Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München

1913. Heft I

Januar- bis Märzsitzung

München 1913
Verlag der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth)

Über Strahlungsgleichgewicht und atmosphärische Strahlung.

Ein Beitrag zur Theorie der oberen Inversion.

Von **R. Emden.**

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 1. Februar 1913.

Inhaltsübersicht: Einleitung. § 1. Die effektive Erdtemperatur und die Absorption diffuser Strahlung. § 2. Strahlungsgleichgewicht bei grauer Strahlung. § 3. Die Untersuchungen von W. J. Humphreys und E. Gold. § 4. Die Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes. § 5. Das Strahlungsgleichgewicht der Atmosphäre und die Temperatur der oberen Inversion. § 6. Die Strahlung der Atmosphäre.

Einleitung.

In einer ruhenden Gasmasse sind bekanntlich unendlich viele Anordnungen von Dichte, Druck und Temperatur möglich, die den Bedingungen mechanischen Gleichgewichtes genügen. Handelt es sich jedoch um eine Gasmasse, deren Elemente nach den Gesetzen der Temperaturstrahlung leuchten und absorbieren, während Wärmeaustausch durch Konvektion ausgeschlossen, durch Leitung hinreichend klein sein soll, so wird ein Gleichgewichtszustand ausgesondert, den wir als Strahlungsgleichgewicht bezeichnen werden, und der dadurch ausgezeichnet ist, daß ein jedes Teilchen denselben Betrag an Energie ausstrahlt, den es durch Zustrahlung der übrigen Teilchen und etwa vorhandener äußerer Strahlungsquellen gewinnt. Oder anders ausgedrückt: Strahlungsgleichgewicht ist vorhanden, wenn durch Strahlung und Absorption die Temperaturen der Teilchen, und deshalb auch die Massenanordnung, nicht geändert werden. Grundbedingung ist stets Gleichheit der Mengen abgegebener und gewonnener Strahlung, unabhängig von ihrer Zusammensetzung nach Wellenlängen, Polarisationszustand und Strahlungsrichtung.

Auf diesen Gleichgewichtszustand hat zuerst K. Schwarzschild[1]) aufmerksam gemacht; eine neuere Arbeit von E. Gold[2]) geht von ähnlichen Gesichtspunkten aus. Über diese Arbeiten wird unter § 2 resp. § 3 zu sprechen sein.

Wir behandeln im folgenden das Strahlungsgleichgewicht einer Atmosphäre, d. i. einer Gasmasse, die entweder die äußeren Partien einer Gaskugel bildet, oder auf einer starren Kugel aufliegt. Die Niveauflächen sind dann Kugelflächen; ihre Radien seien so groß, daß wir mit genügender Genauigkeit von der Krümmung absehen und ein ebenes Problem behandeln können. Druck, Dichte und Temperatur ändern sich dann nur in Richtung einer Achse, der Vertikalen. Jede horizontale Schicht strahlt gemäß ihrer Temperatur ebensoviel Energie aus, als sie durch Zustrahlung der übrigen Schichten und äußerer Strahlungsquellen gewinnt.

Es liegt die Versuchung nahe, anzunehmen, daß bei diesem Gleichgewichtszustand die beiden Energieströme, welche eine horizontale Schicht abwärts und aufwärts durchsetzen, sich gleich sein müssen. Tatsächlich benützt auch E. Gold (loc. cit.) diese Gleichheit neben dem erstgegebenen Kriterium zur Bestimmung des Strahlungsgleichgewichts. Allein wie in einer Metallplatte bei linearem Temperaturgefälle ein Wärmetransport durch Leitung stattfinden kann, ohne daß die Temperaturen sich ändern, ist bei geeigneter Temperaturverteilung auch Energietransport durch Strahlung bei Konstanz der Temperaturen möglich. Kennzeichen des Strahlungsgleichgewichtes soll deshalb lediglich die Tatsache sein, daß durch Strahlung und Absorption kein Gasteilchen seine Temperatur ändert.

---

[1]) K. Schwarzschild, Über das Gleichgewicht der Sonnenatmosphäre. Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse 1906, Heft 1.

[2]) E. Gold, The Isothermal Layer of the Atmosphere and Atmospheric Radiation. Proceedings of the Royal Society of London, series A, vol. 82, p. 43, 1909.

Die nachfolgenden Untersuchungen werden sich in erster Linie mit dem Strahlungsgleichgewicht der Erdatmosphäre beschäftigen; sie bezwecken einen Beitrag zur Klärung der Frage: Sind die Temperaturen der oberen Inversionsschicht in erster Linie durch Strahlungsvorgänge erklärbar[1])? Die Antwort wird in bejahendem Sinne ausfallen. Dieser Umstand möge eine etwas breitere Darstellung, die manchem ein Weiterarbeiten auf diesem Gebiete erleichtern wird, rechtfertigen.

