cdot \{\varrho \nabla v \times \nabla w\} = 0 ,$$

die neben (2) noch bestehen muß. Durch Ausrechnen des symbolischen Produktes ergibt sich

$$\nabla \varrho \cdot \nabla v \times \nabla w + \varrho \nabla \cdot [\nabla v \times \nabla w] = 0\,^{1}).$$

Nun ist

$$\nabla \cdot [\nabla v \times \nabla w] = \nabla w \cdot \nabla \times \nabla v - \nabla v \cdot \nabla \times \nabla w = 0\,^{1}),$$

weil

$$\nabla \times \nabla v = 0 \qquad \text{und} \qquad \nabla \times \nabla w = 0$$

ist; also geht (4) über in

$$\text{4 a)} \qquad \nabla \varrho \cdot \nabla v \times \nabla w = 0$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varrho}{\partial x} & \frac{\partial \varrho}{\partial y} & \frac{\partial \varrho}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Das Verschwinden dieser Funktionaldeterminante sagt aus, daß ϱ als Funktion $\varrho(v, w)$ von v und w allein zu betrachten ist.

Besteht also eine Gleichung

$$\operatorname{grad} u = \varrho \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w,$$

so ist u ein Potential, wenn ϱ eine Funktion von v und w allein ist. Umgekehrt kann der Gradient eines jeden Potentials in dieser Weise ausgedrückt werden.

$$\text{5)} \qquad \begin{aligned} \nabla u &= \varrho(v, w) \nabla v \times \nabla w \\ \operatorname{grad} u &= \varrho(v, w) \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w. \end{aligned}$$

Es sei für den Augenblick mit w' eine Funktion von v und w bezeichnet. Dann ist

$$\operatorname{grad} w' = \frac{\partial w'}{\partial v} \operatorname{grad} v + \frac{\partial w'}{\partial w} \operatorname{grad} w$$

$$\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w' = \frac{\partial w'}{\partial w} \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w.$$

---

1) Gibbs, S. 157.

Durch Einführung von w' läßt sich also $\operatorname{grad} u$ in folgende Form bringen:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\varrho(v, w)}{\dfrac{\partial w'}{\partial w}} \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w'.$$

Durch geeignete Wahl der Funktion w' kann man dem Faktor $\dfrac{\varrho}{\dfrac{\partial w'}{\partial w}}$ den Wert 1 geben; hiezu hat man nur

$$w' = \int \varrho \, dw + \Phi(v)$$

zu setzen, wo $\Phi(v)$ eine willkürliche Funktion von v bedeutet. Läßt man nun den Strich (') wieder weg, so gilt die Gleichung

5)
$$\nabla u = \nabla v \times \nabla w$$
$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w,$$

ausführlich geschrieben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial z} & \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} & \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

In diese einfache Form (5) läßt sich der Gradient eines jeden Potentials u bringen. v und w sind zwei Scharen von Stromflächen, von denen die eine vollständig willkürlich gewählt werden kann; die andere ist dann durch eine Quadratur bestimmt, aber immerhin noch von der Mannigfaltigkeit einer Funktion einer Veränderlichen. Die Integrabilitätsbedingung nimmt folgende Gestalt an:

6) $$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0; \qquad \nabla \times [\nabla v \times \nabla w] = 0$$

oder

$$\nabla^2 v \cdot \nabla w - \nabla^2 w \cdot \nabla v + \Delta_2 w \nabla v - \Delta_2 v \nabla w = 0.$$

Zwei Scharen von Stromflächen, die der Gleichung (6) genügen, sollen als **normierte** Scharen bezeichnet werden. Es ist zu bemerken, daß durch diese Normierung keine der Scharen selbst, sondern nur die Zusammenstellung zweier Scharen einer Beschränkung unterworfen ist.

Da in (6) drei Gleichungen enthalten sind, in denen die partiellen Differentialquotienten von v und w bis zur 2. Ordnung vorkommen, muß es möglich sein, eine dieser beiden Größen, etwa w, zu eliminieren. Der sich ergebenden partiellen Differentialgleichung von höherer als 2. Ordnung für v müßten sämtliche Systeme von Stromflächen genügen, die dem allgemeinsten System von Potentialflächen zugehören.

3. Spezialisierung auf ebene und rotationssymmetrische Strömungen.

Wenn auch die rechnerischen Schwierigkeiten bei der Aufstellung der allgemeinen Stromflächengleichung offenbar sehr beträchtlich sind, so läßt sich doch wenigstens in einzelnen Fällen, in denen die Potentialflächen einem einfachen Typus angehören und folglich unter den Stromflächen ebenfalls Scharen von besonders einfacher Art enthalten und bereits bekannt sind, die Differentialgleichung allgemeinerer Scharen angeben. Derartige Gleichungen sind als partikuläre Zwischenintegrale der allgemeinen Stromflächengleichung aufzufassen.

Als einfachstes Beispiel sei angenommen, daß die Potentialflächen Zylinderflächen mit zur z-Achse parallelen Erzeugenden seien, für welche sich die Potentialgleichung wegen $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ auf

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

reduziert. Unter den Stromflächen befinden sich dann die Ebenen, die zur xy-Ebene parallel sind. Folglich ist

$$w = z$$

ein Integral der Stromflächengleichung. Die Gleichungen (5) reduzieren sich dann auf die bekannten Gleichungen zwischen dem Potential u und der „Stromfunktion“ v:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

als deren räumliche Verallgemeinerung sie aufzufassen sind. Die Gleichung der Stromflächen v, welche mit $w = z$ zusammen ein normiertes System bilden, ist nach (6)

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} z] = 0$$

oder

$$\operatorname{curl}\left[\left(\mathfrak{i}\frac{\partial v}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial v}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial v}{\partial z}\right) \times \mathfrak{k}\right] = 0$$

$$\operatorname{curl}(\mathfrak{i}\, v_y - \mathfrak{j}\, v_x) = 0$$

$$\mathfrak{i}\, v_{xz} + \mathfrak{j}\, v_{yz} - \mathfrak{k}(v_{xx} + v_{yy}) = 0.$$

v muß also 3 skalaren Differentialgleichungen genügen, deren allgemeinstes reelles Integral in die Form

$$v = i(F(x+iy) - \bar{F}(x-iy)) + g(z)$$

gebracht werden kann, wo F bzw. $\bar{F}$ und g willkürliche Funktionen bedeuten. Für $g(z) = 0$ erhält man die bekannten zylindrischen Stromflächen, welche mit den Potentialflächen zusammen die ebenen Stromflächen in ∞ kleine Quadrate teilen; trifft man jedoch diese Vereinfachung nicht, so ergeben sich doppelt gekrümmte Stromflächen, auf deren jeder ∞^1 ebene Stromlinien liegen.

