Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft III

November- und Dezembersitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Die Grundformeln der sphärischen und ebenen Tetragonometrie.

Von **E. v. Fedorow** (in St. Petersburg).

Vorgelegt von P. v. Groth in der Sitzung am 8. November 1913.

I. Die Grundformeln der sphärischen Tetragonometrie.

Das System der zonalen Berechnungen, welche speziell den Anforderungen der Kristallographie angepaßt ist und zu den einfachst möglichen mathematischen Operationen geführt hat[1]), wird mit der Verbreitung der kristallochemischen Analyse, wenn also die betreffenden Operationen auch die reinen Chemiker auszuführen genötigt sein werden, zur Sache der unumgänglichen Anwendung. Diese Unumgänglichkeit wurde besonders in der Arbeit „Der einfachste Operationsgang der kristallographischen Untersuchung" hervorgehoben[2]).

In diesen Arbeiten sind die für die gewöhnlichen Zwecke nötigen mathematischen Operationen erschöpft. Man hätte sicher sagen können, daß die für die kristallochemische Analyse dienenden graphischen Operationen trotz ihrer geringen Genauigkeit sich für die praktischen Zwecke hinreichend erweisen. Aber mit der Zeit wird es immer mehr und mehr

[1]) In der Arbeit des Verfassers „Die größtmögliche Vereinfachung bei zonalen Berechnungen und kristallographischen Berechnungen im allgemeinen" (Verhandl. d. K. Miner. Ges. in St. Petersburg 1906, **44**, 199; referiert von Herrn Barker in Zeitschr. für Kristallographie **46**, 202).

[2]) Annalen des Berg-Instituts zu St. Petersburg IV, 325.

fühlbar werden, daß die Ersetzung der grob angegebenen Zahlen durch die genaueren für die Aufsuchung der betreffenden Punkte in der zur Bestimmung dienenden Tabellen sehr willkommen ist.

Somit ist es aber wünschenswert, das Gebiet der einfachsten Berechnungen, also auch die Auffindung der dazu dienenden Formeln, auf eine breitere Basis zu stellen.

Dem Wesen nach fußen alle betreffenden Formeln auf denen der sphärischen Trigonometrie, welche, obgleich sie in dem Gesamtgebiet der mathematischen Analyse nur einen verschwindend kleinen Platz nimmt, aber wegen besonderer Wichtigkeit ihrer Grundformeln zum notwendigen Elemente der allgemeinen Bildung gehört.

Speziell sind aber in Anwendung auf kristallographische Berechnungen in dem zonalen System ihre Grundformeln durchaus nicht hinreichend, da in denselben kein Bezug auf die Grundeigenschaften der Größen in diesem Gebiet genommen wird, und zwar darauf, daß hier die sämtlichen geometrischen Elemente aus vier derselben sich vollständig ableiten lassen.

Das nähere Eindringen in die Sache lehrt uns, daß nicht allein die Möglichkeit der Berechnungen der Elemente der sphärischen Dreiecke, was eigentlich durch die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie erschöpft ist, sondern auch erfordert wird, den Weg aufzufinden, für jedes geometrische Element die betreffende Formel aufzustellen. Daß aber diese Aufgabe wirklich lösbar ist, ersieht man aus den folgenden Erwägungen.

Wenn auf der Sphäre wirklich vier Punkte gegeben sind, so läßt sich daraus eine unendlich große Gesamtheit von Punkten bestimmen, indem durch jeden Großkreisbogen die sämtlichen Punkte zur Bestimmung gelangen, welche als Schnittpunkte derselben mit den gegebenen und den neugezogenen Großkreisbögen erscheinen; die gegebenen sind aber diejenigen sechs Kreisbögen, welche sich durch je zwei von vier angegebenen Punkten bestimmen lassen.

Wie in der Ebene, so läßt sich auf dieselbe Art und Weise auch auf der Sphäre das geometrische Netz (Möbius)[1]) zustande bringen, und gerade dieses Netz entspricht dem kristallographischen Begriff des Komplexes vollständig.

Jeder Schnittpunkt dieses Netzes wird aber durch das Schneiden der Großkreisbögen eindeutig bestimmt. Daraus aber folgt, daß wir hier ausschließlich mit den linearen Verhältnissen der betreffenden trigonometrischen Funktionen zu tun haben. Die linearen Gleichungen sind aber stets und ausnahmslos in reellen Größen lösbar, und folglich können wir für jedes gegebene sphärische Winkelelement, als Resultat der linearen Lösung, die betreffende Formel ermitteln.

Die Aufgaben dieser Art sind also von spezieller Natur und sind in der gewöhnlich abgefaßten Form der Begriffe der sphärischen Trigonometrie nicht enthalten; dieselben kommen aber einer speziellen Verzweigung derselben zugute; und nur der Bestimmtheit halber werden wir dieselbe als die sphärische Tetragonometrie bezeichnen, und stellen uns hier die Aufgabe, die Grundformeln für diese spezielle Verzweigung aufzufinden.

Es muß dazu nur die Bemerkung beigefügt werden, daß die Großkreisbögen eigentlich nicht in einem einzigen, sondern in einem Paare von[2]) Punkten zum Schnitt kommen; folglich beziehen sich die linearen Gleichungen eigentlich auf Größen, welche von sich selbst auch quadratischen Ausdruck erhalten können; ohne diese Bemerkung hätten wir manchmal auf einen Widerspruch mit den allgemeinen Schlußfolgerungen stoßen können.

Die Zugehörigkeit eines sphärischen Punktpaares zum Komplexe (resp. dem sphärischen Netze) hat den speziellen kristallographischen Ausdruck dadurch erhalten, daß jedem derselben spezielle drei Indizes zukommen, welche aus ganzen Zahlen bestehen. Es mögen dabei den Indizes der drei zu

---

[1]) „Der baryzentrische Kalkül" (hier wurde eigentlich nur das auf der Ebene entwickelt).

[2]) von diametral entgegengesetzten.

Grunde liegenden Punkte beliebige ganze (aber dabei keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzende) Zahlen zugeschrieben werden, und nur dem vierten Punkt müssen die Indizes zukommen, welche den respektiven Summen der Indizes gleich sind. Dieser vierte Punkt kann mit keinem anderen Punktpaar auf einen Großkreisbogen fallen (sonst würde das geometrische Netz unbestimmt sein) und fällt speziell innerhalb desjenigen sphärischen Dreiecks, für dessen Eckpunkte seine Indizes die summarischen sind (weil sonst ein Widerspruch in der Bestimmung durch die Indizes entstehen würde).

Die Gesamtheit der Punkte eines Kreisbogens oder der in einem Punkte sich schneidenden Kreisbögen bilden ihrerseits die Teilkomplexe und können wieder durch Indizes in ganzen Zahlen zum Ausdruck kommen. Diese sind aber nur paarweise zu nehmen. Der Bestimmtheit wegen wollen wir dieselben als Zonenindizes (im Gegensatz zu gewöhnlichen Komplexindizes) bezeichnen.

Aus den vier Grundpunkten wollen wir zwei Punkte a und b besonders herausnehmen und als Ausgangspunkte (den Ausgangsflächen entsprechend) bezeichnen. Der Kreisbogen ab wird uns zur Ausgangszone dienen. Jeder dieser Punkte bestimmt seinerseits mit den beiden anderen c und d je eine Zone, und nun wollen wir die Lage dieser Zonen durch die Winkelgrößen bestimmen, welche diese Zonen mit der Ausgangszone bilden. Als Nullwinkel wird uns dabei derjenige dienen, welcher durch die Richtung ab für den Punkt a und durch die Richtung ba für den Punkt b bestimmt wird; ersetzen wir diese Richtung durch die entgegengesetzte, so ändert sich die Größe 0 in die Größe π.

Somit wird jeder der Punkte c und d durch je zwei Winkelgrößen als ihre sphärischen Koordinaten bestimmt, wenn dabei als die erste Konstante der Winkel ab gemeint wird. Diese fünf Konstanten sind nötig und zugleich hinreichend zur Bestimmung des Komplexes resp. des sphärischen Netzes. Bezeichnen wir die betreffenden Konstanten, außer ab, durch A, A_1, B, B_1, wobei sich der Buchstabe A auf Punkt a, der Buchstabe B

auf Punkt b bezieht und speziell die Konstanten A_1 und B_1 zu dem Punkte d gehören.

Zuletzt wollen wir zeigen, wie man sehr einfach die Koordinaten jedes beliebigen Punktes ermittelt, wenn derselbe durch die Indizes bestimmt wird.

Wollen wir, der Einfachheit wegen, dem Punkte a die Indizes (100), dem Punkte b — (010), dem Punkte c — (001) und dem Punkte d — (111) zuerteilen.

Dann erhalten wir für einen beliebigen Punkt, welchem die Indizes $(p_1 p_2 p_3)$ zukommen, die bestimmenden Werte $\begin{vmatrix} 100 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = [0 p_3 p_2]$ in dem Punkte a und $\begin{vmatrix} 010 \\ p_1 p_2 p_3 \end{vmatrix} = [p_3 \, 0 \, p_1]$ in dem Punkte b; suchen wir die diesen Werten entsprechenden Zonenindizes, wenn wir dem in Punkte a der Zone $ab = \begin{vmatrix} 100 \\ 010 \end{vmatrix} = [001]$ die Indizes $|10|$ und der Zone $ac = \begin{vmatrix} 100 \\ 001 \end{vmatrix} = [010]$ die Indizes $|01|$, also der Zone $\begin{vmatrix} 100 \\ 111 \end{vmatrix} = [011] = [001] + [010]$ die Indizes $|10| + |01| = |11|$, ebenso in dem Punkte b der Zone $ba = \begin{vmatrix} 010 \\ 100 \end{vmatrix} = [001]$ die Indizes $|10|$ und der Zone $bc = \begin{vmatrix} 010 \\ 001 \end{vmatrix} = [100]$ die Indizes $|01|$, also der Zone $\begin{vmatrix} 010 \\ 111 \end{vmatrix} = [101] = [001] + [100]$ die Indizes $|10| + |01| = |11|$ zukommen lassen.

Wir erhalten nämlich $[0 p_3 p_2] = p_2 [001] - p_3 [010]$; also $p_2 |10| - p_3 |01| = |p_2 \bar{p}_3|$ in dem Punkte a und $[p_3 0 p_1] = p_1 [001] + p_3 [100]$, also $p_1 |10| + p_3 |01| = |p_1 p_3|$ in dem Punkte b.

Und nun ist es leicht die Grundformel abzuleiten, mittelst welcher die Koordinaten des Punktes $(p_1 p_2 p_3)$ in dem Punkte a wie in dem Punkte b sich berechnen lassen.

Am einfachten entspringt diese Formel aus der Betrachtung der gnomonischen Projektion derjenigen Flächen, für welche die respektiven Punkte auf der Sphäre die Pole sind.

Also denken wir uns in dem Punkte O (Fig. 1) die gnomorische Projektion der Fläche a und eine Reihe der gnomorischen Projektionen anderer Flächen A, B, E, G . . ., welche (Projektionen) sich aber auf einer Geraden befinden (tautozonal sind) und von denen eine durch den Punkt A vertreten ist, welcher unendlich fern gedacht wird. Jede den Punkt O mit den übrigen Punkten verbindende Gerade vertritt eine Zone, von welchen die dem Punkte A entsprechende Zone als Ausgangszone angenommen und durch das Zonensymbol $|10|$ bezeichnet wird; schreiben wir der Zone OB die Indizes $|01|$ und der Zone OE die Indizes $|11|$ zu.

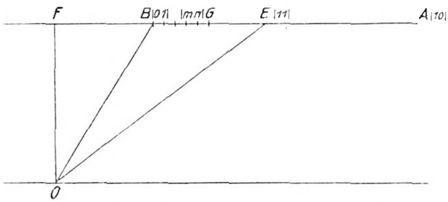

Fig. 1.

Die gnomonische Projektion setzt uns in den Stand, sofort die Zone zu ermitteln, welcher die Indizes $|mn|$ zukommen; dazu haben wir nur die Strecke BE in n gleiche Strecken zu teilen und von dem Punkte B an m solche Strecken zu einer zu verbinden; es sei dies der Punkt G. Außerdemne hmen wir F für den Fußpunkt des Perpendikels aus O.

Nun haben wir für die Strecken

$$BG = \frac{m}{n} BE$$

und natürlich auch

$$FB + BG = FG = FB + \frac{m}{n} BE.$$

$$= \frac{n-m}{n} FB + \frac{m}{n} (FB + BE) = \frac{n-m}{n} FB + \frac{m}{n} FE.$$

Also

$$nFG = (n - m)FB + mFE.$$

Nehmen wir den Abstand OF gleich eins, so haben wir in den Streckengrößen direkt die Tangenten der respektiven Winkel, wenn dieselben von dem Perpendikel OF respektive die Kotangenten der entsprechenden Winkel, wenn dieselben von OA aus abgelesen werden.

Folglich

$$n \operatorname{cotg} |mn| = (n - m) \operatorname{cotg} |01| + m \operatorname{cotg} |11|. \qquad 1)$$

Das ist die sehr wichtige gesuchte Formel[1]), und wir sehen jetzt ganz klar, wie mittelst derselben die Kotangenten der Koordinaten jedes beliebigen Punktes $|mn|$ in dem Punkte a wie in dem Punkte b zu ermitteln sind.

