Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1914. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1914
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über Funktionen grosser Zahlen, insbesondere über die näherungsweise Bestimmung entfernter Glieder in den Reihenentwicklungen der Theorie der Keplerschen Bewegung.

Von **H. Burkhardt.**

Vorgelegt in der Sitzung am 10. Januar 1914.

Die Laplacesche Methode zur Bestimmung angenäherter Werte von Integralen der Form

1) $$J_n = \int f(x)\,\varphi(x)^n\,dx$$

für große Werte von n läßt sich, soweit sie für die hier vorzunehmende Untersuchung in Betracht kommt, folgendermaßen darstellen: Das Verhältnis des Beitrags, den die Umgebung des Maximums der Funktion $\varphi(x)$ zu dem Integral liefert, zu dem Beitrag aller übrigen Teile des Integrationsintervalls nimmt mit wachsendem n zu wie eine Exponentialfunktion vom Exponenten n (vorausgesetzt, daß der erstgenannte Beitrag nicht selbst Null ist). Man bestimme also zunächst dieses Maximum; wird es in einem inneren Punkte x_0 des Intervalls angenommen, so muß in ihm $\varphi'(x_0) = 0$ sein; ist dann $\varphi''(x_0)$ nicht gleich Null, so transformiert Laplace das Integral (1) durch die Substitution

2) $$\varphi(x) = \varphi(x_0)\exp(-a\,t^2)$$

in die Form

3) $$J_n = \int \chi(t)\exp(-n\,a\,t^2)\,dt,$$

wobei, eben weil nur die Umgebung des Maximums einen zu berücksichtigenden Beitrag liefert, die Integration in Bezug auf t von $-\infty$ bis $+\infty$ erstreckt werden kann, aber gleichwohl die Funktion $\chi(t)$ nach Potenzen von t entwickelt werden darf. Mühsam ist dabei nur die Auflösung der Gleichung (2) nach x; das ist wohl mit der Grund gewesen, weshalb Herr Darboux und seine Schüler dieses Verfahren wieder verlassen haben[1]). Man kann aber die Form (3) des Integrals auch durch die viel einfachere Substitution

$$4)\qquad x - x_0 = t$$

erreichen; man muß dann nur folgendermaßen verfahren:

Man beginne mit der Entwicklung:

$$5)\qquad \log \varphi(x) = \log \varphi(x_0) - \alpha t^2 + \beta t^3 + \cdots,$$

sie liefert:

$$6)\qquad \varphi(x) = \varphi(x_0) e^{-\alpha t^2}(1 + \beta t^3 + \cdots).$$

Dieser Ausdruck ist nun noch in die n^{te} Potenz zu erheben; geschieht das mit Hilfe der Binomialreihe, so treten n und seine Potenzen bei den einzelnen Entwicklungsgliedern als Faktoren auf. Das scheint die Verwendbarkeit des Verfahrens zu vernichten; aber man erkennt leicht, daß man in jedem Fall doch nur eine endliche Anzahl von Gliedern zu berücksichtigen braucht, um im Resultat alle Glieder zu bekommen, die keine höhere als eine bestimmte Potenz von n im Nenner haben.

Enthält die Entwicklung von $\chi(t)$ nach Potenzen von t Potenzen mit Exponenten < -1, so muß der Integrationsweg dem Punkte $t = 0$ in bekannter Weise ausweichen; das bringt weiter keine Schwierigkeit mit sich.

---

[1]) Wenn $f(x)$ sich auf eine Konstante reduziert, kann man sich der Lagrangeschen Reihenumkehrungsformel bzw. des mit dieser der Sache nach identischen, von Herrn Debye, Math. Ann. 67, p. 544 entwickelten Verfahrens bedienen; aber wenn $f(x)$ nicht konstant ist, ist das nicht mehr so bequem.

Hier möge die Rechnung nur für den Fall durchgeführt werden, daß die Entwicklung von $\chi(t)$ ein Glied mit t^{-1} enthält, und daß man im Resultat noch alle Glieder mitnehmen will, die keine höhere Potenz von n als die erste im Nenner enthalten. Man braucht dann nur die im folgenden angegebenen Glieder zu berechnen.