Durch Einsetzen des eben erhaltenen Wertes für v in (6) läßt sich die Differentialgleichung derjenigen Stromflächen w erhalten, die mit v zusammen ein normiertes System bilden.

An Stelle der Differentialgleichung kann auch die endliche Gleichung der Stromflächen direkt gefunden werden. Setzt man das Potential u und die eine Stromflächenschar w als bekannt voraus, so geben die Gleichungen (5)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}$$

durch Auflösen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial w}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial w}{\partial z}}.$$

$\frac{\partial v}{\partial z}$ bleibt zunäscht unbestimmt, da die dritte der Gleichungen (5) unter der Annahme, daß die Flächen v und w auf den Flächen u senkrecht stehen, eine Folge der beiden ersten ist.

Wendet man diese Formeln auf die ebene Strömung an und setzt

$$u = F(x + iy) + \overline{F}(x - iy); \qquad w = z,$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -i(F' - \overline{F}')$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = F' + \overline{F}'.$$

Durch Integration ergibt sich

$$v = -i(F(x + iy) - \overline{F}(x - iy)) + g(z).$$

Damit ist die Gleichung der Stromflächen, die mit den Ebenen zusammen ein normiertes System bilden, in derselben Form wie oben durch Integration ihrer Differentialgleichung gefunden.

Führt man in die Potentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Zylinderkoordinaten ein mittelst der Formeln

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\sin\vartheta \end{aligned} \qquad z = z,$$

so nimmt sie die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} = 0$$

an. Wenn man verlangt, daß die Potentialflächen Rotationsflächen mit gemeinsamer Achse sind, ist u von ϑ unabhängig und genügt der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0\,.$$

Unter den Stromflächen sind die Meridianebenen; wir setzen

$$w = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

und erzielen so eine gleichmäßige Verteilung der Stromflächen w.

Dann ist

$$\operatorname{grad} w = \frac{-\mathfrak{i}\,y + \mathfrak{j}\,x}{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w = \frac{1}{x^2 + y^2}\left[-\mathfrak{i}\,x\,v_z - \mathfrak{j}\,y\,v_z + \mathfrak{k}\,(x\,v_x + y\,v_y)\right],$$

wenn mit v wie bisher die Stromflächen bezeichnet werden, die mit den Meridianebenen zusammen ein normiertes System bilden. Geht man mittelst der Formeln

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

zu Zylinderkoordinaten über, so ergibt sich

$$\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w = \frac{-1}{r}\frac{\partial v}{\partial z}(\mathfrak{i}\cos\vartheta + \mathfrak{j}\sin\vartheta) + \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial v}\,\mathfrak{k}$$

und da

$$\operatorname{grad} u = \mathfrak{i}\cos\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \mathfrak{j}\,\sin\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial u}{\partial z}$$

ist, erhält man nach (5) die Stokesschen Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$$

zwischen Potential und Stromfunktion.

Die Gleichung (6)

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0$$

liefert die Bedingungen, denen die Stromflächen v genügen müssen, die mit den Meridianflächen zusammen ein normiertes System bilden:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} & -\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\cos\vartheta}{r} \\ \mathfrak{j} & \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} & -\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sin\vartheta}{r} \\ \mathfrak{k} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathfrak{i}\left[\frac{\sin\vartheta}{r}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\cos\vartheta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\vartheta}\right]$$
$$+\,\mathfrak{j}\left[-\frac{\cos\vartheta}{r}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\sin\vartheta}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\vartheta}\right]$$
$$+\,\mathfrak{k}\,\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial\vartheta} = 0.$$

Die Stromfunktion v muß also den 3 Gleichungen genügen:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r\,\partial\vartheta} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial z\,\partial\vartheta} = 0,$$

von denen die erste, von Stokes angegebene[1]), die Systeme von Stromkurven in den Meridianebenen charakterisiert. Um zu den Stromflächen v zu gelangen, hat man dem Integral dieser Gleichung noch eine willkürliche Funktion von ϑ additiv hinzuzufügen.

[1]) Vgl. Enzyklopädie der mathemat. Wissenschaften IV, 16, S. 101.

4. Eigenschaften der räumlichen Potentialströmung.

Die Bedingung (6)

$$\operatorname{curl}[\operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w] = 0$$

führt auf eine bemerkenswerte Umformung der Gleichung (5)

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w.$$

Bildet man $\operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w]$, so erhält man, weil

$$\operatorname{curl} \operatorname{grad} v = 0$$

ist:

$$\operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w] = \operatorname{grad} v \times \operatorname{grad} w.$$

An Stelle von (5) und (6) ergibt sich

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w] \tag{5'}$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl}[v \operatorname{grad} w] = 0. \tag{6'}$$

Der Gradient eines Potentials läßt sich nach (5′) als curl eines Vektorfeldes darstellen, das man erhält, wenn man den Gradient einer beliebigen Stromflächenschar w mit dem Parameter v einer zweiten Stromflächenschar multipliziert, die mit w zusammen ein normiertes System bildet.

Setzt man

$$v \operatorname{grad} w = \mathfrak{A} = a_1 \mathfrak{i} + a_2 \mathfrak{j} + a_3 \mathfrak{k},$$

so wird

$$\operatorname{grad} u = \operatorname{curl} \mathfrak{A}. \tag{5''}$$

Dabei muß $\mathfrak{A}$ der Bedingung

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0 \tag{6''}$$

genügen.