Für den speziellen Fall des zu $|11|$ harmonischen Punktes erhalten wir die Formel von Miller[2])

$$\operatorname{cotg} |\bar{1}1| = 2 \operatorname{cotg} |01| - \operatorname{cotg} |11|. \qquad 1\text{a})$$

Diese Formel ist in der Tetragonometrie von ganz besonderer Wichtigkeit, da dieselbe, allein genommen, hinreicht, um die Koordinaten sämtlicher Punkte des tetragonometrischen sphärischen Netzes zu berechnen. Es scheint nur einen Ausnahmefall zu geben, indem dieselbe scheinbar nicht geeignet ist, die Koordinaten der Punkte der Ausgangszone zu bestimmen.

Aber sogar dieser Ausnahmefall ist nur ein scheinbarer, weil auch für ihn dieselbe Formel anwendbar ist, natürlich aber auf speziellem Wege, weil der Fall selbst ein spezieller ist.

In diesem Falle wären nämlich diese Koordinaten sämtlich gleich 0 oder π, wenn dieselben auf die gleiche Art wie die übrigen gezählt würden. Nun sind aber dieselben auf eine

---

[1]) Diese Formel findet sich schon in Elementarlehrbüchern der Kristallographie, wie z. B. in dem „Verkürzten Kursus der Kristallographie" des Verfassers, Petersburg 1910.

[2]) Philosophical Magazine 1857, Febr. 93. Dieselbe wurde auch in der zweiten analytisch-kristallographischen Studie des Verfassers reproduziert (Kapitel III, Form. 8).

spezielle Art zu zählen und zwar durch die direkten Winkelabstände von den Punkten a und b.

In der Tat ist es nur nötig, einen einzigen Winkel in der Zone ab zu bestimmen, da, in Anbetracht des gegebenen Winkels ab, schon zwei Winkel in dieser Zone bekannt sind und dies schon ausreichend ist, um für alle übrigen Winkelgrößen die Formel 1) unmittelbar anwendbar zu machen.

Wählen wir für diesen Winkel denjenigen des Punktes e, welchem die Indizes zukommen, welche aus den Indizes von a und b sich einfach summieren lassen, also bei unserer Voraussetzung die Indizes (110).

Durch (110) und noch einen beliebigen Punkt wird eine Zone bestimmt, für deren sämtliche Punkte, mit einziger Ausnahme des Grenzpunktes e, die Formel 1) direkt anwendbar ist. Unter ihnen sind auch solche zum Punkte e außerordentlich angenäherte Punkte zu denken, daß, praktisch genommen, ihre Winkel mit a und b dieselben sind wie die des Punktes e. Im Limitfall wird dies mathematisch genau.

Da die gedachte Zone sonst eine beliebige ist resp. durch e und noch einen beliebig angenommenen Punkt bestimmt werden kann, so können wir für den letzteren auch z. B. den Punkt d (001) auswählen, und dann kann jeder Punkt dieser Zone durch die Indizes ausgedrückt werden, welche die Summe $x_1(110) + x_2(001)$ darstellt, also durch die Indizes (x_1, x_1, x_2).

Wir können sogleich die Zonenindizes bestimmen, welche der Zone $\left|\begin{matrix}100\\ x_1 x_1 x_2\end{matrix}\right| = [0 x_2 \bar{x}_1]$ resp. $\left|\begin{matrix}010\\ x_1 x_1 x_2\end{matrix}\right| = [x_2 0 \bar{x}_1]$ entsprechen; wenn wir die entsprechenden Indizes für die Punkte (110), (001) ermitteln und als $|10|$, $|01|$ bezeichnen.

Dieselben sind $[00\bar{1}]$, $[0\bar{1}0]$ in dem Punkte a und $[00\bar{1}]$, $[\bar{1}00]$ in dem Punkte b. Es ist leicht einzusehen, daß die gesuchten Zonenindizes $|x_1 x_2|$ für die beiden Punkte sind.

Also

$$x_2 \operatorname{cotg} |x_1 x_2| = [x_2 - x_1] \operatorname{cotg} |01| + x_1 \operatorname{cotg} |11| . \qquad \text{A)}$$

Steht der Punkt x dem Punkte e unendlich nahe, so haben wir für das Dreieck abx — $\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{\sin(abx)}{\sin(bax)}$, und zugleich nähert sich die letzte Größe unendlich der Größe $\frac{\operatorname{cotg}(bax)}{\operatorname{cotg}(abx)}$, da die beiden Werte von $\cos(abk)$ und $\cos(bak)$ sich unendlich der Einheit nähern.

Die Formel A) ist doppelt zu fassen, je nachdem dieselbe auf den Punkt a oder auf den Punkt b bezogen wird. Wollen wir den zweiten Fall durch Apostroph auszeichnen, so haben wir

$$\frac{\operatorname{cotg}|x_1 x_2|}{\operatorname{cotg}'|x_1 x_2|} = \frac{(x_2 - x_1)\operatorname{cotg}|A| + x_1 \operatorname{cotg}|A_1|}{(x_2 - x_1)\operatorname{cotg}|B| + x_1 \operatorname{cotg}|B_1|}$$

und im Limitfalle, sobald x_2 gleich 0 wird,

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{cotg}|x_1 x_2|}{\operatorname{cotg}'|x_1 x_2|} &= \frac{\sin'|x_1 x_2|}{\sin|x_1 x_2|} = \frac{\sin(ae)}{\sin(be)} \\ &= \frac{\operatorname{cotg}|A_1| - \operatorname{cotg}|A|}{\operatorname{cotg}|B_1| - \operatorname{cotg}|B|} = k^{1)}.\end{aligned} \tag{2}$$

Daraus läßt sich die Formel

$$\sin^2(be) = \frac{\sin^2(ab)}{k^2 + 2k\cos(ab) + 1} = \frac{\sin^2(ab)}{[k + \cos(ab)]^2 + \sin^2(ab)} \tag{3}$$

resp.

[1]) Dieselbe Formel läßt sich auch aus den bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie herleiten, und zwar aus den Formeln:

a) $\operatorname{cotg} de \cdot \sin ae = \operatorname{cotg} A_1 \sin(aed) + \cos ae \cos(aed)$

b) $\operatorname{cotg} de \cdot \sin be = \operatorname{cotg} B_1 \sin(bed) + \cos be \cos(bed)$

c) $\operatorname{cotg} ce \cdot \sin ae = \operatorname{cotg} A \sin(aec) + \cos ae \cos(aec)$

d) $\operatorname{cotg} ce \cdot \sin be = \operatorname{cotg} B \sin(bec) + \cos be \cos(bec)$,

wenn wir das Verhältnis der Differenzen a) und c) resp. b) und d) bestimmen und dabei in Betracht nehmen, daß

$$(aec) = (aed), \quad (bec) = (bed) \quad \text{und} \quad \sin(bed) = \sin(aed).$$

Darauf hat mich Herr Professor Baumann aufmerksam gemacht. Die Formel wurde zuerst in den Annalen des Berg-Instituts IV, 65 abgeleitet.

$$\operatorname{cotg}(b\,e) = \frac{k + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)}$$

und 3 a)

$$\operatorname{cotg}(a\,e) = \frac{\frac{1}{k} + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)} = \frac{1 + k\cos(a\,b)}{k\sin(a\,b)}$$

herleiten.

Für den dem Punkte e harmonisch konjugierten Punkt e' erhalten wir ganz analog

$$\sin^2(b\,e') = \frac{\sin^2(a\,b)}{k^2 - 2k\cos(a\,b) + 1} = \frac{\sin^2(a\,b)}{[k - \cos(a\,b)]^2 + \sin^2(a\,b)} \qquad 3\text{ b)}$$

resp.

$$\operatorname{cotg}(b\,e') = \frac{-k + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)}$$

und 3 c)

$$\operatorname{cotg}(a\,e') = \frac{\frac{1}{k} - \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)} = \frac{1 - k\cos(a\,b)}{k\sin(a\,b)},$$

wobei

$$2\operatorname{cotg}(a\,b) = \operatorname{cotg}(a\,e) - \operatorname{cotg}(a\,e') = \operatorname{cotg}(b\,e) + \operatorname{cotg}(b\,e').$$

Weiter erhalten wir noch

$$\operatorname{cotg}(e\,e') = \operatorname{cotg}(a\,e + a\,e') = \operatorname{cotg}(b\,e' - b\,e) = \frac{1 - k^2}{2k\sin(a\,b)}$$

und 4)

$$2\operatorname{cotg}(e\,e') = \operatorname{cotg}(a\,e) - \operatorname{cotg}(b\,e) = \frac{1 - k^2}{k\sin(a\,b)}.$$

Im besonderen, wenn $k = 1$, erhalten wir

$$\sin(a\,e) = \sin(b\,e) = \sin\frac{a\,b}{2},$$

und dann

aus 3) $$\sin^2\frac{a\,b}{2} = \frac{\sin^2(a\,b)}{2(1 + \cos a\,b)} = \frac{1 - \cos(a\,b)}{2}$$

aus 3 a) $$\operatorname{cotg}\frac{a\,b}{2} = \frac{1 + \cos(a\,b)}{\sin(a\,b)}$$

aus 4) $$\operatorname{cotg}(e\,e') = 0,$$

was übrigens selbstverständlich ist.

Jetzt gehen wir zur Ableitung der Formel für die Winkel zwischen den Ausgangspunkten a resp. b und den übrigen Punkten, z. B. dem Punkte c über.

Dafür dienen die bekannten Gleichungen

$$\operatorname{tang}\frac{ac+bc}{2} = \operatorname{tang}\frac{ab}{2}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}(B-A)}{\cos\frac{1}{2}(B+A)}$$

und

$$\operatorname{tang}\frac{ac-bc}{2} = \operatorname{tang}\frac{ab}{2}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(B-A)}{\sin\frac{1}{2}(B+A)}.$$

Außerdem haben wir noch

$$\operatorname{tang}\left\{\frac{ac+bc}{2}+\frac{ac-bc}{2}\right\} = \operatorname{tang}(ac),$$

und noch

$$\cos\frac{1}{2}(B-A) = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{1}{2}(B+A) = \cos\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{1}{2}(B-A) = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}-\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\sin\frac{1}{2}(B+A) = \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}$$

und endlich

$$\operatorname{tang}(M+N) = \frac{\operatorname{tang}M+\operatorname{tang}N}{1-\operatorname{tang}M\cdot\operatorname{tang}N}.$$

Nach der Ausführung der nötigen Substitutionen und Reduktionen erhalten wir endgültig

$$\operatorname{cotg}(bc) = \operatorname{cotg}A\operatorname{cosec}(ab)\sin B+\operatorname{cotg}(ab)\cos B \qquad 5)$$

und

$$\operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg}B\operatorname{cosec}(ab)\sin A+\operatorname{cotg}(ab)\cos A. \qquad 5\,a)$$

Im besonderen, wenn $A=B$, erhalten wir

$$\operatorname{cotg}(bc) = \operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg}\frac{ab}{2}\cos A,$$

und wenn

$$A = B = \frac{\pi}{2}, \quad \text{so ist} \quad ac = bc = \frac{\pi}{2},$$

was selbstverständlich ist.

Die Formeln 5) würden direkt für alle Punkte des Netzes anwendbar sein, wenn wir für diese Punkte die respektiven Winkel A und B bestimmen, was aber, wie oben erklärt wurde, durch die Anwendung der Grundformel 1) geschieht.

Nebst der Grundformel 1) ist diese für die praktische Kristallographie die wichtigste, da bei der Justierung eines Kristalles nach Ausgangsflächen gerade 1. die Winkel zwischen Zonen und 2. zwischen allen Flächen überhaupt und der Ausgangsfläche zur direkten Beobachtung und Ablesung kommen. Dies sind gerade diejenigen sphärischen Koordinaten jeder Fläche, welche an den beiden Kreisen eines Universalgoniometers abgelesen werden (für die Zonenwinkel die sogenannten Koordinaten φ und für die Flächenwinkel die Koordinaten ϱ).

In einem Dreieck ace haben wir somit die Ausdrücke gefunden für zwei Seiten ae und ac, und der Winkel A zwischen ihnen ist die gegebene Konstante. Folglich haben wir die ausreichende Anzahl der Elemente für die Bestimmung der übrigen und speziell des Winkels E (im Punkte e).

Bezeichnen wir noch durch C den Winkel mit den Punkte c als Scheitelpunkt, so haben wir

$$\operatorname{cotg} \frac{E+C}{2} = \operatorname{tang} \frac{A}{2} \frac{\cos \frac{ac+ae}{2}}{\cos \frac{ac-ae}{2}}\,.$$

$$\operatorname{cotg} \frac{E-C}{2} = \operatorname{tang} \frac{A}{2} \frac{\sin \frac{ac+ae}{2}}{\sin \frac{ac-ae}{2}}.$$

Außerdem haben wir noch

$$\operatorname{cotg} \left\{ \frac{E+C}{2} + \frac{E-C}{2} \right\} = \operatorname{cotg} E$$

und noch

$$\cos\frac{ac+ae}{2} = \cos\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} - \sin\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

$$\cos\frac{ac-ae}{2} = \cos\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} + \sin\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

$$\sin\frac{ac+ae}{2} = \sin\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} + \cos\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

$$\sin\frac{ac-ae}{2} = \sin\frac{ac}{2}\cos\frac{ae}{2} - \cos\frac{ac}{2}\sin\frac{ae}{2}$$

und endlich

$$\operatorname{cotg}(M+N) = \frac{\operatorname{cotg} M \operatorname{cotg} N - 1}{\operatorname{cotg} M + \operatorname{cotg} N}.$$

Nach der Ausführung der nötigen Substitutionen und Reduktionen erhalten wir endgültig

$$\operatorname{cotg} E = \operatorname{cotg}(ac) \operatorname{cosec} A \sin(ae) - \operatorname{cotg} A \cos(ae). \qquad 6)$$

Es bleibt noch $\operatorname{cotg}(ac)$ durch den Wert 5a) zu substituieren und erhalten wir die Gleichung in der Form

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E = \{&\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\\ &+ \operatorname{cotg} A[\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(ae)]\}\sin(ae)\end{aligned} \qquad 6\,a)$$

und

$$\begin{aligned}-\operatorname{cotg} E = \{&\operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab)\\ &+ \operatorname{cotg} B[\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(be)]\}\sin(be)\end{aligned}$$[1].