Aus (6) folgt:

7) $$\varphi(x)^n = \varphi(x_0)^n e^{-n a t^2}(1 + n\beta t^3 + \cdots);$$

ist ferner

8) $$f(x) = \frac{1}{a t + b t^2 + \cdots} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{t} - \frac{b}{a} + \cdots\right),$$

so ergibt sich:

9) $$f(x)\varphi(x)^n dx = \frac{\varphi(x_0)^n}{a} \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{b}{a} + n\beta t^2 + \cdots\right) e^{-n a t^2} dt,$$

also

10) $$J_n \sim \frac{\varphi(x_0)^n}{a}\left[\pm \pi i + \left(-\frac{b}{a\sqrt{a}} + \frac{\beta}{2\sqrt{a^3}}\right)\sqrt{\frac{\pi}{n}} + \cdots\right].$$

Die Integralausdrücke der Koeffizienten derjenigen trigonometrischen Reihen, welche in der Theorie der Keplerschen Bewegung der Himmelskörper auftreten und nach den Funktionen der Vielfachen der mittleren Anomalie u fortschreiten, nehmen die Form (1) an, wenn man

11) $$z = e^{iu}$$

als Integrationsvariable einführt. Dabei ist in der Ebene der komplexen Variabeln z über den Einheitskreis zu integrieren, und die Funktion $\varphi(z)$ hat den Ausdruck

12) $$\varphi(z) = z \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right);$$

ε bedeutet die lineare Exzentrizität, also einen reellen, echten Bruch. Differentiation ergibt

13) $$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z} - \frac{\varepsilon}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right).$$

Die Nullstellen von $\varphi'(z)$ sind also reelle und liegen bei:

$$14)\quad \begin{aligned} z_0 &= \frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}} < 1, \\ z_1 &= \frac{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}} > 1. \end{aligned}$$

Schreibt man (13) in der Form:

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -\frac{\varepsilon}{2z^2}(1-zz_0)(1-zz_1),$$

so erhält man daraus durch Differentiation:

$$15)\quad \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} + \cdots = -\frac{\varepsilon}{2z^2}(1-zz_0)(-z_1) + \cdots,$$

wobei die nur durch Punkte angedeuteten Bestandteile bei $z = z_0$ Null sind; also:

$$16)\quad \frac{\varphi''(z_0)}{\varphi(z_0)} = \frac{\varepsilon}{2z_0^2}(z_1 - z_0) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{z_0^2} > 0$$

und ebenso:

$$\frac{\varphi''(z_1)}{\varphi(z_1)} = -\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{z_1^2} < 0.$$

Es hat sonach die Funktion $\varphi(z)$ im Punkte z_0 auf der Achse der reellen z ein Minimum, und folglich auf jeder Linie, die diese Achse in diesem Punkte rechtwinklig trifft, in ihm ein Maximum. In der Tat erkennt man, daß auf jedem Kreise von einem Radius r um den Nullpunkt

$$17)\quad |\varphi(z)| = r \exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\Re(z)\right)$$

ist, daß also $|\varphi(z)|$ für $r < 1$ im Schnittpunkt eines solchen Kreises mit der Halbachse der positiv reellen z einen größeren Wert hat, als in jedem anderen Punkte desselben Kreises. Durch diese Bemerkung wird man der Diskussion der Kurven $|\varphi(z)| = \text{const.}$, die sonst an dieser Stelle erforderlich wäre, überhoben. Man kann also den Integrationsweg in den Kreis $|z| = z_0$[1]) verlegen, wobei nur dem Punkte $z = z_0$ selbst, wenn nötig, auszuweichen ist.

Speziell für die Koeffizienten der Entwicklung der Mittelpunktsgleichung

$$18)\qquad w - \zeta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin n\zeta$$

(w bedeutet die wahre Anomalie), die sich durch die Integrale

$$19)\qquad C_n = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(nu - n\varepsilon \sin u)}{1 - \varepsilon \cos u}\, du$$

$$= \frac{-i\sqrt{1-\varepsilon^2}}{n\pi} \int f(z)\, \varphi(z)^n\, dz,$$

wobei:

$$20)\qquad f(z) = \frac{1}{z - \frac{\varepsilon}{2}(z^2+1)}.$$

darstellen lassen, gestaltet sich die Rechnung wie folgt:

Um reelle t zu bekommen, setzen wir abweichend von (4):

$$21)\qquad z - z_0 = it, \qquad dz = i\,dt;$$

dann kommt zunächst:

$$\log \varphi(z) = \log z - \frac{\varepsilon}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$= \log z_0 + \log\left(1 + \frac{it}{z_0}\right) - \frac{\varepsilon}{2}(z_0 + it) + \frac{\varepsilon}{2z_0}\left(1 + \frac{it}{z_0}\right)^{-1}$$

$$= \log \varphi(z_0) + \frac{t^2}{2z_0^2} - \frac{it^3}{3z_0^3} + \cdots + \frac{\varepsilon}{2z_0}\left(-\frac{t^2}{z_0^2} + \frac{it^3}{z_0^3} + \cdots\right).$$

also:

---

[1]) Diesen Kreis wählt auch schon A. Cauchy (Paris, C. R. 38, 1854, p. 1033 = œuvres (1) 12, p. 165) als Integrationsweg; doch spricht er dort nur von der Entwicklung ganzer Funktionen von z und $\frac{1}{z}$.

$$22)\quad \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2z_0^2}\left(-1+\frac{\varepsilon}{z_0}\right) = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2z_0^2},\\ \beta &= \frac{i}{z_0^3}\left(-\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{2z_0}\right); \end{aligned}$$

ferner:

$$f(z) = \frac{1}{it - \frac{\varepsilon}{2}(2z_0 it - t^2)},$$

also:

$$23)\qquad a = i(1-\varepsilon z_0) = i\sqrt{1-\varepsilon^2}, \qquad b = \frac{\varepsilon}{2}$$

und demnach:

$$-\frac{b\alpha}{a}+\frac{\beta}{2} = \frac{i}{2z_0^3}\left(\frac{z_0\varepsilon}{2}-\frac{1}{3}+\frac{\varepsilon}{2z_0}\right) = \frac{i}{3z_0^3}$$

$$-\frac{b}{a\sqrt{a}}+\frac{\beta}{2\sqrt{a^3}} = \frac{2i\sqrt{2}}{3\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}^{\,3}},$$

also schließlich

$$24)\qquad C^n \sim \frac{(z_0 \exp\sqrt{1-\varepsilon^2})^n}{n}\left(1+\frac{4}{3\sqrt{2n\pi}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{1-\varepsilon^2}^{\,3}}\right)$$

übereinstimmend mit dem seinerzeit von Jacobi[1]) auf einem von Carlini gebrochenen, sehr mühsamen Wege erhaltenen Resultate. Wollte man, wie es Herr Flamme[2]) getan hat, die Entwicklung bis zu Gliedern mit $\sqrt{n^3}$ im Nenner treiben, so müßte man in der Entwicklung von $(1+\beta t^3+\cdots)^n$

in den Gliedern mit n bis t^5,
in den Gliedern mit n^2 bis t^7,
in den Gliedern mit n^3 bis t^9

[1]) Astr. Nachr. 1848, 1850 = Werke 7, p. 188, 237.

[2]) Paris thèse 1887, p. 66 = Bordeaux observ. ann. 2, 1887, p. 106. Um aus Flammes allgemeiner Formel den Ausdruck für C_n zu bekommen, hat man $l = m = 0$, $k = -2$ zu setzen und mit $\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{n}}$ zu multiplizieren.

gehen; ebenso wären noch Glieder mit $n^4\,t^{11}$ zu berücksichtigen, aber die Glieder mit n^4 haben mindestens t^{12} zum Faktor, und ebensowenig kommen Glieder mit noch höheren Potenzen von t in Betracht. Es würden also nur die Glieder

$$(25)\qquad 1+n\beta t^3+n\gamma t^4+n\delta t^5+\frac{n^2}{2}(\beta^2 t^6+2\beta\gamma t^7)+\frac{n^3}{6}\beta^3 t^9$$

zu berücksichtigen sein.

Dem hier besprochenen Problem kommt ein gewisses historisches Interesse zu. Nicht nur Laplace[1]) und Jacobi[2]) haben zu verstehen gegeben, daß sie im Besitze besonderer Methoden zur Behandlung derartiger Aufgaben seien. Auch Gauß hat bei Gelegenheit der Korrespondenz mit Schumacher[3]) über die Aufnahme der Aufsätze Jacobis in die Astronomischen Nachrichten diesem im Dezember 1849 und Februar 1850 mitgeteilt, er sei seit mehr als 40 oder 50 Jahren im Besitze eines Verfahrens, die Aufgabe „auf eine ohne allen Vergleich kürzere Art" aufzulösen, Schumachers Vorschlag, es zu veröffentlichen, aber mit der bei ihm gewöhnlichen Motivierung abgelehnt, er könne die Sache noch nicht in einer ihm selbst genügenden Weise darstellen. Soll man in der Tat wagen, daraus zu schließen, Gauß sei schon um die Wende vom 18. zum 19. Jahrhundert in die Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen so tief eingedrungen gewesen, daß

---

1) Supplément à la mécanique céleste, Paris 1827 = œuvres 5, p. 489. Er leitet einen asymptotischen Ausdruck für die Koeffizienten der Entwicklung des Radiusvektor nach den Funktionen der Vielfachen der mittleren Anomalie durch einen von ihm selbst nicht als streng anerkannten Übergang von reellen zu komplexen Größen und bemerkt dann: „j'en ai reconnu l'exactitude par une autre analyse".