Gleichung (5″) gibt ausführlich geschrieben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial z}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial a_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial a_2}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y}.$$

Jetzt sind 2 von den Größen a durch die dritte ausdrückbar, etwa

$$a_2 = \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx$$

$$a_3 = \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx.$$

Die erste der Gleichungen (5″) sowie (6″) besteht dann zufolge $\Delta_2 u = 0$ identisch. Dann ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\, a_1 + \mathfrak{j} \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx + \mathfrak{k} \int \left(\frac{\partial a_1}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \partial x$$

$$= \int \left(\operatorname{grad} a_1 + \mathfrak{j} \frac{\partial u}{\partial z} - \mathfrak{k} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx.$$

Da

$$\int \operatorname{grad} a_1\, dx = \operatorname{grad} \int a_1\, dx = \operatorname{grad} b$$

gesetzt werden kann, wo b ein neuer Skalar ist, ist

$$v \operatorname{grad} w = \mathfrak{A} = \operatorname{grad} b + \mathfrak{j} \frac{\partial}{\partial z} \int u\, dx - \mathfrak{k} \frac{\partial}{\partial y} \int u\, dx$$

oder 7)

$$v \operatorname{grad} w = \operatorname{grad} b + \operatorname{curl} \mathfrak{i} \int u\, dx.$$

In diese Form läßt sich also jedes normierte Stromflächensystem bringen; dabei ist b eine skalare Funktion des Ortes. Der Gradient des Potentials selbst erscheint nach (5″) in der Gestalt

8) $$\operatorname{grad} u = \operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathfrak{i} \int u\, dx.$$

Die scheinbare Unsymmetrie des Ausdrucks auf der rechten Seite rührt davon her, daß zu dem unter dem curl stehenden Vektor stets ein beliebiger Gradient hinzugefügt werden und dadurch eine Komponente zum Verschwinden gebracht werden kann.

Die Gleichung (5) gibt ausführlich geschrieben

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{vmatrix}; \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Durch Quadrieren und Addieren erhält man

$$\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\Sigma \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$$

Bezeichnet man den Abstand zweier Flächen u und $u + du$ mit ds_u, so ist nach einer bekannten geometrischen Überlegung

$$\frac{du}{ds_u} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}.$$

Ebenso

$$\frac{dv}{ds_v} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}; \qquad \frac{dw}{ds_w} = \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}.$$

Bezeichnet man den Winkel der Flächen v und w mit ϑ, so ist

$$\cos \vartheta = \frac{\Sigma \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x}}{\sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2}};$$

also

$$\Sigma \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} = \cos \vartheta \cdot \frac{dv}{ds_v} \frac{dw}{ds_w}.$$

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\left(\frac{du}{ds_u}\right)^2 = \left(\frac{dv}{ds_v}\right)^2 \left(\frac{dw}{ds_w}\right)^2 - \left(\cos \vartheta \frac{dv}{ds_v} \frac{dw}{ds_w}\right)^2 = \left(\frac{dv}{ds_v}\right)^2 \left(\frac{dw}{ds_w}\right)^2 \sin^2 \vartheta$$

$$ds_u = \left(\frac{du}{dv\, dw}\right) \frac{ds_v\, ds_w}{\sin \vartheta}.$$

Zwei Paare von Stromflächen, v, $v + dv$ und w, $w + dw$ bestimmen eine Stromröhre, deren Querschnitt an jeder Stelle ein Parallelogramm vom Inhalt

$$dq = \frac{ds_v\, ds_w}{\sin \vartheta}$$

ist. Verteilt man nun die Potentialflächen so, daß der Potentialunterschied zwischen je zwei aufeinanderfolgenden konstant $= du$ ist, so ist $\frac{du}{dv\, dw} = c$ längs der ganzen Stromröhre eine Konstante. Die Gleichung

9) $$ds_u = c\, dq$$

sagt dann aus, daß die Stromröhre durch die Potentialflächen in Zellen eingeteilt wird, deren Länge zum Querschnitt in konstantem Verhältnis c steht. Verteilt man auch die Stromflächen so, daß sich die Parameter je zweier benachbarter um den gleichen Betrag dv bzw. dw unterscheiden, so ist c im ganzen stromdurchflossenen Raum konstant. Die ganze Strömung wird somit durch die Potentialflächen und zwei normierte Scharen von Stromflächen in ∞^3 Zellen geteilt, deren Länge zum Querschnitt im konstanten Verhältnis c steht.

Damit ist auch die geometrische Eigentümlichkeit der normierten Stromflächensysteme aufgeklärt.

Wenn insbesondere die Strömung Rotationssymmetrie besitzt und unter den Stromflächen ein Büschel von Meridianebenen w enthalten ist, ist

$$ds_w = r \cdot d\varphi,$$

wenn $d\varphi$ der Winkel zweier benachbarter Meridianebenen ist. Dann ist

$$ds_u = c \cdot r\, d\varphi\, ds_v$$

$$\frac{ds_u}{ds_v} = c\, d\varphi \cdot r.$$

In den Rechtecken, in welche jede Meridianebene durch die Potential- und Stromlinien zerlegt wird, ist der Quotient aus der von einer Stromlinie gebildeten Seite und der durchströmten Seite proportional der Entfernung von der Rotationsachse. Der Proportionalitätsfaktor ist längs jeder Stromröhre konstant, also nur vom Parameter der Stromlinien abhängig, und kann bei geeigneter Verteilung der Stromlinien konstant im ganzen Raum angenommen werden [1]).