Natürlich auch

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E' = \{&\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\\ &- \operatorname{cotg} A[\operatorname{cotg}(ab) - \operatorname{cotg}(ae')]\}\sin(ae').\end{aligned} \qquad 7)$$

Mit Berücksichtigung der Formeln 3a) und 3b) können die Formeln 6a) und 7) noch verkürzt werden und zwar

$$\operatorname{cotg} E \sin(ab) = (\operatorname{cotg} B - \frac{\operatorname{cotg}}{k} A)\sin(ae)$$

und

$$-\operatorname{cotg} E \sin(ab) = (\operatorname{cotg} A - k \operatorname{cotg} B)\sin(be)$$

oder eigentlich

[1] Natürlich ist die Summe dieser beiden Ausdrücke gleich Null.

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E \sin(ab) &= (k \operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} A) \sin(be) \\ &= \operatorname{cotg} B \sin(ae) - \operatorname{cotg} A \sin(be).\end{aligned} \qquad 6\,\mathrm{a}')$$

Diese merkwürdige Formel, deren Elemente von den Konstanten A_1 und B_1 ganz unabhängig sind, besitzt somit allgemeine Bedeutung, indem der Punkt e auf der Ausgangszone ganz beliebig angenommen und durch einen unbestimmten Punkt x ersetzt werden kann, und dann läßt sich die allgemeine Formel

$$\operatorname{cotg} X \sin(ab) = \operatorname{cotg} B \sin(ax) - \operatorname{cotg} A \sin(bx) \qquad 8)$$

aufstellen.

Nehmen wir, im besonderen, den Punkt e', so erhalten wir

$$-\operatorname{cotg} E' \sin(ab) = \operatorname{cotg} B \sin(ae') - \operatorname{cotg} A \sin(be'). \qquad 8\,\mathrm{a})$$

Ersetzen wir den Punkt e durch den Punkt d, so erhalten wir

$$\operatorname{cotg} X_1 \sin(ab) = \operatorname{cotg} B_1 \sin(ax) - \operatorname{cotg} A_1 \sin(bx)\text{[1]}. \qquad 8\,\mathrm{b})$$

Im besonderen, wenn $X_1 = \frac{\pi}{2}$, erhalten wir

$$\operatorname{cotg} A_1 \sin(bx) = \operatorname{cotg} B_1 \sin(ax). \qquad 8\,\mathrm{c})$$

Jetzt sind zwei Winkel X und X_1 in dem Punkte x bekannt, was uns in den Stand setzt, auch den letzten als Ausgangspunkt zu nehmen respektive einen der gegebenen durch denselben zu ersetzen.

Bei der Deutung der Formel 8) ist zu berücksichtigen, in welcher Richtung jeder Winkel abgezählt wird. Wir haben zwar für A und B die umgekehrten Richtungen angenommen, und für den Winkel x dieselbe, wie für B. Mit der Umkeh-

---

[1]) Aus 6 a') und 8 b) folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{cotg} E \sin(ab) &= \operatorname{cotg} B \sin(ae) - \operatorname{cotg} A \sin(be) \\ &= \operatorname{cotg} B_1 \sin(ae) - \operatorname{cotg} A_1 \sin(be);\end{aligned}$$

also

$$\sin(ae)(\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} B) = \sin(be)(\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} B_1)$$

respektive

$$\sin(ae) = k \sin(be),$$

was mit 2) identisch ist.

rung der Richtung des betreffenden Winkels ist zugleich in der Formel $+$ und $-$ gegenseitig zu ersetzen.

Bringen wir z. B. den Punkt x in die Lage a, so erhalten wir $\operatorname{cotg} X = -\operatorname{cotg} A$; bringen wir denselben Punkt in die Lage b, so finden wir $\operatorname{cotg} X = \operatorname{cotg} B$.

Das ist der Grund, warum in der Formel 8a) dem $\operatorname{cotg} E'$ der negative Wert zugeschrieben worden ist, da dieser Winkel in derselben Richtung wie A abgezählt wird.

Durch die Formel 8) wird nicht nur die Aufgabe gelöst, die Winkel zu berechnen, deren Scheitelpunkte x der Ausgangszone angehören, sondern zugleich die Aufgabe der Berechnung des Winkels zwischen zwei beliebigen Punkten k und l des Netzes.

Zur Berechnung des Winkels ce sind nämlich in dem Dreieck ace die Seite ae und die beiden anliegenden Winkel A und E bekannt. Dasselbe gilt für die Seite de und das Dreieck ade, in welchem außer der Seite ae die beiden Winkel A_1 und E bekannt sind.

Nun können wir die beiden Punkte d und e durch beliebige zwei Punkte k und l ersetzen, wozu es nötig ist, zuerst die Koordinaten A_k, A_l, B_k und B_l zu berechnen; wie dies zu tun, wurde oben erklärt. Ist dies geschehen, so erhalten wir vermittelst der Formel 8) den Wert des Winkels axk, wo x der Schnittpunkt der Ausgangszone mit der Zone kl und dem Punkte e analog ist. Somit werden die Winkel xk und xl bestimmt, und der gesuchte Winkel ist die Differenz zwischen beiden.

Die Berechnung der Werte ce und de geschieht nach der Formel 5), indem der Punkt b durch den Punkt e ersetzt wird, was jetzt möglich ist, da der Winkel ae und die beiden Winkel A und E schon bekannt sind.

Somit sind fast alle Grundaufgaben der sphärischen Tetragonometrie gelöst. Es bleibt nur die Formel abzuleiten, welche den Wert des Winkels zwischen zwei beliebigen Zonen des Netzes ausdrückt.

Dies geschieht, wenn wir eigentlich die Formel für einen einzigen, z. B. für den Winkel C ermitteln. Es bleibt also übrig, den Beweis beizubringen, daß ein solcher Winkel durch eine bestimmte Formel wirklich zum Ausdruck kommen kann in den für das Netz charakteristischen Konstanten.

Wie wir aus der Formel 6) ersehen, werden bei der Substitution e durch c, also auch E durch C, in derselben die Funktionen $\sin(ac)$ und $\cos(ac)$ und nicht $\operatorname{cotg}(ac)$ angetroffen, und nur für die letzte hätten wir rationell mittelst 5 a) die Substitution direkt ausführen können. Es bleibt also nur der indirekte Weg übrig, welchem wir auch hier folgen werden.

Wir können nämlich dieselbe in der Form

$$\frac{\operatorname{cotg} C}{\sin(ac)} = \operatorname{cotg}(ae)\ \operatorname{cosec} A - \operatorname{cotg}(ac)\operatorname{cotg} A$$

darstellen. Der zweite Teil der Gleichung ist dadurch in die Form gebracht, welche ganz gut die rationelle Substitution zuläßt, aber in dem ersten bleibt noch der Faktor (ac) übrig, von welchem wir aber durch folgende Operationen uns befreien können, und zwar infolgedessen, daß die Verhältnisse wie $\sin(ac):\sin(bc)$ durch das Verhältnis $\sin B : \sin A$ ersetzt werden können.

Somit wird es möglich, auch das Verhältnis zweier Kotangenten der Winkel in dem Punkte c rationell auszudrücken und mit Hilfe des Ausdrucks für die Kotangente der Summe solcher Winkel auch zum rationellen Ausdruck der Kotangenten selbst zu kommen.

Wenden wir diese Erwägungen für die folgenden Winkel an:

$$1)\quad \frac{\operatorname{cotg} C_1}{\sin(ac)} = \operatorname{cotg}(ac)\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg}(ae')\operatorname{cosec} A$$

$$= \frac{1}{\sin A \sin(ab)}\left[\operatorname{cotg} B \cos(ab)\cos A \sin A + \cos^2 A\right.$$

$$\left.+ \operatorname{cotg}(ae')\sin(ab)\right].$$

$$2)\ \frac{\operatorname{cotg}(C - C_1)}{\sin(a\,c)} = -\operatorname{cotg}(a\,c)\operatorname{cotg}A + \operatorname{cotg}(a\,e)\operatorname{cosec}A$$

$$= \frac{1}{\sin A \sin(a\,b)}[-\operatorname{cotg}B\cos(ab)\cos A\sin A$$

$$-\cos^2 A + \operatorname{cotg}(a\,e)\sin(a\,b)]$$

$$3)\ \frac{\operatorname{cotg}(C_{-1} - C)}{\sin(b\,c)} = -\operatorname{cotg}(b\,c)\operatorname{cotg}B + \operatorname{cotg}(b\,e)\operatorname{cosec}B$$

$$= \frac{1}{\sin B \sin(a\,b)}[-\operatorname{cotg}A\cos(a\,b)\cos B\sin B$$

$$-\cos^2 B + \operatorname{cotg}(b\,e)\sin(a\,b)]$$

und

$$4)\ \frac{\operatorname{cotg}(-C_{-1})}{\sin(b\,c)} = \operatorname{cotg}(b\,c)\operatorname{cotg}B - \operatorname{cotg}(b\,e')\operatorname{cosec}B$$

$$= \frac{1}{\sin B \sin(a\,b)}[\operatorname{cotg}A\cos(a\,b)\cos B\sin B$$

$$+\cos^2 B - \operatorname{cotg}(b\,e')\sin(a\,b)].$$

Nehmen wir jetzt die Verhältnisse aller dieser Größen zu der ersten von ihnen und erhalten dann einige Verkürzungen infolge der Relationen $\sin(a\,c) : \sin(bc) = \sin B : \sin A$ und $\sin(a\,c) : \sin(a\,c) = 1$; somit werden sogleich die Größen $\sin(a\,c)$ und $\sin(b\,c)$ eliminiert.

Die Summe der genommenen Winkel ist Null, weil

$$C_1 + (C - C_1) + (C_{-1} - C) + (-C_{-1}) = 0.$$

Die Kotangente dieser Summe ist also gleich ∞.

Der Ausdruck für die Kotangente dieser Summe ist:

$$\operatorname{cotg}(1 + 2 + 3 + 4)$$

$$= \frac{M^{1)}}{\operatorname{ctg}1 + \operatorname{ctg}2 + (1 - \operatorname{ctg}1\operatorname{ctg}2)\operatorname{ctg}3 + [1 - \operatorname{ctg}1\operatorname{ctg}2 - (\operatorname{ctg}1 + \operatorname{cotg}2)\operatorname{ctg}3]\operatorname{ctg}4}.$$

Ist diese Summe gleich Null, so ist auch der Zähler dieses Bruches gleich Null.

[1]) Der Wert von M ist für das weitere unnötig.

Wollen wir, der Kürze wegen, die Relationen

$$\frac{\operatorname{cotg} 1}{\operatorname{cotg} 1}, \quad \frac{\operatorname{cotg} 2}{\operatorname{cotg} 1}, \quad \frac{\operatorname{cotg} 3}{\operatorname{cotg} 1} \quad \text{und} \quad \frac{\operatorname{cotg} 4}{\operatorname{cotg} 1}$$

respektive durch (1), (2), (3), (4) besprechen, so erhalten wir daraus

$$\operatorname{tang}^2 (1) = \frac{(2), (3) + (2)(4) + (3)(4) + (2)(3)(4)}{(1) + (2) + (3) + (4)}.$$

Also wird die Größe der Kotangente C_1 bestimmt (also die des Winkels $a c e'$), wenn wir die betreffenden Substitutionen zur Ausführung bringen, und dann ist die Aufgabe wesentlich gelöst.