2) Astr. Nachr. 1848 = Werke 7, p. 176. Er bemerkt, die Eigentümlichkeit der von ihm gebrauchten Methode — die er nicht mitteilt —, habe ihre anderweitige Bestätigung wünschenswert gemacht und er habe deshalb es unternommen zu untersuchen, ob Carlinis Methode, nach Beseitigung der von diesem begangenen Versehen, daselbe Resultat liefere.

3) Briefwechsel mit Schumacher 6, p. 51, 58; die in Betracht kommenden Stellen auch abgedruckt in Königsbergers Jacobi-Biographie, p. 471—72, 476—77.

er die Möglichkeit einsehen konnte, die Laplacesche Methode zur Bestimmung der Funktionen großer Zahlen für Probleme der hier besprochenen Art durch geeignete Verschiebung des Integrationswegs in der Ebene der komplexen Zahlen nutzbar zu machen? Er wäre dann Cauchy auch in diesem Punkte um 30 Jahre voraus gewesen.

Endlich sei es erlaubt, in diesem Zusammenhange noch auf eine bis jetzt meines Wissens noch nicht völlig klargelegte Vorschrift Riemanns[1]) zur Untersuchung von Integralen der Form

$$\int f(x) \sin (n \varphi (x)) \, d x$$

hinzuweisen: „man untersuche die Stelle, wo die Zeichenwechsel des Sinus sich am langsamsten folgen“.

Die vorstehenden Überlegungen eröffnen auch den Weg zum Verständnis der Andeutungen, die A. Cauchy über die Berechnung asymptotischer Werte der hier besprochenen Entwicklungskoeffizienten für stark exzentrische Bahnen gegeben hat. Für $\varepsilon = 1$ fallen die beiden Nullstellen (14) in den Punkt $z = 1$ zusammen; der vorhin benutzte Kreis ist dann nicht mehr als Integrationsweg zu verwenden, da auf ihm $|\varphi(z)|$ konstant ist. Cauchy gibt an, man solle in diesem Fall den Integrationsweg aus zwei Bogen logarithmischer Spiralen zusammensetzen, die die Radienvektoren unter Winkeln von 60 Grad schneiden, und gibt deshalb seiner Note[2]) den etwas geheimnisvoll klingenden Titel: „Sur les services que la spirale logarithmique peut rendre à l'astronomie.“ Damit scheint es folgende Bewandtnis zu haben: der Gebrauch der logarithmischen Spirale ist nicht das wesentliche; sie ist von Cauchy wohl nur deswegen benutzt worden, weil er sich irgendwie elementar davon überzeugt hatte, daß auf ihr der absolute Betrag der Funktion $\varphi(z)$ in der Tat im Punkte 1 und nur in diesem Punkte sein Maximum erreicht. Wesentlich ist nur, daß die Kurve, die man benutzt, in diesem Punkte die an-

1) Habilitationsschrift von 1854 = Werke 2. Aufl., p. 261.

2) Paris C. R. 38, 1854, p. 1033 = œuvres (1) 12, p. 164.

gegebenen Winkel mit dem Radiusvektor einschließt. Denn dann kann man wie im vorigen Fall verfahren; man muß nur beachten, daß in der Entwicklung (5) jetzt das Glied mit t^2 fehlt und das Glied mit t^3 den Hauptbeitrag liefert. Will man etwa die Richtigkeit des von Cauchy für die Auflösung der Keplerschen Gleichung[1]) gegebenen Resultats bestätigen, so hat man folgende Rechnung auszuführen. Die Entwicklungskoeffizienten sind hier dargestellt durch:

$$24)\quad A_n = \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{2\pi} \cos(nu - n\sin u)\,du = -\frac{i}{n\pi}\int\left[z\exp\left(-\frac{z-z^{-1}}{2}\right)\right]^n \frac{dz}{z};$$

setzt man

$$25)\qquad z = 1 + \lambda t,$$

wo λ eine dritte Einheitswurzel bedeutet, so erhält man durch eine kurze Rechnung:

$$26)\qquad \varphi(z) = 1 - \tfrac{1}{6}t^3 + \cdots;$$

und hat nun in Bezug auf t von $-\infty$ bis 0 mit dem einen und von 0 bis $+\infty$ mit dem anderen Wert dieser dritten Einheitswurzel zu integrieren. Das gibt

$$27)\qquad A_n \sim \frac{\sqrt{3}}{n\pi}\int\limits_0^{\infty} \exp\left(-\frac{nt^3}{6}\right) dt$$

oder wenn man durch

$$28)\qquad t = \sqrt[3]{\frac{6v}{n}}$$

eine neue Integrationsvariable einführt:

---

[1]) Für eine parabolische Bahn verliert die Keplersche Gleichung ihre Bedeutung, indem man bei dieser nicht mehr von exzentrischer Anomalie reden kann. Aber einerseits macht Cauchy darauf aufmerksam, daß dieselbe Gleichung auch bei einem Problem der homalographischen Kartenprojektion auftritt; andererseits deutet er an, daß dasselbe Verfahren auch dann zum Ziele führe, wenn die Exzentrizität wenig kleiner als 1 ist. In der Tat erkennt man, daß die erste Annäherung hier nicht geändert wird, wenn man für ε den unter (30) angegebenen Wert einführt.

29) $$A^n \sim \frac{\sqrt[3]{6}}{\pi\sqrt{3}}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\sqrt[3]{n^4}}$$

wie Cauchy angibt[1]) und auch Herr Debye[2]) gefunden hat.

Nachtrag[3]).

Will man dieses Verfahren auf eine Funktion anwenden, die nicht mehr eine ganze Funktion von $\cos u$ und $\sin u$ ist, so tritt eine neue Schwierigkeit insofern auf, als im Nenner nicht mehr ein einzelnes Glied als alle übrigen überwiegend angesehen werden kann. Das dann einzuschlagende Verfahren möge wieder an dem Beispiel der Mittelpunktsgleichung erläutert werden. Wird

30) $$\varepsilon = 1 - \frac{\eta}{n} \qquad \left(\text{also } \sqrt{1-\varepsilon^2} \sim \sqrt{\frac{2\eta}{n}}\right)$$

gesetzt, so ergibt sich zunächst:

31) $$\frac{1}{f(z)} \sim -\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + \cdots + \frac{\eta}{n} + \cdots.$$

Hier sind nun die überwiegenden Glieder nach den in der Theorie der singulären Punkte algebraischer Kurven ausgebildeten Methoden zu bestimmen; im vorliegenden Falle sind es die beiden angeschriebenen[4]). Das gibt:

32) $$C_n \sim -\frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{2\eta}{n^3}} \int \frac{\exp\left(-\frac{n t^3}{6}\right)\lambda\, dt}{\frac{\eta}{n} - \frac{1}{2}\lambda^2 t^2},$$

[1]) Oeuvrer (1) 12, p. 164. [2]) Math. Ann. 67, p. 557.

[3]) Dieser Nachtrag ist erst nach Vorlage der Note beigefügt worden.

[4]) Will man sich nicht mit der ersten Annäherung begnügen, so hat man zunächst den Nenner mit Hilfe des Weierstraßschen Satzes aus der Theorie der analytischen Funktionen zweier Variablen $\left(\text{hier } t \text{ und } \frac{1}{n}\right)$ in der Weise umzuformen, daß eine rationale ganze Funktion von t abgetrennt wird. Ist der Mangel dieses Satzes der Grund gewesen, weshalb Cauchy seinen Ansatz nicht weiter verfolgt hat?

wobei auf demselben Wege wie vorhin zu integrieren ist und dem Nullpunkt nicht ausgewichen zu werden braucht. Bei der Zusammenfügung der beiden Teile des Integrals heben sich die reellen Bestandteile weg und es bleiben nur die imaginären übrig. Die Substitution

33) $$t = \frac{w}{\lambda}\sqrt{\frac{2\eta}{n}}$$

liefert:

34) $$C_n \# \sim -2\,\Re\,\frac{2i}{n\pi}\int\frac{\exp\left(-\frac{w^3}{6}\sqrt{\frac{8\eta^3}{n}}\right)dw}{1-w^2}$$

und da in erster Annäherung die Exponentialfunktion durch 1 ersetzt, in Bezug auf w die Integration von 0 bis ∞ erstreckt werden darf, schließlich:

35) $$C_n \sim -2\,\Re\,\frac{i}{n\pi}\left[\log\frac{1+w}{1-w}\right]_0^{\lambda\infty} \sim \frac{2}{n}.$$