Die eben besprochene geometrische Eigenschaft der normierten Scharen von Stromflächen ermöglicht es, alle dreifach orthogonalen Systeme von Potentialflächen aufzusuchen, welche Rotationssymmetrie besitzen, d. h. ein Ebenenbüschel enthalten. Dann werden die beiden anderen Flächensysteme in den Meridianebenen zwei orthogonale Kurvenscharen ausschneiden, deren jede sowohl der Potentialgleichung der Meridionalströmung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

als auch, in anderer Verteilung, der Stokesschen Differentialgleichung der Stromlinien

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

genügen muß; dabei ist v eine noch unbekannte Funktion von u. Die zweite Gleichung wird also, wenn $\frac{dv}{du} = v'$ und $\frac{d^2 v}{du^2} = v''$ gesetzt wird,

$$v'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + v''\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right) - \frac{v'}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0.$$

Durch Elimination von $\frac{\partial u}{\partial r}$ mittels der ersten Gleichung folgt

$$2v'\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right) + v''\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right) = 0.$$

Diese Gleichung kann als Transformierte der ebenen Potentialgleichung aufgefaßt werden; denn setzt man $\int \sqrt{v'(u)}\,du = f$, so nimmt sie die Gestalt

[1]) Vgl. R. v. Mises, Theorie der Wasserräder, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 57. Bd., 1909, S. 1 f. Weitere Literatur in der S. 158 zitierten Abhandlung.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0$$

an. Es gibt also eine dritte Verteilung der orthogonalen Kurvenscharen, bei welcher sie die Meridianebenen in unendlich kleine Quadrate teilen. Nennt man p und q die zugehörigen Parameter, so kann man

$$r + i z = F(p + i q)$$

ansetzen; die Funktion F ist noch zu bestimmen.

Wenn man nun für das Potential auf den Kurven p und q die Werte α und β einführt, so wird p eine Funktion von α, q eine solche von β sein, also

$$r + i z = F(p(\alpha) + i q(\beta)).$$

Die Potentialkurven α und β zerlegen die Meridianebenen in Rechtecke mit den Seitenlängen $d s_\alpha$ und $d s_\beta$. Da die Kurven β gleichzeitig Stromlinien sind, ist $\dfrac{d s_\alpha}{d s_\beta}$ von r nur um einen Faktor verschieden, der eine Funktion von β allein ist:

$$\frac{d s_\alpha}{d s_\beta} = \frac{r}{k^2(\beta)}.$$

Ebenso ist aber

$$\frac{d s_\beta}{d s_\alpha} = \frac{r}{h^2(\alpha)}.$$

Also

$$r = h(\alpha) k(\beta).$$

Die Entfernung von der Rotationsachse ist ein Produkt aus zwei Funktionen je eines der beiden Potentiale. An Stelle der Funktionen von α und β lassen sich auch solche von p und q einführen; dann ist

$$r = H(p) K(q).$$

Nun ist noch z zu berechnen. Aus der Quadrateinteilung der Ebene durch die Kurven p und q folgt

$$\frac{\partial z}{\partial p} = -\frac{\partial r}{\partial q}$$
$$\frac{\partial z}{\partial q} = \frac{\partial r}{\partial p}.$$

Diese Gleichungen lassen z aus r berechnen, anderseits geben sie für r die Gleichung

$$\frac{\partial^2 r}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial q^2} = 0.$$

Damit ist $H(p)$ und $K(q)$ an die Bedingung

$$H''(p)K(q) + H(p)K''(q) = 0$$

geknüpft. Die Integrale dieser Gleichung sind

$$H(p) = Ae^{ap} + Be^{-ap}$$
$$K(q) = C\sin aq + D\cos aq,$$

wo A, B, C, D, a willkürliche Konstante sind. Dann erhält man

$$r = (Ae^{ap} + Be^{-ap})(C\sin aq + D\cos aq)$$
$$z = (Ae^{ap} - Be^{-ap})(D\sin aq - C\cos aq).$$

Diese Gleichungen stellen ein System konfokaler Kegelschnitte dar; die Ellipsen $p = \text{const.}$ sind

$$\left(\frac{r}{Ae^{ap} + Be^{-ap}}\right)^2 + \left(\frac{z}{Ae^{ap} - Be^{-ap}}\right)^2 = C^2 + D^2.$$

Die Hyperbeln $q = \text{const.}$ sind

$$\left(\frac{r}{C\sin aq + D\cos aq}\right)^2 - \left(\frac{z}{D\sin aq - C\cos aq}\right)^2 = 4AB.$$

Die gemeinsame Brennweite ist durch

$$e^2 = 4AB(C^2 + D^2)$$

gegeben. Je nachdem A und B gleiches oder ungleiches Zeichen haben, entstehen außer den Rotationsellipsoiden einschalige oder zweischalige Rotationshyperboloide. $a = 0$ führt auf die konfokalen Rotationsparaboloide; die Ausartungen ergeben sich durch Spezialisieren der übrigen Konstanten.

Die konfokalen Systeme von Rotationsflächen 2. Ordnung und ihre Ausartungen sind die einzigen dreifachen Orthogonalsysteme mit Rotationssymmetrie, die aus lauter Potentialflächen bestehen.

5. Parameterdarstellung der Potentialströmung.

Wenn man die Koordinaten x, y, z eines Punktes als Funktionen dreier Parameter, nämlich des Parameters u der Potentialflächen und der Parameter v und w zweier Systeme von Stromflächen darstellt, geht die für die Potentialströmung charakteristische Gleichung

$$\nabla u = \varrho(v, w) \nabla v \times \nabla w \tag{5}$$

in eine Gleichung mit u, v, w als abhängigen und x, y, z als unabhängigen Veränderlichen über, die aufgestellt werden soll. Hiezu sind in den Operator

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

u, v, w als unabhängige Veränderliche einzuführen. Es ist

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u} \cdot \nabla = \mathfrak{X}_u \cdot \nabla,$$

wenn

$$\mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z = \mathfrak{X}$$

gesetzt wird. Ebenso

$$\frac{\partial}{\partial v} = \mathfrak{X}_v \cdot \nabla$$

$$\frac{\partial}{\partial w} = \mathfrak{X}_w \cdot \nabla.$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial w} = (\mathfrak{i}\mathfrak{X}_u + \mathfrak{j}\mathfrak{X}_v + \mathfrak{k}\mathfrak{X}_w) \cdot \nabla.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist ein skalares Produkt aus einer Dyadensumme und einem symbolischen Vektor. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung von links mit der reziproken Dyadensumme, so folgt

$$(\mathfrak{i}\,\mathfrak{X}_u + \mathfrak{j}\,\mathfrak{X}_v + \mathfrak{k}\,\mathfrak{X}_w)^{-1} \cdot \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial w}\right) = \nabla.$$