Falls wir respektive durch (1'), (2'), (3'), (4') diejenigen Trinome bezeichnen, welche in den obigen vier Formeln in Klammern enthalten sind, so finden wir

$$(2) = \frac{(2')}{(1')}; \qquad (3) = \frac{\sin A}{\sin B} \frac{(3')}{(1')}; \qquad (4) = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{(4')}{(1')}.$$

Infolgedessen nimmt der Zähler die Form

$$\frac{\sin B\,[(1') + (2')] + \sin A\,[(3') + (4')]}{\sin B\,(1')}$$

und der Nenner entwickelt sich in der Form

$$\frac{1}{(1')^3} \left\{ \frac{\sin A}{\sin B} [(1')(2')(3') + (1')(2')(4')] \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B} [(1')(3')(4') + (2')(3')(4')] \right\}$$

$$= \frac{(1')(2')(3')(4') \left\{ \sin A \sin B \left[\frac{1}{(4')} + \frac{1}{(3')} \right] + \sin^2 A \left[\frac{1}{(2')} + \frac{1}{(1')} \right] \right\}}{\sin^2 B\,(1')^3}$$

$$= \frac{\sin^2 A\,[(1') + (2')]\,(3')(4') + \sin A \sin B\,[(3') + (4')]\,(1')(2')}{\sin^2 B\,(1')^3}.$$

Nun aber

$$(1') + (2') = \sin (a b)\,[\operatorname{cotg} (a e) + \operatorname{cotg} (a e')]$$

$$= \sin (a b)\,[2 \operatorname{cotg} (a b) + 2 \operatorname{cotg} (a e')] = \frac{2}{k}$$

und

$$(3') + (4') = \sin(a\,b)\,[\operatorname{cotg}(b\,e) - \operatorname{cotg}(b\,e')]$$
$$= \sin(a\,b)\,[2\operatorname{cotg}(a\,b) - 2\operatorname{cotg}(b\,e')] = 2\,k$$

und noch

$$(1')(2') = -[\operatorname{cotg} B \cos(a\,b)\cos A \sin A + \cos^2 A]^2$$
$$+ [\operatorname{cotg} B \cos(a\,b)\cos A \sin A + \cos^2 A]\sin(a\,b)[\operatorname{cotg}(a\,e) - \operatorname{cotg}(a\,e')]$$
$$+ \operatorname{cotg}(a\,e)\operatorname{cotg}(a\,e')\sin^2(a\,b).$$

Berücksichtigt man noch die Gleichungen

$$\operatorname{cotg}(a\,e) - \operatorname{cotg}(a\,e') = 2\operatorname{cotg}(a\,b)$$

und

$$\operatorname{cotg}(a\,e)\operatorname{cotg}(a\,e')\sin^2(a\,b) = -\cos^2(a\,b) + \frac{1}{k^2},$$

so findet man

$$(1')(2') = -[\operatorname{cotg} B \cos(a\,b)\cos A \sin A + \cos^2 A - \cos(a\,b)]^2 + \frac{1}{k^2}.$$

Auf dieselbe Weise erhält man

$$(3')(4') = -(\operatorname{cotg} A \cos(a\,b)\cos B \sin B + \cos^2 B - \cos(a\,b)]^2 + k^2.$$

Somit, unter Bezeichnung durch K^2 des Bruches

$$\frac{1 + k^2 \dfrac{\sin A}{\sin B}}{k^2 - [\operatorname{cotg} A \cos(a\,b)\cos B \sin B + \cos^2 B - \cos(a\,b)]^2 + \dfrac{\sin B}{\sin A}[\operatorname{cotg} B \cos(a\,b)\cos A \sin A + \cos^2 A - \cos(a\,b)]^2}$$

findet man endgültig

$$\operatorname{cotg} C_1 = \frac{\sin B}{\sin A} K(1'), \text{ und daraus } \operatorname{cotg}(C - C_1) = \frac{\sin B}{\sin A} K(2')$$
$$\operatorname{cotg}(C_{-1} - C) = \frac{\sin A}{\sin B} K(3') \qquad 9)$$
$$\operatorname{cotg}(-C_{-1}) = \frac{\sin A}{\sin B} K(4'),$$

wo

$$(1') = \operatorname{cotg} B \cos(ab) \cos A \sin A + \cos^2 A + \operatorname{cotg}(ae') \sin(ab)$$
$$= (\operatorname{cotg} B \cos A \sin A - 1) \cos(ab) + \cos^2 A + \frac{1}{k}$$

$$(2') = -\operatorname{cotg} B \cos(ab) \cos A \sin A - \cos^2 A + \operatorname{cotg}(ae) \sin(ab)$$
$$= (-\operatorname{cotg} B \cos A \sin A + 1) \cos(ab) - \cos^2 A + \frac{1}{k}$$

$$(3') = \operatorname{cotg} A \cos(ab) \cos B \sin B - \cos^2 B + \operatorname{cotg}(be) \sin(ab)$$
$$= (-\operatorname{cotg} A \cos B \sin B + 1) \cos(ab) - \cos^2 B + k$$

und

$$(4') = \operatorname{cotg} A \cos(ab) \cos B \sin B - \cos^2 B - \operatorname{cotg}(be') \sin(ab)$$
$$= (\operatorname{cotg} A \cos B \sin B - 1) \cos(ab) + \cos^2 B + k.$$

Der allgemeine Satz über den rationellen Ausdruck beliebiger Elemente des sphärischen tetragonometrischen Netzes ist somit bewiesen, da auch diese Formeln zu ermitteln gelungen ist.

Diese Formel ist aber keineswegs von solchem Grade der Einfachheit, daß die Berechnung mit Hilfe derselben empfehlenswert ist. Es scheint im Gegenteil vorteilhafter, die Berechnung in zwei Stadien zu verteilen, weil dann Formeln von größerem Grade der Einfachheit zur Anwendung gelangen.

Und gerade für die letzteren Berechnungen können sehr einfache Formeln zur Anwendung gebracht werden.

Wir können dabei von den allgemein bekannten Formeln ausgehen, welche dazu dienen, eine Seite zu berechnen, wenn alle diese Winkel des phärischen Dreiecks gegeben sind.

Bezeichnen wir dann $A + B + C - \pi$ durch $2P$[1]), so ist

$$N = \sin^2 \frac{ab}{2} \sin A \sin B = \sin P \sin(C - P)$$
$$= \sin\left(\frac{C}{2} + \frac{A + B - \pi}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2} - \frac{A + B - \pi}{2}\right).$$

[1]) C' bedeutet in diesen Formeln die Größe des Winkels ACB.

Entwickeln wir daraus die Sinusse der gegebenen Summen, so finden wir

$$N = \sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A+B}{2} - \cos^2\frac{C}{2}\cos^2\frac{A+B}{2} = \sin^2\frac{C}{2} - 1 + \sin^2\frac{A+B}{2}.$$

Also

$$\sin^2\frac{C}{2} = \sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} - \sin^2\frac{A+B}{2} + 1$$

und

$$\cos^2\frac{C}{2} = -\sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} + \sin^2\frac{A+B}{2}.$$

Folglich

$$\sin^2 C = \sin^2(A+B) - 4\left[\sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} + \frac{\cos(A+B)]^2}{2} + \cos^2(A+B)\right.$$

und

$$\cos^2 C = \left\{2\sin A \sin B \sin^2\frac{ab}{2} + \cos(A+B)\right\}^2;$$

Was in Paranthesen steht, ist aber gleich

$$\sin A \sin B\left(2\sin^2\frac{ab}{2} - 1\right) + \cos A \cos B$$

$$= \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos(ab).$$

Bei dem Übergang zur Quadratwurzel ist

$$\cos C = \sin A \sin B \cos(ab) - \cos A \cos B \qquad 10)$$

zu nehmen, da im Fall $A = \frac{\pi}{2}$ und $B = \frac{\pi}{2}$ $\cos C$ $\cos ab$ (und nicht $-\cos ab$) gleich sein muß.

Diese einfache Formel kann als allgemeine Lösung der Aufgabe betrachtet werden, da nicht nur für die Punkte a und b, sondern für beliebige Punkte der Ausgangszone, ebenso wie für einen beliebigen Punkt c nach der Formel 8) die Werte von A und B berechenbar sind, und (ab) läßt sich für beliebige Punkte der Ausgangszone unter Berücksichtigung der Gleichungen 2) und 3) und der Grundformel 1) berechnen.

Dies würde praktischer sein, als die betreffenden Winkel nach der Formel 9) zu berechnen.

Falls aber einige Winkel der Punkte des Netzes mit den Ausgangspunkten unterwegs bekannt geworden sind, zum Beispiel der Winkel (ac), so ist empfehlenswert, noch die einfachere allgemein bekannte Formel $\frac{\sin C}{\sin (ab)} = \frac{\sin B}{\sin (ac)}$ zu benutzen.

Somit ist die Aufgabe der Auffindung der Grundformeln der sphärischen Tetragonometrie abgeschlossen.

Zum Schlusse wollen wir einige Worte der Anwendung dieser Formeln auf die Kristallographie widmen und mit tabellarischer Übersicht der einfachsten und wichtigsten derselben schließen.

Diejenigen Winkelgrößen, welche wir als Hauptkonstanten bezeichnet haben, lassen sich mittels des Universalgoniometers direkt ablesen, wenn man den betreffenden Kristall zweimal justiert, einmal nach der Fläche a und ein zweites Mal nach der Fläche b[1]. Wird die Messung mehrere Male wiederholt und der Mittelwert genommen, so haben wir nicht nur die den gegebenen Kristallkomplexen möglichst genau ermittelten charakteristischen Werte, sondern zugleich die Größen, deren Substitution in die Grundformel 1) uns auf möglichst einfache Weise die Werte der Koordinaten aller übrigen Flächen gibt, so daß es sich als leicht erweist, die beobachteten Werte mit den berechneten zu vergleichen.

Außerdem aber ergeben sich bei dieser Beobachtung die Winkelgrößen zwischen den Ausgangsflächen und den übrigen Flächen. Dieselben Werte können wir aber teils nach den Formeln 2) bis 4) (in Bezug auf die Flächen der Ausgangszone) teils nach der Formel 5) berechnen und somit wieder die beobachteten und berechneten Werte vergleichen.

[1] In der Tat wird solche zweimalige Justierung nur selten nötig, da wir in den übrigen meisten Fällen in dem Komplexe wenigstens eine Symmetrieebene haben; sind aber a und b die symmetrischen Punkte, so sind zugleich die Winkel $A = B$ und $A_1 = B_1$.

In dem Falle, daß der Kristallkomplex eine Symmetrieebene besitzt, ist die zweimalige Justierung ganz unnötig, da wir für diesen Fall (a) gleich (b) nehmen können, das heißt, alle Mittelwerte, welche auf (a) Bezug haben, werden den symmetrischen Werten gleich, welche denselben Bezug auf (b) haben; im besonderen ist dies für A, A_1 der Fall, welche respektive B, B_1 gleich sein werden.

Aber sogar in dem Fall, wenn keine Symmetrie da ist, ist es leicht, von der zweiten Justierung abzusehen, indem man auf Grund der durch Messung am sichersten ermittelten Winkelwerte diejenigen von B und B_1 berechnet.

Die Berechnung hängt natürlich von der Art der gegebenen Größen ab.

Wollen wir solche Berechnungen für zwei wichtigste Fälle ausführen.

1. Es seien (außer (ab), A und A_1) die Winkel (ac) und (ad) gegeben. Dann erhalten wir, gemäß der Formel 5)

$$\operatorname{cotg}(ac) = \operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab) \sin A + \operatorname{cotg}(ab) \cos A;$$

folglich

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} B &= \frac{\operatorname{cotg}(ac)\sin(ab) - \cos(ab)\cos A}{\sin A} \\ &= \operatorname{cotg}(ac)\sin(ab)\operatorname{cosec} A - \cos(ab)\operatorname{cotg} A \end{aligned} \tag{11)}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} B_1 &= \frac{\operatorname{cotg}(ad)\sin(ab) - \cos(ab)\cos A_1}{\sin A_1} \\ &= \operatorname{cotg}(ad)\sin(ab)\operatorname{cosec} A_1 - \cos(ab)\operatorname{cotg} A_1. \end{aligned} \tag{11a)}$$

2. Es seien die Winkel (ag_1) und (ah_1) gegeben. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} B &= \frac{\operatorname{cotg}(ah_1) - \operatorname{cotg}(ab)\cos A_1}{\operatorname{cosec}(ab)\sin A_1} \\ &= \operatorname{cotg}(ah_1)\sin(ab)\operatorname{cosec} A_1 - \cos(ab)\operatorname{cotg} A_1 \end{aligned} \tag{12)}$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{cotg} B_1 &= \frac{\operatorname{cotg}(ag_1) - \operatorname{cotg}(ab)\cos A}{\operatorname{cosec}(ab)\sin A} \\ &= \operatorname{cotg}(ag_1)\sin(ab)\operatorname{cosec} A - \cos(ab)\operatorname{cotg} A. \end{aligned} \tag{12a)}$$

Daraus ersehen wir, daß, diesem Rechnungsgange gemäß, stets eine einzige Messung ausreichend ist, um alle Berechnungen auf hier dargelegte einfachste Art ausführen zu können.

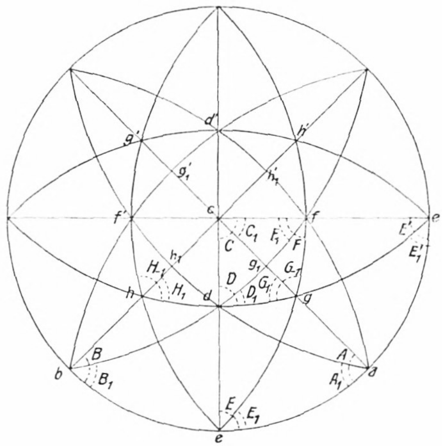

Fig. 2.

Überhaupt sind alle in der kristallographischen Praxis auftretenden Fälle in drei zu teilen; diesen drei Fällen entsprechend ist die beigegebene Tabelle der Formeln in drei Teile zerlegt.

Es wurde schon oben erwähnt, daß in allen Fällen eine einzige Justierung hinreichend ist, um daraus sehr einfach alle nötigen fünf Konstanten zu berechnen, indem zwei Flächen für die Ausgangsflächen von sphärischen bipolaren Koordinaten angenommen werden.

Im allgemeinen sind für alle Syngoniearten, außer der triklinen, diese beiden Ausgangsflächen die symmetrischen, so daß für die beiden die respektiven Konstanten die gleichen sind. Diese beiden Flächen liegen aber entweder 1. in der Hauptzone, oder 2. in der durch die Hauptfläche hindurchgehenden Zone, und in diesen beiden Fällen benutzen wir für die weiteren Berechnungen die beiden ersten Tabellen. Dies ist nicht der Fall ausschließlich nur dann, wenn an dem gegebenen Kristall keine einzige Fläche der Hauptzone und auch die Hauptfläche nicht vertreten ist.

Der letzte Fall gehört aber zu den seltenen, und zwar fast ausschließlich zu den Komplexen der dodekaedrischen Hauptstruktur, wenn außerdem die vertretene Modalilät die der I. (und nicht der II.) Art ist. In diesem Falle sind aber notwendig die Flächen }111{ vertreten, so daß für die Berechnung die Tabelle III geeignet ist, welcher aber die komplizierteren Formeln entsprechen. Ist die Modalität II. Art vertreten, so ist die Tabelle II geeignet, und zwar, im Falle der monoklinen Kristalle, durch die Kolonne ($F = F'$), wenn die beiden besten Flächen die symmetrischen sind, und durch die Kolonne $F = \frac{\pi}{2}$, $F' = \frac{\pi}{2}$, wenn sie zur Symmetrieebene senkrecht stehen.

Als besonderer Fall sind die stark bis extrem positiven Komplexe auszuzeichnen, welche durch die tafeligen Kristalle vertreten sind.

In diesen Fällen ist die einzige zur Justierung geeignete Fläche die tafelige, d. h. ein Pinakoid (Hauptfläche), welchem keine andere Fläche symmetrisch sein kann.

Ist außer demselben noch ein (von zwei) Pinakoid der Hauptzone vertreten, so haben wir keinen für die Berechnung besonders komplizierten Fall; dieser Fall (für monokline und rhombische Komplexe) kann nur nicht nach den Formeln der Kolonnen ($F = F'$) gerechnet werden.

Wenn aber ein Komplex der dodekaedrischen Hauptstruktur und der Modalität II. Art vertreten ist, so ist es leicht, nach beiden in der Symmetrieebene liegenden resp. zu derselben senkrechten Flächen den Winkel zwischen Hauptfläche und dem betreffenden Pinakoid zu berechnen und somit zwei Pinakoide als Ausgangsflächen auszuwählen (dies gilt natürlich auch für die Komplexe der triklinen Syngonie).

Der komplizierteste Fall ist also der der dodekaedrischen Hauptstruktur und der Modalität I. Art. Es seien ausschließlich die Formen {001} und }111{[1]) vertreten[1]).

Dann sind unmitttelbar aus der Beobachtung: 1. die beiden Winkel mit dem Scheitelpunkt (001) und 2. vier Winkel zwischen (001) und jeder Fläche }111{ bekannt.

Nun berechnen wir zuerst aus dem Dreieck $(111)\wedge(001)\wedge(\bar{1}11)$ die Winkel mit den Scheitelpunkten (111) und $(\bar{1}11)$ und noch den Winkel $(111):(\bar{1}11)$; dann berechnen wir in dem Dreieck $(111)\wedge(001)\wedge(1\bar{1}1)$ den Winkel mit dem Scheitelpunkt $(1\bar{1}1)$ und in dem Dreieck $(\bar{1}11)\wedge(001)\wedge(\bar{1}\bar{1}1)$ den Winkel mit dem Scheitelpunkt $(\bar{1}\bar{1}1)$. Diese Berechnungen sind für die Benutzung der angegebenen Tabellen zureichend, da bei der Annahme von Ausgangsflächen (111) und $(\bar{1}11)$ alle geforderten Konstanten schon bekannt sind; für weitere Berechnungen ist die Tabelle III geeignet.

Etwas einfacher gestalten sich die Berechnungen für einen trigonaloiden Komplex, wenn in dem betreffenden Kristall außer tafeliger Fläche (111) nur noch die übrigen Flächen von }111{ vertreten sind.

In diesem Falle sind sämtliche Winkel mit dem Scheitelpunkt (111) teils bekannt teils leicht berechenbar.

Nun berechnen wir in den Dreiecken $(\bar{1}11)\wedge(111)\wedge(11\bar{1})$ und $(\bar{1}11)\wedge(111)\wedge(11\bar{1})$ die Winkel mit dem Scheitelpunkt $(\bar{1}11)$. Für die Benutzung der Tabelle reicht dies schon zu, wenn (111) und $(11\bar{1})$ für die beiden Ausgangsflächen angenommen werden. Ist der Komplex monoklin, so lassen sich die übrigen Rechnungen nach den Formeln der II. Tabelle, Kolonne $F = \frac{\pi}{2}$, $F' = \frac{\pi}{2}$ ausführen.

---

1) $\}p_1 p_2 p_3\{$ drückt die Gesamtheit der Flächen aus, deren Indizes durch die gleichen Zahlen (wenn auch mit verschiedenen Zeichen) vertreten sind. So z. B. drückt }111{ für einen rhombischen Komplex dieselben vier Flächen(paare) aus, wie {111}, und }110{ für einen kubischen Komplex dieselben sechs Flächen(paare), wie {110}.

II. Die Grundformeln der ebenen Tetragonometrie.

Es ist klar, daß die Formeln des I. Teils dieser Arbeit auch für diesen, als einen speziellen Fall anwendbar sind. Dieser spezielle Fall ist zugleich der einfachere. weil für denselben noch die spezielle Gleichung $A + B + C = \pi$ gilt resp. die Größe des sphärischen Überschusses gleich Null ist. Zugleich ist die Ebene als Speziallfall der Sphäre aufzufassen, für welche der Radius unendliche Größe erhält.

Diese Vereinfachung springt besonders in Bezug auf die Formel $|10|$ in die Augen, weil wir hier für den Winkel C sogar keine spezielle Formeln aufsuchen müssen, da die Gleichung $C = \pi - (A + B)$ direkt aufgestellt werden kann. Also

$$\cos C = -\cos(A + B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \qquad 10)$$

Für diesen Fall haben wir also in der Formel 10) des I. Teils $(ab) = 0$, was direkt ersichtlich wird, wenn wir den Winkeln A und B die Werte $\frac{\pi}{2}$ zuerteilen, das heißt, aus C zwei Perpendikel auf a und b ziehen würden.

Wie in dem Grunde der sphärischen Tetragonometrie das sphärische, so steht hier das ebene oder eigentliche geometrische Netz von Möbius. Auch das letztere ist nur ein Speziallfall des ersteren.

Es bleibt also nur eine kurze Durchsicht der Formeln des I. Teils auszuführen, um zu entscheiden, auf welche Weise diese Formeln modifiziert werden müssen. Der spezielle Beweis aber der Rationalität der Ableitung ist schon deshalb überflüssig, weil gerade der Wert eines Zonenwinkels C, für welchen wir den komplizierten rationellen Ausdruck (Formel 9) erhalten haben, jetzt am einfachsten durch $c = \pi - (A + B)$ ausgedrückt wird.

In der Grundformel 1) werden die Kotangenten teilweise, in Anwendung auf die Winkelwerte der Zonen in einem Punkte, ungeändert geblieben, teils durch Strecken ersetzt sein.

Für den ersten Fall haben wir also

$$n \operatorname{cotg} |mn| = (n - m) \operatorname{cotg} |01| + m \operatorname{cotg} |11| . \qquad 1)$$

Für den zweiten Fall haben wir in der projektiven Geometrie die betreffende Formel, wenn wir die Doppelpunkte einer Involution durch $|10|$ und $|01|$ bezeichnen, und wenn wir daher unter dem Ausdruck $|mn|'$ die Strecke auszeichnen, welche durch den Punkt $|mn|$ und $|10|$ bestimmt wird; $|mn|$ würde aber die Strecke mit $|01|$ bezeichnen.

Also

$$\frac{|mn|}{|mn|'} = \frac{m\,|11|}{n\,|11|'} \quad \text{respektive} \quad |mn| = \frac{m\,|01|\cdot|11|}{m\,|11| + n\,|11|'}. \tag{1b}$$

In dem speziellen Falle, wenn $|10|$ unendlich fern ist, haben wir

$$n\,|mn| = m\,|11|. \tag{1c}$$

Der Spezialfall $|11| = -|11|$ ist selbstverständlich.

Für die Formel 2) erhalten wir jetzt

$$\frac{(ae)}{(be)} = \frac{\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} B_1 - \operatorname{cotg} B} = k. \tag{2}$$

Daraus aber, mit Rücksicht auf die Formel

$$\frac{(ae)}{(be)} = \frac{(ae')}{(be')} \quad \text{und also} \quad (ae') = k(be')$$

folgt

$$(be) = \frac{(ab)}{1+k} \quad \text{und} \quad (ae) = \frac{k(ab)}{1+k},$$

auch 3b)

$$(be') = \frac{(ab)}{k-1} \quad \text{und} \quad (ae') = \frac{k(ab)}{k-1},$$

also auch

$$(ee') = \frac{2(ab)}{k^2-1}. \tag{4}$$

In dem Spezialfall $(ae) = (be)$, also $k = 1$, haben wir den Punkt e' unendlich entfernt.

Entsprechend den Formeln 5), unter Berücksichtigung von 10), haben wir

$$(ae) = \frac{\sin B(ab)}{\sin(A+B)} \tag{5}$$

und

$$(bc) = \frac{\sin A\,(ab)}{\sin(A+B)}. \tag{5a}$$

Die Formel 6) läßt sich herleiten aus den bekannten Formeln

$$\operatorname{tang}\frac{E-Ca}{2} = \frac{(ac)-(ae)}{(ac)+(ae)}\operatorname{tang}\frac{E+Ca}{2}, \quad \text{wo } E+Ca=\pi-A;$$

folglich

$$\operatorname{tang}\frac{E+Ca}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2},$$

und 6)

$$\operatorname{cotg}E = \frac{(ae)-(ac)\cos A}{(ac)\sin A} = \frac{(be)-(bc)\cos B}{(bc)\sin B}$$

und

$$\operatorname{cotg}E' = \frac{(ae')+(ac)\cos A}{(ac)\sin A} = \frac{(be')-(bc)\cos B}{(bc)\sin B}. \tag{6a}$$

Nun aber ist

$$\frac{(ae)}{(ac)\sin A} = \operatorname{cotg}E + \operatorname{cotg}A$$

und

$$\frac{(ae')}{(ac)\sin A} = \operatorname{cotg}E' - \operatorname{cotg}A$$

respektive

$$(ae)(\operatorname{cotg}E' - \operatorname{cotg}A) = (ae')(\operatorname{cotg}E + \operatorname{cotg}A);$$

folglich

$$\operatorname{cotg}A\,(ae+ae') = \operatorname{cotg}A\,(ee') = (ae)\operatorname{cotg}E' - (ae')\operatorname{cotg}E.$$

Es ist ganz klar, daß dieser Formel, wie der Formel 8) des I. Teiles allgemeine Bedeutung zukommt, so daß wir dieselbe in der Form

$$\operatorname{cotg}X(ab) = \operatorname{cotg}B\,(ax) - \operatorname{cotg}A\,(bx) \tag{8}$$

schreiben können.

Falls wir alle Winkel A, B, X in diesem Fall in einer und derselben Richtung aufzählen würden, so müssen wir A durch $-A'$ ersetzen, und dann besteht

$$\operatorname{cotg} X(ab) = \operatorname{cotg} B(ax) + \operatorname{cotg} A'(bx). \tag{8 a}$$

Somit wäre die Ableitung der Grundformeln erschöpft.

Im allgemeinen sind zur Bestimmung des ebenen, ebenso wie des sphärischen Netzes fünf Konstanten notwendig.

In der Anwendung auf die Kristallographie wird das ebene Netz durch die gnomonische (wie das sphärische durch die gnomostereographische) Projektion des kristallographischen Komplexes vertreten. Aber für die Praxis der Kristallographie sind weder die Strecken noch die ebenen Winkel des Netzes nötig, da dieselben keine direkte Beziehung zu gemessenen Winkeln haben.

Die Werte aller dieser Elemente des Netzes können sich auf unendliche Weise ändern, je nachdem, wie die Projektionsebene ausgewählt wird. In der Praxis wird natürlich diejenige angenommen, welche zur maximalen Einfachheit in der Darstellung führt. Deshalb wird für die betreffende Ebene diejenige angenommen, in welcher die Punkte der Hauptzone (welche besonders empfehlenswert ist als Ausgangszone aufzufassen) in die Unendlichkeit hinausrücken.

Sind aber die beiden Ausgangspunkte unendlich ferne, so bilden alle durch dieselben bestimmte Zonengeraden das ebene (parallelogrammatische) Netz; dann verlieren die Strecken von beliebigen Punkten bis zu diesen Ausgangspunkten jede reelle Bedeutung. Besonders einfach wird aber dann die Auffindung der Netzpunkte durch die zugehörigeu Indizes der Symbole, weshalb gerade für diesen Zweck das Netz zur Anwendung kommt.

Für dasselbe Netz können wir natürlich auch beliebige zwei andere Punkte als Ausgangspunkte auswählen, aber gerade dann würden die Konstruktionen der Punkte nach gegebenen Indizes ihre Einfachheit verlieren.

Dualismus des sphärischen Netzes.

Bekanntlich gibt es auf der Sphäre zwei geometrische Netze, welche zueinander in dualistischem Verhältnis stehen, indem jeder Punkt eines derselben als der Pol eines bestimmten Großkreisbogens resp. der Zone des anderen ist. Dieser Dualismus kommt am deutlichsten durch die Indizes zum Ausdruck.

Für ein Netz haben wir vier Punkte a, b, c, d zu Grunde gelegt, und diesen Punkten die Indizes (100), (010), (001), (111) zuerteilt. Aber es gibt auch vier Zonen dieses Netzes, welchen dieselben Indizes zukommen, und die Pole dieser Zonen sind die Punkte des dualistischen Netzes; diese Zonen sind

$$\begin{vmatrix} 010 \\ 001 \end{vmatrix} = [100], \quad \begin{vmatrix} 001 \\ 100 \end{vmatrix} = [010], \quad \begin{vmatrix} 100 \\ 010 \end{vmatrix} = [001] \text{ und } \begin{vmatrix} 0\bar{1}1 \\ 10\bar{1} \end{vmatrix} = [111].$$

Nun leuchtet ein, daß, wenn für die Bestimmung dieses anderen Netzes wir die analogen sphärischen Koordinaten annehmen wie für die Punkte a—d, so werden alle oben ermittelten Formeln direkt auch für dieses Netz anwendbar.