Ausführlich geschrieben ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}\nabla = (&\mathfrak{i}\,\mathfrak{i}\,x_u + \mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,y_u + \mathfrak{i}\,\mathfrak{k}\,z_u \\ &+ \mathfrak{j}\,\mathfrak{i}\,x_v + \mathfrak{j}\,\mathfrak{j}\,y_v + \mathfrak{j}\,\mathfrak{k}\,z_v \\ &+ \mathfrak{k}\,\mathfrak{i}\,x_w + \mathfrak{k}\,\mathfrak{j}\,y_w + \mathfrak{k}\,\mathfrak{k}\,z_w)^{-1} \cdot \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial w}\right)\end{aligned}$$

und wenn man die reziproke Dyadensumme einführt[1])

$$\nabla = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \mathfrak{i} \\ x_v & y_v & z_v & \mathfrak{j} \\ x_w & y_w & z_w & \mathfrak{k} \end{vmatrix} \cdot \left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial}{\partial w}\right).$$

Dabei sind die in der ersten Horizontalreihe stehenden Einheitsvektoren als 1. Faktoren, die in der letzten Vertikalreihe als 2. Faktoren aufzufassen; ferner ist

[1]) Die reziproke Dyadensumme von

$$\Phi = a_{11}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{i} + a_{12}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} + a_{13}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{k} + a_{21}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{i} + a_{22}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{j} + a_{23}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k} + a_{31}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{i} + a_{32}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{j} + a_{33}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}$$

ist nach Gibbs S. 316

$$\begin{aligned}\Phi^{-1} = \frac{1}{D}[&A_{11}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{i} + A_{21}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{j} + A_{31}\,\mathfrak{i}\,\mathfrak{k} + A_{12}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{i} + A_{22}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{j} + A_{32}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k} + A_{13}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{i} \\ &+ A_{23}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{j} + A_{33}\,\mathfrak{k}\,\mathfrak{k}],\end{aligned}$$

wo

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

und A_{ik} die adjungierte Determinante von a_{ik} in D ist.

$$D = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w = [\mathfrak{x}_u \, \mathfrak{x}_v \, \mathfrak{x}_w].$$

Führt man die Multiplikation aus, so ergibt sich der transformierte Wert von ∇:

$$10) \qquad \nabla = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \dfrac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \dfrac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \dfrac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Durch Entwicklung nach Elementen der letzten Spalte erhält man

$$10') \quad \nabla = \frac{1}{D}\left[\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w \frac{\partial}{\partial u} + \mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u \frac{\partial}{\partial v} + \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \frac{\partial}{\partial w}\right].$$

Insbesondere ist

$$\nabla u = \frac{1}{D}\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w; \qquad \nabla v = \frac{1}{D}\mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u; \qquad \nabla w = \frac{1}{D}\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v.$$

Nun ergibt die Gleichung (5)

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w &= \frac{\varrho(v, w)}{D}[\mathfrak{x}_w \times \mathfrak{x}_u] \times [\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v] \\ &= \frac{\varrho(v, w)}{D}[\mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v]\,\mathfrak{x}_u - \frac{\varrho(v, w)}{D}[\mathfrak{x}_w \cdot \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_u]\,\mathfrak{x}_v. \end{aligned}$$

Von den beiden gemischten Produkten der rechten Seite ist das erste $= D$, das zweite Null; folglich

$$11) \qquad \mathfrak{x}_u = \frac{1}{\varrho(v, w)}\mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w.$$

Diese Gleichung ist für jede Parameterdarstellung einer Potentialströmung charakteristisch; legt man insbesondere zwei normierte Scharen von Stromflächen zu Grunde, so ist

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{x}_w . \tag{11'}$$

Ausführlich geschrieben ist

$$\mathfrak{i}\, x_u + \mathfrak{j}\, y_u + \mathfrak{k}\, z_u = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} .$$

Wenn man (11') auf die ebene Strömung anwendet, also $w = z$ als eine Schar von Stromflächen einführt, erhält man

$$x_u = y_v ; \qquad x_v = - y_u .$$

Die Gleichung (11') stellt also die räumliche Verallgemeinerung dieser bekannten Beziehung dar.

Untersucht man nun die Meridionalströmung, so hat man als Stromflächen w das Ebenenbüschel durch die z-Achse einzuführen; also etwa

$$x = r \cos w , \qquad y = r \sin w$$

so setzen, wo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ die senkrechte Entfernung von der z-Achse bedeutet. Wenn man nur solche Stromflächen v in Betracht zieht, die ebenso wie die Potentialflächen u Rotationsflächen um die z-Achse sind, so ist $\frac{\partial r}{\partial w} = \frac{\partial z}{\partial w} = 0$ zu setzen. Dann wird aus (11')

$$\mathfrak{i}\, r_u \cos w + \mathfrak{j}\, r_u \sin w + \mathfrak{k}\, z_u = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ r_v \cos w & r_v \sin w & z_v \\ - r \sin w & r \cos w & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$z_u = r r_v ; \qquad z_v = - \frac{r_u}{r} . \tag{12}$$