Die vollständige Berechnung desselben erfordert also nur die Angabe dieser fünf Koordinaten als die Konstanten desselben.

Vom mathematischen Standpunkte aus haben wir hier aber nur mit dem Übergange von einem System der sphärischen Dreiecke zu dem polaren zu tun, weil eben die Netze selbst in solchem polaren Verhältnis zueinander stehen.

Die erste Konstante des ersten Netzes ist der Winkel ab resp. (100) : (010). Die respektive Konstante des polaren Netzes ist der dem Winkel C' polare Winkel, welcher durch die Formel 10) bestimmt wird.

Also ist für das polare Netz die erste Konstante (ab) die Größe

$$\cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B \cdot \cos(ab). \tag{1}$$

Die übrigen vier Konstanten des polaren Netzes sind gerade die den durch ein paar Punkte bestimmten Winkeln (den Dreiecksseiten des ersten Netzes) polaren.

Zwei von ihnen sind den Winkeln AC und BC polar, werden also durch die Formeln

für A

$$-\operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab) \sin B - \operatorname{cotg}(ab) \cos B, \tag{2}$$

für B

$$-\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab) \sin A - \operatorname{cotg}(ab) \cos A \tag{3}$$

ausgedrückt.

Was endlich die Konstanten A_1 und B_1 des polaren Netzes anbetrifft, so werden dieselben respektive durch die Winkelgrößen ch'_1 und cg'_1 oder $bh'_1 - bc$ und $ag'_1 - ac$ ausgedrückt.

Dieselben Formeln 5) ergeben aber

$$\operatorname{cotg} bh'_1 = \operatorname{cotg} A_{-1} \operatorname{cosec}(ab) \sin B + \operatorname{cotg}(ab) \cos B$$

und

$$\operatorname{cotg} bc = \operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab) \sin B + \operatorname{cotg}(ab) \cos B,$$

und daraus ist schon leicht der Wert von $\operatorname{cotg}(bh'_1 - bc)$ zu bestimmen, und für die respektiven Konstanten folgende Werte zu ermitteln:

für A_1

$$\frac{[\cos(ab) \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} A_{-1}] \cos(ab) \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} A \operatorname{cotg} A_{-1} + \sin^2(ab) \operatorname{cosec}^2 B}{\sin(ab) \operatorname{cosec} B (\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A_1)} \tag{4}$$

und für B_1

$$\frac{[\cos(ab) \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B_{-1}] \cos(ab) \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} B_{-1} + \sin^2(ab) \operatorname{cosec}^2 A}{\sin(ab) \operatorname{cosec} A (\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} B_1)} \tag{5}$$

Das sind also die gesuchten Werte der Konstanten des polaren Netzes, vermittelst welcher jetzt auf bekanntem Wege alle Elemente dieses Netzes sich berechnen lassen.

Andererseits sind aber die Elemente der beiden Netze wesentlich dieselben (abgesehen von dem Ersatz der berechneten Werte durch die komplementären). Somit erhellt die Möglichkeit, dieselben Größen durch wesentlich verschiedene Formeln zu berechnen, folglich jedesmal die einfacheren zu verwenden. Man kann z. B. die Berechnung mittelst der Formel 10), welche mit größerer Vorberechnung verbunden ist, durch die Berechnung mit Formel 5) ersetzen.

In der kristallographischen Praxis wird manchmal auch die Berechnung von Winkeln erfordert, welche sich auf die Elemente der beiden Netze beziehen.

Betrachten wir z. B. den Fall des Winkels zwischen zwei Punkten, von welchen der eine dem ersten und der zweite dem polaren Netze angehört. Zur Berechnung ersetzen wir den letzteren Punkt x durch den zugeordneten Großkreisbogen des ersten Netzes.

Es sei c der Punkt des ersten Netzes, und nehmen wir an, daß der zugeordnete Kreisbogen durch den Punkt a hindurchgeht und durch die Koordinate A_k bestimmt wird.

Nun haben wir ein rechtwinkliges, sphärisches Dreieck, dessen Hypothenuse ac und ein Winkel $A - A_k$; dann erhalten wir

$$\cos(cx) = \sin(ac)\sin(A - A_k). \qquad 6)$$

Speziell wenn der Pol x_0 in der Ausgangszone ist, also $A_k = 0$, haben wir

$$\cos(cx_0) = \sin(ac)\sin A = \sin(be)\sin B = \cos\varrho_c \qquad 6\,a)$$

und für den Punkt d

$$\cos(dx_0) = \sin(ad)\sin A_1 = \sin(bd)\sin B_1 = \cos\varrho_d. \qquad 6\,b)$$

Die Winkel cx_0, dx_0 u. dgl. sind gerade diejenigen, welche bei der Justierung nach der Ausgangszone als die Koordinaten ϱ direkt abgelesen werden.

Aus den gleichen rektangulären, sphärischen Dreiecken finden wir leicht auch die Ausdrücke für die Koordinaten φ, da dieselben der zweiten Kathete derselben gleich sind:

$$\operatorname{tang}\varphi_c = \operatorname{tang}(ac)\cos A; \quad \operatorname{tang}(ab - \varphi_c) = \operatorname{tang}(bc)\cos B \qquad 7\,a)$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi_d = \operatorname{tang}(ad)\cos A_1; \quad \operatorname{tang}(ab - \varphi_d) = \operatorname{tang}(bd)\cos B_1. \qquad 7\,b)$$

Natürlich sind aus diesen Formeln auch umgekehrt die Konstanten des Netzes als Funktionen der Koordinaten φ und ϱ zu ermitteln, und zwar

$$\sec^2 A = \operatorname{cotg}^2 \varrho_c \operatorname{cotg}^2 \varphi_c + \operatorname{cosec}^2 \varrho_c \tag{8 a}$$

$$\sec^2 B = \operatorname{cotg}^2 \varrho_c \operatorname{cotg}^2 (a\,b - \varphi_c) + \operatorname{cosec}^2 \varrho_c \tag{8 b}$$

$$\sec^2 A_1 = \operatorname{cotg}^2 \varrho^d \operatorname{cotg}^2 \varphi_d + \operatorname{cosec}^2 \varrho_d \tag{8 c}$$

und

$$\sec^2 B_1 = \operatorname{cotg}^2 \varrho_d \operatorname{cotg}^2 (a\,b - \varphi_d) + \operatorname{cosec}^2 \varrho_d. \tag{8 d}$$

Die Tabelle der Formeln der sphärischen Tetragonometrie in Anwendung auf die Kristallographie.

Der erste Fall. Die Grundfläche a und die komplementäre Fläche b als die Ausgangsflächen. Die Konstanten: Der Winkel (ab) in der Hauptzone und die Winkel A, A_1, B und B_1.

			Monokline Syngonie			Rhombische Syngonie	
	Trikline Syngonie	$(A = B)$	$(ab) = \frac{\pi}{2};\ A = \frac{\pi}{2}$	$(ab) = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$	$A = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$	$(A = B);\ A = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$	$(ab) = \frac{\pi}{2};\ A = \frac{\pi}{2};\ B = \frac{\pi}{2}$
$k =$	$\frac{\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} B_1 - \operatorname{cotg} B}$	1	$\frac{\operatorname{cotg} A_1}{\operatorname{cotg} B_1 - \operatorname{cotg} B}$	$\frac{\operatorname{cotg} A_1 - \operatorname{cotg} A}{\operatorname{cotg} B_1}$	$\frac{\operatorname{cotg} A_1}{\operatorname{cotg} B_1}$	1	$\frac{\operatorname{cotg} A_1}{\operatorname{cotg} B_1}$
$\sin(be) =$	$\frac{\sin(ae)}{k}$	$\sin(ae)$	$\frac{\sin(ae)}{k}$	$\frac{\sin(ae)}{k}$	$\frac{\sin(ae)}{k}$	$\sin(ae)$	$\frac{\sin(ae)}{k}$
$\operatorname{cotg}(ae) =$	$\frac{1 + k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 + k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\operatorname{cotg}(be) =$	$\frac{k + \cos(ab)}{\sin(ab)}$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}$	k	k	$\frac{k + \cos(ab)}{\sin(ab)}$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}$	k
$\operatorname{cotg}(ae') =$	$\frac{1 - k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\operatorname{tang}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 - k\cos(ab)}{k\sin(ab)}$	$\operatorname{tang}\frac{ab}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\operatorname{cotg}(be') =$	$\frac{-k + \cos(ab)}{\sin(ab)}$	$-\operatorname{tang}\frac{ab}{2}$	$-k$	$-k$	$\frac{-k + \cos(ab)}{\operatorname{siu}(ab)}$	$-\operatorname{tang}\frac{ab}{2}$	$-k$
$\operatorname{cotg}(ee') =$	$\frac{1 - k^2}{2k\sin(ab)}$	0	$\frac{1 - k^2}{2k}$	$\frac{1 - k^2}{2k}$	$\frac{1 - k^2}{2k\sin(ab)}$	0	$\frac{1 - k^2}{2k}$
$\operatorname{cotg} A_{-1}$ [1] $=$	$2\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} A_1$
$\operatorname{cotg} B_{-1} =$	$2\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} B_1$	$2\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} B - \operatorname{cotg} B_1$	$-\operatorname{cotg} B_1$	$-\operatorname{cotg} B_1$	$-\operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} B_1$
$\operatorname{cotg} A_2 =$	$-\operatorname{cotg} A + 2\operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} A + 2\operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} A + 2\operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} A_1$
$\operatorname{cotg} A_{-2} =$	$3\operatorname{cotg} A - 2\operatorname{cotg} A_1$	$3\operatorname{cotg} A - 2\operatorname{cotg} A_1$	$-2\operatorname{cotg} A_1$	$3\operatorname{cotg} A - 2\operatorname{cotg} A_1$	$-2\operatorname{cotg} A_1$	$-2\operatorname{cotg} A_1$	$-2\operatorname{cotg} A_1$
$\operatorname{cotg} B_2 =$	$-\operatorname{cotg} B + 2\operatorname{cotg} B_1$	$-\operatorname{cotg} A + 2\operatorname{cotg} A_1$	$-\operatorname{cotg} B + 2\operatorname{cotg} B_1$	$2\operatorname{cotg} B_1$	$2\operatorname{cotg} B_1$	$2\operatorname{cotg} A_1$	$2\operatorname{cotg} B_1$
$\operatorname{cotg} B_{-2} =$	$3\operatorname{cotg} B - 2\operatorname{cotg} B_1$	$3\operatorname{cotg} A - 2\operatorname{cotg} A_1$	$3\operatorname{cotg} B - 2\operatorname{cotg} B_1$	$-2\operatorname{cotg} B_1$	$-2\operatorname{cotg} B_1$	$-2\operatorname{cotg} A_1$	$-2\operatorname{cotg} B_1$
$\operatorname{cotg}(ac) =$	$\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\sin A + \operatorname{cotg}(ab)\cos A$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}\cos A$	$\operatorname{cotg} B$	0	0	0	0
$\operatorname{cotg}(ad) =$	$\operatorname{cotg} B_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin A_1 + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$	$\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$	$\operatorname{cotg}(ae)\cos A_1$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$
$\operatorname{cotg}(ad') =$	$\operatorname{cotg} B_{-1} \operatorname{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_{-1}$	$-\operatorname{cotg} B_{-1} \sin A_1$	$-\operatorname{cotg} B_1 \sin A_{-1}$	$-\operatorname{cotg}(ae)\cos A_1$	$-\operatorname{cotg}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$-\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$
$\operatorname{cotg}(af) =$	$\operatorname{cotg} B_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$-\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$	$\operatorname{cotg} B_1 \sin A_{-1}$	$\operatorname{cotg}(ae')\cos A_1$	$\operatorname{tang}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$
$\operatorname{cotg}(af') =$	$\operatorname{cotg} B_{-1} \operatorname{cosec}(ab)\sin A_1 + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	$\operatorname{cotg} A_{-1} \operatorname{cosec}(ab)\sin A_1 + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	$\operatorname{cotg} B_{-1} \sin A_1$	$-\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$	$-\operatorname{cotg}(ae')\cos A_1$	$-\operatorname{tang}\frac{ab}{2}\cos A_1$	$-\operatorname{cotg} B_1 \sin A_1$
$\operatorname{cotg}(ag_1) =$	$\operatorname{cotg} B_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin A + \operatorname{cotg}(ab)\cos A$	$\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin A + \operatorname{cotg}(ab)\cos A$	$\operatorname{cotg} B_1$	$\operatorname{cotg} B_1 \sin A$	$\operatorname{cotg} B_1 \operatorname{cosec}(ab)$	$\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)$	$\operatorname{cotg} B_1$
$\operatorname{cotg}(ag_1') =$	$\operatorname{cotg} B_{-1} \operatorname{cosec}(ab)\sin A + \operatorname{cotg}(ab)\cos A$	$\operatorname{cotg} A_{-1} \operatorname{cosec}(ab)\sin A + \operatorname{cotg}(ab)\cos A$	$\operatorname{cotg} B_{-1}$	$-\operatorname{cotg} B_1 \sin A$	$-\operatorname{cotg} B_1 \operatorname{cosec}(ab)$	$-\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)$	$-\operatorname{cotg} B_1$
$\operatorname{cotg}(ag) =$	$2\operatorname{cotg}(ag_1) - \operatorname{cotg}(ac)$	$2\operatorname{cotg}(ag_1) - \operatorname{cotg}(ac)$	$2\operatorname{cotg}(ag_1) - \operatorname{cotg}(ac)$	$2\operatorname{cotg}(ag_1)$	$2\operatorname{cotg}(ag_1)$	$2\operatorname{cotg}(ag_1)$	$2\operatorname{cotg}(ag_1)$
$\operatorname{cotg}(ag') =$	$-2\operatorname{cotg}(ag_1) + 3\operatorname{cotg}(ac)$	$-2\operatorname{cotg}(ag_1) + 3\operatorname{cotg}(ac)$	$-2\operatorname{cotg}(ag_1) + 3\operatorname{cotg}(ac)$	$-2\operatorname{cotg}(ag_1)$	$-2\operatorname{cotg}(ag_1)$	$-2\operatorname{cotg}(ag_1)$	$-2\operatorname{cotg}(ag_1)$
$\operatorname{cotg}(ah) =$	$\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\sin A_2 + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_2$	$\operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab)\sin A_2 + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_2$	$\operatorname{cotg} B \sin A_2$	0	$\operatorname{cotg}(ab)\cos A_2$	$\operatorname{cotg}(ab)\cos A_2$	0
$\operatorname{cotg}(ah') =$	$\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\sin A_{-2} + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_{-2}$	$\operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab)\sin A_{-2} + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_{-2}$	$\operatorname{cotg} B \sin A_{-2}$	0	$-\operatorname{cotg}(ab)\cos A_2$	$-\operatorname{cotg}(ab)\cos A_2$	0
$\operatorname{cotg}(ah_1) =$	$\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\sin A_1 + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	$\operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab)\sin A_1 + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	$\operatorname{cotg} B \sin A_1$	0	$\operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	$\operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	0
$\operatorname{cotg}(ah_1') =$	$\operatorname{cotg} B \operatorname{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\operatorname{cotg} A \operatorname{cosec}(ab)\sin A_{-1} + \operatorname{cotg}(ab)\cos A_{-1}$	$\operatorname{cotg} B \sin A_{-1}$	0	$-\operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	$-\operatorname{cotg}(ab)\cos A_1$	0
$\operatorname{cotg} E =$	$[\operatorname{cotg} B \sin(ae) - \operatorname{cotg} A \sin(be)]\operatorname{cosec}(ab)$	0	$\operatorname{cotg} B \sin(ae)$	$-\operatorname{cotg} A \cos(ae)$	0	0	0
$\operatorname{cotg} E_1 =$	$[\operatorname{cotg} B_1 \sin(ae) - \operatorname{cotg} A_{-1} \sin(be)]\operatorname{cosec}(ab)$	$\frac{1}{2}(\operatorname{cotg} A - \operatorname{cotg} A_{-1})\sec\frac{ab}{2}$	$\operatorname{cotg} B_2 \sin(ae)$	$-\operatorname{cotg} A_2 \cos(ae)$	$2\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin(be)$	$\operatorname{cotg} A_1 \sec\frac{ab}{2}$	$2\operatorname{cotg} A_1 \cos(ae)$
$\operatorname{cotg} E_{-1} =$	$[\operatorname{cotg} B_{-1} \sin(ae) - \operatorname{cotg} A_1 \sin(be)]\operatorname{cosec}(ab)$	$\frac{1}{2}(\operatorname{cotg} A_{-1} - \operatorname{cotg} A)\sec\frac{ab}{2}$	$\operatorname{cotg} B_{-2} \sin(ae)$	$-\operatorname{cotg} A_2 \cos(ae)$	$-2\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin(be)$	$-\operatorname{cotg} A_1 \sec\frac{ab}{2}$	$-2\operatorname{cotg} A_1 \cos(ae)$
$\operatorname{cotg} E' =$	$[\operatorname{cotg} B \sin(ae') + \operatorname{cotg} A \sin(be')]\operatorname{cosec}(ab)$	$\operatorname{cot} A \operatorname{cosec}\frac{ab}{2}$	$\operatorname{cotg} B \sin(ae)$	$\operatorname{cotg} A \cos(ae)$	0	0	0
$\operatorname{cotg} E_1' =$	$[\operatorname{cotg} B_1 \sin(ae') + \operatorname{cotg} A_1 \sin(be')]\operatorname{cosec}(ab)$	$\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}\frac{ab}{2}$	$\operatorname{cotg} B_2 \sin(ae)$	$\operatorname{cotg} A_2 \cos(ae)$	$2\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin(be')$	$\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}\frac{ab}{2}$	$2\operatorname{cotg} A_1 \cos(ae)$
$\operatorname{cotg} E'_{-1} =$	$[\operatorname{cotg} B_{-1} \sin(ae') + \operatorname{cotg} A_{-1} \sin(be')]\operatorname{cosec}(ab)$	$\operatorname{cotg} A_{-1} \operatorname{cosec}\frac{ab}{2}$	$\operatorname{cotg} B_{-2} \sin(ae)$	$\operatorname{cotg} A_{-3} \cos(ae)$	$-2\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}(ab)\sin(be')$	$-\operatorname{cotg} A_1 \operatorname{cosec}\frac{ab}{2}$	$-2\operatorname{cotg} A_1 \cos(ae)$