Diese beiden Gleichungen sind die Bedingung dafür, daß ein ebenes Orthogonalsystem als meridionales Strömungsbild einer achsensymmetrischen räumlichen Potentialströmung betrachtet werden kann. Durch Elimination von z erhält man für r die Differentialgleichung

$$r r_{vv} + \frac{r_{uu}}{r} + r_v^2 - \frac{r_u^2}{r^2} = 0 .$$

Es soll jetzt noch die Integrabilitätsbedingung der Gleichung (11′) untersucht werden. Aus

$$\mathfrak{X}_u = \mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_w$$

erhält man durch Differentiieren

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{uu} &= \mathfrak{X}_{uv} \times \mathfrak{X}_w + \mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_{uw} \\ \mathfrak{X}_{uv} &= \mathfrak{X}_{vv} \times \mathfrak{X}_w + \mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_{vw} \\ \mathfrak{X}_{uw} &= \mathfrak{X}_{vw} \times \mathfrak{X}_w + \mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_{ww}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{uu} = [\mathfrak{X}_{vv} \times \mathfrak{X}_w] \times \mathfrak{X}_w + [\mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_{vw}] \times \mathfrak{X}_w + \mathfrak{X}_v \times [\mathfrak{X}_{vw} \times \mathfrak{X}_w] \\ + \mathfrak{X}_v \times [\mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_{ww}] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}_{uu} = 2(\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w)\mathfrak{X}_{vw} - \mathfrak{X}_w^2\, \mathfrak{X}_{vv} - \mathfrak{X}_v^2\, \mathfrak{X}_{ww} + 2\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w \mathfrak{X}_{vw} \\ + (\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_{ww} - \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_{vw})\mathfrak{X}_v + (\mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_{vv} - \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_{vw})\mathfrak{X}_w. \end{aligned} \tag{13}$$

Dieser linearen partiellen Differentialgleichung müssen die rechtwinkligen Koordinaten einer räumlichen Potentialströmung genügen.

Wenn die beiden Scharen von Stromflächen aufeinander senkrecht stehen, reduziert sich die Gleichung auf

$$\mathfrak{X}_{uu} + \frac{\partial}{\partial v}(\mathfrak{X}_w^2\, \mathfrak{X}_v) + \frac{\partial}{\partial w}(\mathfrak{X}_v^2\, \mathfrak{X}_w) = 0.$$

In dieser Gleichung erkennt man die Laplacesche Gleichung wieder. Wenn man nämlich die Laplacesche Gleichung auf ein dreifach orthogonales Koordinatensystem transformiert, erhält man nach Jacobi[1]):

$$\triangle_2 \varphi = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_2}{h_1 h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)\right].$$

[1]) Jacobi, Über eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ges. Werke 2. Bd., S. 191.

Dabei ist

$$\frac{1}{h_1^2} = \Sigma x_u^2 = \mathfrak{x}_u^2$$

$$\frac{1}{h_2^2} = \Sigma x_v^2 = \mathfrak{x}_v^2$$

$$\frac{1}{h_3^2} = \Sigma x_w^2 = \mathfrak{x}_w^2 \; .$$

Nach (11′) ist aber

$$\mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2 \mathfrak{x}_w^2 - (\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_w)^2 . \tag{11″}$$

Diese Gleichung, die neuerdings und in einfachster Weise aussagt, daß in allen Zellen, in welche die Strömung durch die Potentialflächen und zwei geeignete Scharen von Stromflächen geteilt wird, der Querschnitt der Länge proportional ist, geht über in

$$h_1 = h_2 h_3 .$$

Also ist

$$\triangle_2 \, \mathfrak{X} = \mathfrak{x}_u^2 \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u^2} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\mathfrak{x}_w^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} \right) + \frac{\partial}{\partial w} \left(\mathfrak{x}_v^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w} \right) \right] .$$

Es läßt sich nun vermuten, daß auch in dem allgemeineren Fall die Integrabilitätsbedingung nichts anderes als die Laplacesche Differentialgleichung ist. Um das zu zeigen, soll der Laplacesche Operator $\triangle_2 = \nabla \cdot \nabla$ auf ein beliebiges schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Allgemeinheit zunächst nicht beschränkt sei, transformiert werden. Nach (10) läßt sich schreiben

$$\nabla \cdot \nabla = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & 0 \\ x_u & y_u & z_u & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix} .$$

Führt man die skalare Multiplikation aus, so hat man die Summe der Quadrate der drei ersten Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} x_u & y_u & z_u & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ x_v & y_v & z_v & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ x_w & y_w & z_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{matrix} \right\|$$

zu bilden; dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß gleichzeitig die in dem ersten Faktor jeweils auftretenden Operatoren

$$\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial w}$$

auf den zweiten anzuwenden sind, die Faktoren also nicht vertauscht werden dürfen.

Es sei für einen Moment eine Matrix

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{matrix} \right\|$$

betrachtet. Die Quadratsumme der drei ersten Determinanten ist:

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_3 \end{matrix} \right\|^2 - \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{23} \end{matrix} \right|^2$$

$$= \left| \begin{matrix} \sum_1^3 a_{1i}^2 + a_1^2 & \Sigma a_{1i} a_{2i} + a_1 a_2 & \Sigma a_{1i} a_{3i} + a_1 a_3 \\ \Sigma a_{2i} a_{1i} + a_2 a_1 & \Sigma a_{2i}^2 + a_2^2 & \Sigma a_{2i} a_{3i} + a_2 a_3 \\ \Sigma a_{3i} a_{1i} + a_3 a_1 & \Sigma a_{3i} a_{2i} + a_3 a_2 & \Sigma a_{3i}^2 + a_3^2 \end{matrix} \right|$$

$$- \left| \begin{matrix} \sum_1^3 a_{1i}^2 & \Sigma a_{1i} a_{2i} & \Sigma a_{1i} a_{3i} \\ \Sigma a_{2i} a_{1i} & \Sigma a_{2i}^2 & \Sigma a_{2i} a_{3i} \\ \Sigma a_{3i} a_{1i} & \Sigma a_{3i} a_{2i} & \Sigma a_{3i}^2 \end{matrix} \right| .$$

Entwickelt man die erste Determinante in eine Summe, so bleiben nur 3 von Null verschiedene Determinanten übrig, die nach Ausscheidung des Faktors a_1, a_2 oder a_3 eine Vertikalreihe gemeinsam haben; ihre Summe ist die vierreihige Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ \sum\limits_1^3 a_{1i}^2 & \sum a_{1i}a_{2i} & \sum a_{1i}a_{3i} & a_1 \\ \sum a_{2i}a_{1i} & \sum a_{2i}^2 & \sum a_{2i}a_{3i} & a_2 \\ \sum a_{3i}a_{1i} & \sum a_{3i}a_{2i} & \sum a_{3i}^2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Die Anwendung dieser Entwickung ergibt

$$14) \qquad \triangle_2 = \nabla \cdot \nabla = \begin{vmatrix} \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} & 0 \\ \mathfrak{X}_u^2 & \mathfrak{X}_u \cdot \mathfrak{X}_v & \mathfrak{X}_u \cdot \mathfrak{X}_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial u} \\ \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_u & \mathfrak{X}_v^2 & \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial v} \\ \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_u & \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_v & \mathfrak{X}_w^2 & \frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Damit ist die Laplacesche Gleichung auf beliebige schiefwinklige Koordinaten transformiert.