[1] In diesen Tabellen werden die Bezeichnungen der Winkel in der regulären Entwicklung durch Unterdrücken der zweiten unteren Zahl verkürzt. Also z. B. anstatt: A_{10} A_{21} A_{11} A_{12} A_{01} A_{-12} A_{-11} A_{-21} heißt es 0 A_2 A_1 $A_{\frac{1}{2}}$ A $A_{-\frac{1}{2}}$ A_{-1} A_{-2} usw.

Die Tabelle der Formeln der sphärischen Tetragonometrie in Anwendung auf die Kristallographie.

Der zweite Fall. Die Grundfläche f und die komplementäre Fläche f' als die Ausgangsflächen. Die Konstanten: Der Winkel ff' nicht in der Hauptzone und die Winkel F, F_1, F' und F'_1.

Trikline Syngonie			Monokline Syngonie		Rhombische Syngonie	
	$(F = F')$	$(ff') = \frac{\pi}{2};\ F = \frac{\pi}{2}$	$(ff') = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$	$F = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$	$(F = F');\ F = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$	$(ff') = \frac{\pi}{2};\ F = \frac{\pi}{2};\ F' = \frac{\pi}{2}$
$k = \frac{\mathrm{cotg}\, F_1 - \mathrm{cotg}\, F}{\mathrm{cotg}\, F'_1 - \mathrm{cotg}\, F'}$	1	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1}{\mathrm{cotg}\, F'_1 - \mathrm{cotg}\, F'}$	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1 - \mathrm{cotg}\, F}{\mathrm{cotg}\, F_1}$	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1}{\mathrm{cotg}\, F'_1}$	1	$\frac{\mathrm{cotg}\, F_1}{\mathrm{cotg}\, F'_1}$
$\sin(f'c) = \sin(fc)/k$	$\sin \frac{ff'}{2}$	$\sin(fc)/k$	$\sin(fc)/k$	$\sin(fc)/k$	$\sin \frac{ff'}{2}$	$\sin(fc)/k$
$\mathrm{cotg}(f'c) = \frac{k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2}$	k	k	$\frac{k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2}$	k
$\mathrm{cotg}(fc) = \frac{1 + k \cos(ff')}{k \sin(ff')}$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 + k \cos(ff')}{k \sin(ff')}$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cotg}(f'e') = \frac{-k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$-\mathrm{tang} \frac{ff'}{2}$	$-k$	$-k$	$\frac{-k + \cos(ff')}{\sin(ff')}$	$-\mathrm{tang} \frac{ff'}{2}$	$-k$
$\mathrm{cotg}(fe') = \frac{1 - k \cos(ff')}{k \sin(ff')}$	$\mathrm{tang} \frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1}{k}$	$\frac{1 - k \cos(ff')}{k \sin(ff')}$	$\mathrm{tang} \frac{ff'}{2}$	$\frac{1}{k}$
$\mathrm{cotg}(ce') = \frac{1 - k^2}{2k \sin(ff')}$	0	$\frac{1 - k^2}{2k}$	$\frac{1 - k^2}{2k}$	$\frac{1 - k^2}{2k \sin(ff')}$	0	$\frac{1 - k^2}{2k}$
$\mathrm{cotg}\, F_{-1} = 2\, \mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F'_{-1} = 2\, \mathrm{cotg}\, F' - \mathrm{cotg}\, F'_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F - \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F' - \mathrm{cotg}\, F'_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1$	$-\mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1$
$\mathrm{cotg}\, F_2 = -\mathrm{cotg}\, F + 2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F + 2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F + 2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F_{-2} = 3\, \mathrm{cotg}\, F - 2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F - 2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F - 2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F_3 = -2\, \mathrm{cotg}\, F + 3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F + 3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F + 3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}\, F_{-3} = 4\, \mathrm{cotg}\, F - 3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$4\, \mathrm{cotg}\, F - 3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$4\, \mathrm{cotg}\, F - 3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\, \mathrm{cotg}\, F_1$	$-3\, \mathrm{cotg}\, F_1$
$\mathrm{cotg}(fc) = \mathrm{cotg}\, F' \mathrm{cosec}(ff') \sin F + \mathrm{cotg}(ff') \cos F$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2} \cos F$	$\mathrm{cotg}\, F'$	0	0	0	0
$\mathrm{cotg}(fd) = \mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2} \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2} \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fd') = -\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-1} - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2} \cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{cotg} \frac{ff'}{2} \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fa) = \mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-1} + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-1} + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-1}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{tang} \frac{ff'}{2} \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fb) = \mathrm{cotg}\, F'_{-1} \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F_{-1} \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$-\mathrm{tang} \frac{ff'}{2} \cos F_1$	$-\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fg) = \mathrm{cotg}\, F'_2 \mathrm{cosec}(ff') \sin F + \mathrm{cotg}(ff') \cos F$	$\mathrm{cotg}\, F_2 \mathrm{cosec}(ff') \sin F + \mathrm{cotg}(ff') \cos F$	$\mathrm{cotg}\, F'_2$	$2\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F$	$2\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff')$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff')$	$2\, \mathrm{cotg}\, F'_1$
$\mathrm{cotg}(fh') = -\mathrm{cotg}\, F'_{-2} \mathrm{cosec}(ff') \sin F + \mathrm{cotg}(ff') \cos F$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-2} \mathrm{cosec}(ff') \sin F + \mathrm{cotg}(ff') \cos F$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-2}$	$2\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F$	$2\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff')$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff')$	$2\, \mathrm{cotg}\, F'_1$
$\mathrm{cotg}(fh) = \mathrm{cotg}\, F' \mathrm{cosec}(ff') \sin F_2 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_2$	$\mathrm{cotg}\, F \mathrm{cosec}(ff') \sin F_2 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_2$	$\mathrm{cotg}\, F' \sin F_2$	0	$\mathrm{cotg}(ff') \cos F_2$	$\mathrm{cotg}(ff') \cos F_2$	0
$\mathrm{cotg}(fg') = \mathrm{cotg}\, F' \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-2} - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-2}$	$-\mathrm{cotg}\, F \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-2} - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-2}$	$-\mathrm{cotg}\, F' \sin F_2$	0	$\mathrm{cotg}(ff') \cos F_2$	$\mathrm{cotg}(ff') \cos F_2$	0
$\mathrm{cotg}(fg_1) = \mathrm{cotg}\, F'_3 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F_3 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$\mathrm{cotg}\, F'_3 \sin F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$[3 \mathrm{cosec}(ff') + \mathrm{cotg}(ff')] \cos F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fh'_1) = -\mathrm{cotg}\, F'_{-3} \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-1} - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-3} \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-1} - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-1}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_3 \sin F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-1}$	$3\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_1 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_1$	$[3 \mathrm{cosec}(ff') + \mathrm{cotg}(ff')] \cos F_1$	$3\, \mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_1$
$\mathrm{cotg}(fh_1) = \mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$
$\mathrm{cotg}(fg'_1) = -\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-3} - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-3}$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-1} \mathrm{cosec}(ff') \sin F_{-3} - \mathrm{cotg}(ff') \cos F_{-3}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_{-3}$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin F_3 + \mathrm{cotg}(ff') \cos F_3$	$\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin F_3$
$\mathrm{cotg}\, C = [\mathrm{cotg}\, F' \sin(cf) - \mathrm{cotg}\, F \sin(cf')] \mathrm{cosec}(ff')$	0	$\mathrm{cotg}\, F' \sin(cf)$	$-\mathrm{cotg}\, F \cos(cf)$	0	0	0
$\mathrm{cotg}\, C_1 = [\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin(cf) - \mathrm{cotg}\, F_{-1} \sin(cf')] \mathrm{cosec}(ff')$	$\frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\, F_1 - \mathrm{cotg}\, F_{-1}) \sec \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F'_2 \sin(cf)$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-2} \cos(cf)$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin(cf')$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \sec \frac{ff'}{2}$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}\, C_{-1} = [\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin(cf) - \mathrm{cotg}\, F_1 \sin(cf')] \mathrm{cosec}(ff')$	$\frac{1}{2}(\mathrm{cotg}\, F_{-1} - \mathrm{cotg}\, F_1) \sec \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F'_{-2} \sin(cf)$	$-\mathrm{cotg}\, F_2 \cos(cf)$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin(cf')$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec \frac{ff'}{2}$	$-2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}\, E' = [\mathrm{cotg}\, F' \sin(e'f) + \mathrm{cotg}\, F \sin(e'f')] \mathrm{cosec}(ff')$	$\mathrm{cotg}\, F \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F' \sin(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F \cos(cf)$	0	0	0
$\mathrm{cotg}(E' - E'_1) = [\mathrm{cotg}\, F'_1 \sin(e'f) + \mathrm{cotg}\, F_{-1} \sin(e'f')] \mathrm{cosec}(ff')$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F'_2 \sin(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F_2 \cos(cf)$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin(e'f')$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}(E'_{-1} - E') = [\mathrm{cotg}\, F'_{-1} \sin(e'f) + \mathrm{cotg}\, F_{-1} \sin(e'f')] \mathrm{cosec}(ff')$	$\mathrm{cotg}\, F_{-1} \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$-\mathrm{cotg}\, F'_{-2} \sin(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F_2 \cos(cf)$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(ff') \sin(e'f')$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$2\, \mathrm{cotg}\, F_1 \cos(cf)$
$\mathrm{cotg}(ce) = \mathrm{cotg}\, F \mathrm{cosec}(fe) \sin C + \mathrm{cotg}(fc) \cos C$	$\mathrm{cotg}\, F \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}(cf) \cos C$	$\mathrm{cotg}(cf) \cos C$	0	0	0
$\mathrm{cotg}(cd) = \mathrm{cotg}\, F \mathrm{cosec}(fc) \sin C + \mathrm{cotg}(fc) \cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(cf) \sin C + \mathrm{cotg}(cf) \cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(cf) \sin C + \mathrm{cotg}(cf) \cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(cf)$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec} \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(cf)$
$\mathrm{cotg}(ee') = -\mathrm{cotg}\, F \mathrm{cosec}(fe') \sin E' + \mathrm{cotg}(fe') \cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F \sec \frac{(ff')}{2} \sin E' + \mathrm{tang} \frac{(ff')}{2} \cos E'$	$\mathrm{cotg}(cf) \cos C$	$\mathrm{cotg}(cf) \cos C$	0	0	0
$\mathrm{cotg}(ae') = -\mathrm{cotg}\, F_{-1} \mathrm{cosec}(fe') \sin E' + \mathrm{cotg}(fe') \cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-1} \sec \frac{(ff')}{2} \sin E' + \mathrm{tang} \frac{(ff')}{2} \cos E'$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(cf) \sin C + \mathrm{cotg}(cf) \cos C$	$-\mathrm{cotg}\, F_{-1} \mathrm{cosec}(fe) \sin C + \mathrm{cotg}(fe) \cos C$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(e'f)$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \sec \frac{ff'}{2}$	$\mathrm{cotg}\, F_1 \sec(fc)$
$\mathrm{cotg}(be') = -\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(fe') \sin E' + \mathrm{cotg}(fe') \cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec \frac{(ff')}{2} \sin E' + \mathrm{tang} \frac{(ff')}{2} \cos E'$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(cf) \sin C + \mathrm{cotg}(cf) \cos C$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(fc) \sin C + \mathrm{cotg}(fe) \cos C$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \mathrm{cosec}(e'f)$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec \frac{ff'}{2}$	$-\mathrm{cotg}\, F_1 \sec(cf)$
$\sin(E - E_1) = \sin(fe) \sin F \cdot \mathrm{cosec}(ce)$	$\sin \frac{(ff')}{2} \sin F \mathrm{cosec}(ce)$	$\sin(fc) \cdot \mathrm{cosec}(ce)$	$\sin(fc) \sin F \mathrm{cosec}(ce)$	$\sin(fc)$	$\sin \frac{(ff')}{2}$	$\sin(fc)$
$\sin(E_{-1} - E) = \sin(f'c) \sin F' \mathrm{cosec}(ce)$	$\sin \frac{(ff')}{2} \sin F \cdot \mathrm{cosec}(ce)$	$\cos(fc) \sin F' \mathrm{cosec}(ce)$	$\cos(fc) \mathrm{cosec}(ce)$	$\cos(fc)$	$\sin \frac{(ff')}{2}$	$\cos(fc)$