Bei der Entwicklung sind die in der ersten Zeile stehenden Differentialoperatoren auf ihre Unterdeterminanten zur Anwendung zu bringen; deshalb kann der in der ersten Zeile stehende Faktor $\frac{1}{D}$, nicht aber der in der letzten Kolonne auftretende Faktor $\frac{1}{D}$ vor die Determinante gesetzt werden.

Die Anwendung auf unser Problem ergibt:

$$\triangle_2 \mathfrak{X} = \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial w} & 0 \\ \mathfrak{X}_u^2 & 0 & 0 & \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u} \\ 0 & \mathfrak{X}_v^2 & \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w & \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} \\ 0 & \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_v & \mathfrak{X}_w^2 & \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\mathfrak{X}_u^2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{X}_v^2\mathfrak{X}_w^2 - (\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w)^2}{\mathfrak{X}_u^2}\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\mathfrak{X}_w^2\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} - \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial w}\left(\mathfrak{X}_v^2\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w} - \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v}\right)\right].$$

Unter Benützung von (11″) ergibt sich

$$\mathfrak{X}_u^2 \triangle_2 \mathfrak{X} = \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial u^2} + \mathfrak{X}_w^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial v^2} + \mathfrak{X}_v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial w^2} - 2\,\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial v\, \partial w}$$
$$+ (\mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_{vw} - \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_{ww})\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial v} + (\mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_{vw} - \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_{vv})\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial w}.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß die Integrabilitätsbedingung (13) nichts anderes als die Laplacesche Gleichung ist.

Es soll nun noch die Frage nach den dreifach orthogonalen Systemen von Potentialflächen aufgeworfen werden. Nach (11) müssen 3 Gleichungen bestehen:

$$\mathfrak{X}_u = g_1(v, w)\, \mathfrak{X}_v \times \mathfrak{X}_w$$
$$\mathfrak{X}_v = g_2(w, u)\, \mathfrak{X}_w \times \mathfrak{X}_u$$
$$\mathfrak{X}_w = g_3(u, v)\, \mathfrak{X}_u \times \mathfrak{X}_v,$$

wo $g_1(v, w)$, $g_2(w, u)$, $g_3(u, v)$ noch zu bestimmmende Funktionen sind.

Dazu

$$\mathfrak{X}_u \cdot \mathfrak{X}_v = \mathfrak{X}_v \cdot \mathfrak{X}_w = \mathfrak{X}_w \cdot \mathfrak{X}_u = 0.$$

Also
$$\mathfrak{X}_u^2 = g_1^2 \mathfrak{X}_v^2 \mathfrak{X}_w^2$$
$$\mathfrak{X}_v^2 = g_2^2 \mathfrak{X}_w^2 \mathfrak{X}_u^2$$
$$\mathfrak{X}_w^2 = g_3^2 \mathfrak{X}_u^2 \mathfrak{X}_v^2,$$

folglich ist
$$\mathfrak{X}_u^2 g_2 g_3 = 1$$
$$\mathfrak{X}_v^2 g_3 g_1 = 1$$
$$\mathfrak{X}_w^2 g_1 g_2 = 1.$$

Das Linienelement des Raumes wird also
$$ds^2 = \frac{du^2}{g_2(w,u)\, g_3(u,v)} + \frac{dv^2}{g_3(u,v)\, g_1(v,w)} + \frac{dw^2}{g_1(v,w)\, g_2(w,u)}.$$

Dabei müssen die Größen $\frac{1}{g_2 g_3}$, $\frac{1}{g_3 g_1}$, $\frac{1}{g_1 g_2}$ den 6 Laméschen Gleichungen[1]) genügen. Nach dem Ergebnis der früheren Untersuchung der dreifach orthogonalen Potentialsysteme mit Rotationssymmetrie ist es nicht unwahrscheinlich, daß das einzige bisher bekannte allgemeine System, das der konfokalen Flächen zweiter Ordnung, auch das einzig existierende ist.

6. Anhang. Eine Ableitung der Cayley-Darbouxschen Gleichung.

Die verwendeten Methoden sind zur Behandlung einer Frage, die mit der bisherigen Untersuchung nur in losem Zusammenhang steht, nämlich nach der Bedingung dafür, daß eine Flächenschar einem dreifachen Orthogonalsystem angehört, sehr geeignet. Zunächst müssen die drei Flächenscharen u, v, w den Gleichungen

I) $$\nabla v \cdot \nabla w = \nabla w \cdot \nabla u = \nabla u \cdot \nabla v = 0$$

genügen. Durch Anwendung des Operators ∇ ergibt sich hieraus

15) $$\begin{aligned} \nabla^2 u \cdot \nabla v + \nabla u \cdot \nabla^2 v &= 0 \\ \nabla^2 v \cdot \nabla w + \nabla v \cdot \nabla^2 w &= 0 \\ \nabla^2 w \cdot \nabla u + \nabla w \cdot \nabla^2 u &= 0. \end{aligned}$$

[1]) Vgl. z. B. L. Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Leipzig 1899, S. 484.