Die Tabelle der Formeln der sphärischen Tetragonometrie in Anwendung auf die Kristallographie.

Der dritte Fall. Die Grundfläche g und die komplementäre h.

Die Konstanten: Der Winkel (hg) und die Winkel G, G_1, H und H_1.

Trikline Syngonie	Monokline Syngonie $(G = H)$; $D = \frac{\pi}{2}$	Rhombische Syngonie $(G = H)$; $D = \frac{\pi}{2}$; $E = \frac{\pi}{2}$
$k = \frac{\operatorname{cotg} G_1 - \operatorname{cotg} G}{\operatorname{cotg} H_1 - \operatorname{cotg} H}$	1	1
$\sin(hd) = \sin(gd)/k$	$\sin(gd)$	$\sin(gd)$
$\operatorname{cotg}(hd) = \frac{k + \cos(gh)}{\sin(gh)}$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(gd) = \frac{1 + k\cos(gh)}{k\sin(gh)}$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(he') = \frac{-k + \cos(gh)}{\sin(gh)}$	$-\operatorname{tang}\frac{gh}{2}$	$-\operatorname{tang}\frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(ge') = \frac{1 - k\cos(gh)}{k\sin(gh)}$	$\operatorname{tang}\frac{gh}{2}$	$\operatorname{tang}\frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(de') = \frac{1 - k^2}{2k\sin(gh)}$	0	0
$\operatorname{cotg} G_{-1} = 2\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$	$2\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$	$2\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} G_3 = -2\operatorname{cotg} G + 3\operatorname{cotg} G_1$	$-2\operatorname{cotg} G + 3\operatorname{cotg} G_1$	$-2\operatorname{cotg} G + 3\operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} G_{-3} = 4\operatorname{cotg} G - 3\operatorname{cotg} G_1$	$4\operatorname{cotg} G - 3\operatorname{cotg} G_1$	$4\operatorname{cotg} G - 3\operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} G_{\bar{1}3} = \frac{1}{3}(4\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$	$\frac{1}{3}(4\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$	$\frac{1}{3}(4\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$
$\operatorname{cotg} G_5 = -4\operatorname{cotg} G + 5\operatorname{cotg} G_1$	$-4\operatorname{cotg} G + 5\operatorname{cotg} G_1$	$-4\operatorname{cotg} G + 5\operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_{-1} = 2\operatorname{cotg} H - \operatorname{cotg} H_1$	$2\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$	$2\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_3 = -2\operatorname{cotg} H + 3\operatorname{cotg} H_1$	$-2\operatorname{cotg} G + 3\operatorname{cotg} G_1$	$-2\operatorname{cotg} G + 3\operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_3 = 4\operatorname{cotg} H - 3\operatorname{cotg} H_1$	$4\operatorname{cotg} G - 3\operatorname{cotg} G_1$	$4\operatorname{cotg} G - 3\operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg} H_5 = -4\operatorname{cotg} H + 5\operatorname{cotg} H_1$	$-4\operatorname{cotg} G + 5\operatorname{cotg} G_1$	$-4\operatorname{cotg} G + 5\operatorname{cotg} G_1$
$\operatorname{cotg}(ga) = -\operatorname{cotg} H_{-3}\operatorname{cosec}(gh)\sin G_1 - \operatorname{cotg}(gh)\cos G_1$	$-\operatorname{cotg} G_{-3}\operatorname{cosec}(gh)\sin G_1 - \operatorname{cotg}(gh)\cos G_1$	$-\operatorname{cotg} G_{-3}\operatorname{cosec}(gh)\sin G_1 - \operatorname{cotg}(gh)\cos G_1$
$\operatorname{cotg}(gb) = -\operatorname{cotg} H_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-3} - \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-3}$	$-\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-3} - \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-3}$	$-\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-3} - \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-3}$
$\operatorname{cotg}(gc) = \operatorname{cotg} H_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_1 + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_1$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}\cos G_1$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}\cos G_1$
$\operatorname{cotg}(gd') = \operatorname{cotg} H\operatorname{cosec}(gh)\sin G + \operatorname{cotg}(gh)\cos G$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}\cos G$	$\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}\cos G$
$\operatorname{cotg}(ge) = -\operatorname{cotg} H_{-1}\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-1} - \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-1}$	$-\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}\cos G_{-1}$	$-\operatorname{cotg}\frac{gh}{2}\cos G_{-1}$
$\operatorname{cotg}(gf) = \operatorname{cotg} H_3\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_3\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_3\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-1}$
$\operatorname{cotg}(gf') = \operatorname{cotg} H_{-1}\operatorname{cosec}(gh)\sin G_3 + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_3$	$\operatorname{cotg} G_{-1}\operatorname{cosec}(gh)\sin G_3 + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_3$	$\operatorname{cotg} G_{-1}\operatorname{cosec}(gh)\sin G_3 + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_3$
$\operatorname{cotg}(gg') = \frac{1}{2}[\operatorname{cotg}(gc) - \operatorname{cotg}(ga)]$	$\frac{1}{2}[\operatorname{cotg}(gc) - \operatorname{cotg}(ga)]$	$\operatorname{cotg}(2gc)$
$\operatorname{cotg}(gg_1) = 3\operatorname{cotg}(gc) - 2\operatorname{cotg}(gg')$	$3\operatorname{cotg}(gc) - 2\operatorname{cotg}(gg')$	$3\operatorname{cotg}(gc) - 2\operatorname{cotg}(gg')$
$\operatorname{cotg}(gg'_1) = \frac{1}{3}[\operatorname{cotg}(gc) + 2\operatorname{cotg}(gg')]$	$\frac{1}{3}[\operatorname{cotg}(gc) + 2\operatorname{cotg}(gg')]$	$\frac{1}{3}[\operatorname{cotg}(gc) + 2\operatorname{cotg}(gg')]$
$\operatorname{cotg}(gh') = \operatorname{cotg} H_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-1}$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{-1} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{-1}$
$\operatorname{cotg}(gh'_1) = \operatorname{cotg} H_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{\bar{1}3} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{\bar{1}3}$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{\bar{1}3} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{\bar{1}3}$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_{\bar{1}3} + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_{\bar{1}3}$
$\operatorname{cotg}(gh_1) = \operatorname{cotg} H_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_5 + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_5$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_5 + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_5$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gh)\sin G_5 + \operatorname{cotg}(gh)\cos G_5$
$\operatorname{cotg} D = [\operatorname{cotg} H_1\sin(gd) - \operatorname{cotg} G_1\sin(hd)]\operatorname{cosec}(gh)$	0	0
$\operatorname{cotg} D_1 = [\operatorname{cotg} H_5\sin(gd) - \operatorname{cotg} G_1\sin(hd)]\operatorname{cosec}(gh)$	$2(-\operatorname{cotg} G + \operatorname{cotg} G_1)\sec\frac{gh}{2}$	$2(-\operatorname{cotg} G + \operatorname{cotg} G_1)$
$\operatorname{cotg} D_{-1} = [\operatorname{cotg} H_1\sin(gd) - \operatorname{cotg} G_5\sin(hd)]\operatorname{cosec}(gh)$	$2(\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)\sec\frac{gh}{2}$	$2(\operatorname{cotg} G - \operatorname{cotg} G_1)$
$\operatorname{cotg} E'_1 = -\operatorname{cotg} H_{-1}\sin(ge') - \operatorname{cotg} G_{-1}\sin(he')]\operatorname{cosec}(gh)$	$-\operatorname{cotg} G_{-1}\operatorname{cosec}\frac{gh}{2}$	$-\operatorname{cotg} G_{-1}\operatorname{cosec}\frac{gh}{2}$
$\operatorname{cotg}(E' - E'_1) = [\operatorname{cotg} H_1\sin(ge') + \operatorname{cotg} G_1\sin(he')]\operatorname{cosec}(gh)$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}\frac{gh}{2}$	$\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}\frac{gh}{2}$
$\sin(E - E_1) = \sin(gd)\sin G_{-1}\operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1}\sin\frac{gh}{2}\operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1}\sin\frac{gh}{2}\operatorname{cosec}(de)$
$\sin(E_{-1} - E) = \sin(hd)\sin H_{-1}\operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1}\sin\frac{gh}{2}\operatorname{cosec}(de)$	$\sin G_{-1}\sin\frac{gh}{2}\operatorname{cosec}(de)$
$\operatorname{cotg}(e'a) = \operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(e'g)\sin E'_1 + \operatorname{cotg}(e'g)\cos E'_1$	$\operatorname{cotg} G_1\sec\frac{gh}{2}\sin E'_1 + \operatorname{tang}\frac{gh}{2}\cos E'_1$	$\operatorname{cotg} G_1\sec\frac{gh}{2}\sin E'_1 + \operatorname{tang}\frac{gh}{2}\cos E'_1$
$\operatorname{cotg}(e'e) = \operatorname{cotg} G_{-1}\operatorname{cosec}(e'g)\sin E'_1 + \operatorname{cotg}(e'g)\cos E'_1$	0	0
$\operatorname{cotg}(e'b) = 2\operatorname{cotg}(e'e) - \operatorname{cotg}(e'a)$	$-\operatorname{cotg}(e'a)$	$-\operatorname{cotg}(e'a)$
$\operatorname{cotg}(de) = -\operatorname{cotg} G_{-1}\operatorname{cosec}(gd)\sin D - \operatorname{cotg}(gd)\cos D$	$\operatorname{cotg} E'_1$	$\operatorname{cotg} E'_1$
$\operatorname{cotg}(dc) = \operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(gd)\sin D + \operatorname{cotg}(gd)\cos D$	$\operatorname{cotg}(E' - E'_1)$	$\operatorname{cotg}(E' - E'_1)$
$\operatorname{cotg}(dd') = \operatorname{cotg} G\operatorname{cosec}(gd)\sin D + \operatorname{cotg}(gd)\cos D$	$\operatorname{cotg}(E'_{-1} - E'_1)$	$\operatorname{cotg}(E'_{-1} - E'_1)$
$\operatorname{cotg}(e'c) = -\operatorname{cotg} G_1\operatorname{cosec}(ge')\sin(E' - E'_1) + \operatorname{cotg}(ge')\cos(E' - E'_1)$	0	0