Da nach (1)

$$\nabla u = \varrho_1 \nabla v \times \nabla w, \quad \nabla v = \varrho_2 \nabla w \times \nabla u, \quad \nabla w = \varrho_3 \nabla u \times \nabla v$$

ist, nimmt die Bedingung (3a) für das Vorhandensein einer gemeinsamen orthogonalen Schar die Form

$$\nabla^2 w \cdot \nabla v \cdot \nabla u = 0$$

an neben 5 weiteren Gleichungen, die sich aus ihr durch Vertauschung von u, v, w ergeben; davon sei eine hervorgehoben:

II) $$\nabla^2 u \cdot \nabla v \cdot \nabla w = 0 .$$

Diese Gleichung hätte aus

I) $$\nabla v \cdot \nabla w = 0$$

auch durch Anwendung eines besonderen skalaren Operators

$$\nabla u \cdot \nabla$$

erhalten werden können. Bringt man ihn an irgend einem vektoriellen Produkt $\Phi \cdot \Psi$ an, so ist

$$\nabla u \cdot \nabla (\Phi \cdot \Psi) = (\nabla u \cdot \nabla \Phi) \cdot \Psi + \Phi \cdot (\nabla u \cdot \nabla \Psi).$$

Wenn er insbesondere auf einen Ausdruck zur Anwendung kommt, der v und w nur in der Verbindung ∇v und ∇w enthält, so wird wegen (15) die Ordnung der Differentialquotienten von v und w nicht über die erste erhöht[1]).

Aus (I) erhält man hienach

$$\nabla u \cdot \nabla(\nabla v \cdot \nabla w) = (\nabla u \cdot \nabla^2 v) \cdot \nabla w + \nabla v \cdot (\nabla u \cdot \nabla^2 w) = 0,$$

also nach (15)

$$-(\nabla v \cdot \nabla^2 u) \cdot \nabla w - \nabla v \cdot (\nabla^2 u \cdot \nabla w) = 0$$

oder

II) $$\nabla^2 u \cdot \nabla v \cdot \nabla w = 0,$$

[1]) Sachlich ist der Operator $\nabla u \cdot \nabla$ schon bei Cayley vorhanden. Seiner konsequenten Anwendung verdankt Darboux die große Vereinfachung der Ableitung, die er erzielt hat. Cayley, Sur la condition pour qu'une famille de surfaces donnée puisse faire partie d'un système triple orthogonal. Collected mathematical Papers Bd. VIII. Darboux, Leçons sur les systèmes orthogonaux, Chap. I.

wenn man berücksichtigt, daß Produkte aus einem Vektor und einer symmetrischen Dyadensumme kommutativ sind. Wendet man nun $\nabla u \cdot \nabla$ auf (II) an, so folgt

$$(\nabla u \cdot \nabla^3 u) \cdot \nabla v \cdot \nabla w + \nabla^2 u \cdot (\nabla u \cdot \nabla^2 v) \cdot \nabla w$$
$$+ \nabla^2 u \cdot \nabla v \cdot (\nabla u \cdot \nabla^2 w) = 0 \text{ [1]}$$

oder nach (15)

$$\text{III)} \qquad (\nabla u \cdot \nabla^3 u - 2 \nabla^2 u \cdot \nabla^2 u) \cdot \nabla v \cdot \nabla w = 0.$$

Die 5 Gleichungen (I), (II), (III), von denen zwei in v bzw. w linear, die anderen bilinear sind, genügen zur Elimination von

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Es sind dieselben, die Darboux aufstellt. Um die Elimination wirklich auszuführen, stellen wir mit Darboux aus den zwei linearen Gleichungen

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0, \qquad \nabla u \cdot \nabla w = 0$$

drei bilineare her:

$$\text{I')} \qquad (\nabla u \cdot \nabla v) \nabla w + (\nabla u \cdot \nabla w) \nabla v = 0.$$

Ausführlich geschrieben haben wir nun folgende Gleichungen:

$$\text{I)} \qquad v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$$

$$\text{I')} \quad \begin{cases} 2 u_1 v_1 w_1 + u_2 (v_1 w_2 + v_2 w_1) + u_3 (v_1 w_3 + v_3 w_1) = 0 \\ 2 u_2 v_2 w_2 + u_1 (v_1 w_2 + v_2 w_1) + u_3 (v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0 \\ 2 u_3 v_3 w_3 + u_1 (v_1 w_3 + v_3 w_1) + u_2 (v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0 \end{cases}$$

$$\text{II)} \qquad u_{11} v_1 w_1 + u_{22} v_2 w_2 + u_{33} v_3 w_3$$
$$+ u_{12}(v_1 w_2 + v_2 w_1) + u_{13}(v_1 w_3 + v_3 w_1) + u_{23}(v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0$$

$$\text{III)} \qquad A_{11} v_1 w_1 + A_{22} v_2 w_2 + A_{33} v_3 w_3$$
$$+ A_{12}(v_1 w_2 + v_2 w_1) + A_{13}(v_1 w_3 + v_3 w_1) + A_{23}(v_2 w_3 + v_3 w_2) = 0.$$

[1]) $\nabla^3 u$ ist eine Triadensumme.

Das sind 6 homogene Gleichungen mit den Unbekannten

$v_1 w_1, \quad v_2 w_2, \quad v_3 w_3, \quad v_1 w_2 + v_2 w_1, \quad v_1 w_3 + v_3 w_1, \quad v_2 w_3 + v_3 w_2 .$

Dabei bedeuten die Indices an u, v, w Differentiationen. Die A_{ik} sind die Koeffizienten der Dyadensumme

$$\nabla u \cdot \nabla^3 u + \nabla^2 u \cdot \nabla^2 u,$$

also

$$A_{ik} = \sum_1^3{}^l (u_{ikl} u_l - u_{il} u_{kl}).$$

Die gesuchte Bedingung ergibt sich nun in der Form der bekannten Determinante

$$\text{16)} \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{22} & A_{33} & A_{12} & A_{23} & A_{13} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & u_{12} & u_{23} & u_{13} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & 2u_2 & 0 & u_1 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2u_3 & 0 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0.$$