§ 1. Die effektive Erdtemperatur und die Absorption diffuser Strahlung.

I. Als Quelle aller Arbeits- und Lebensprozesse auf der Erde wird schlechthin die Sonne angenommen, da sie uns ungeheuere Arbeitsmengen in Form von Strahlung zukommen läßt. Allein diese Vorstellungsweise führt leicht irre und verleitet zur Aufstellung unrichtiger Wärmebilanzen. Denn diese Energiemengen werden, da sich die Verhältnisse auf der Erdoberfläche seit historischen Zeiten nicht wesentlich geändert haben, bis auf verschwindend kleine Beträge, die durch den Vermoderungsprozeß der Organismen bedingt sein können, durch Ausstrahlung wieder abgegeben, also in derselben Energieform, in der sie bezogen wurden. Die Möglichkeit irdischen Lebens beruht deshalb nicht sowohl in einer Einnahme von Energie, sondern in der gewaltigen Entropievermehrung, die mit der Umwandlung der heißen Sonnenstrahlung in die kältere Erdstrahlung verbunden ist. Bewegung und Leben auf der Erde wird nicht sowohl dadurch ermöglicht, daß wir in der Sonne einen genügend großen Energiespeicher zur Verfügung haben, denn was wir beziehen, geben wir beinahe restlos und in derselben Form wieder ab, sondern ist gewährleistet durch den gewaltigen Entropiespeicher, den das Strahlungssystem Sonne—Erde—Weltenraum darstellt.

Die Solarkonstante σ, d. i. die Energiemenge, welche

[1]) Vgl. J. Schmauß, Die obere Inversion. Meteor. Zeitschr., Bd. XLIV, S. 241, 1909.

die von der Sonne ausgehende Strahlung in Erdentfernung befördert, können wir nach den Messungen von Abbot[1]) mit genügender Genauigkeit zu rund 2 Grammkalorien pro Minute und Quadratzentimeter ansetzen. Ein schwarzer Strahler von der Größe der Photosphäre und in Sonnenentfernung würde denselben Energiestrom bei Erhitzung auf 5910^0 abs. liefern. Diese Temperatur, effektive Sonnentemperatur genannt, ist, wie die Solarkonstante, lediglich ein Maß für die Intensität der Sonnenstrahlung; sie sagt nichts aus über die in der Sonnenmasse verteilten Temperaturen, und es wäre verfehlt, eine Schicht der Sonne, deren Temperatur zu 5910^0 ermittelt wird, als Strahlungsquelle zu betrachten. Die effektive Sonnentemperatur ist eine Eigenschaft der Strahlen, nicht des emittierenden Körpers, der Sonne.

Als Gegenstück führen wir ein die „effektive Erdtemperatur". Der Energiezufluß von der Solarkonstante 2, den die Erde auf einer Fläche gleich ihrem Querschnitt empfängt, werde gleichmäßig auf ihre Oberfläche verteilt. Die Strahlungsbilanz erfordert dann, daß bei stationärem Zustand jedes Quadratzentimeter Erdoberfläche 0,5 Grammkalorien pro Minute abgibt. Von der zugestrahlten Energiemenge werden aber nach den Überlegungen von Abbot und Fowle[2]) durch die Atmosphäre, die Wolken und die Erdoberfläche durchschnittlich 37 % reflektiert. Dieser Strahlungsbetrag bleibt auf seiner hohen Temperatur und tritt nicht ein in das thermodynamische System, das wir betrachten werden. Sind die Unterlagen der Abbotschen Berechnung auch sehr unsicher, so werden wir doch, da kein besserer Wert vorliegt, die „Energie-Albedo" der Erde zu 0,37 annehmen. Der Teil der Solarkonstanten, mit dem wir uns zu beschäftigen haben, erniedrigt sich also auf $2 \cdot 0{,}63 = 1{,}26$, so daß bei gleichmäßiger Verteilung dieses Betrages der Sonnenstrahlung und stationärem Zustand jedes

[1]) C. G. Abbot, The Sun's Energy Spectrum and Temperature. The Astrophysical Journal, t. XXXIV, p. 197, 1911.

[2]) C. G. Abbot and F. E. Fowle, Annals of the Astrophysical Observatory of the Smithonian Institution, vol. II, p. 162, 1908.

Quadratzentimeter Erdoberfläche $\frac{1,26}{4} = 0,315$ Grammkalorien pro Minute auszustrahlen hat. Ein schwarzer Strahler liefert diese Menge bei $T = 254^{0} = -19^{0}$ C. Eine schwarze Kugel vom Radius der Erde (die in Betracht kommenden Schichten der Atmosphäre haben vernachlässigbare Dicke) und der absoluten Temperatur 254^{0}, die wir als effektive Erdtemperatur bezeichnen, strahlt ebensoviel aus, als sie nach Abzug der Energie-Albedo in Erdentfernung von der Sonne erhält. Diese Temperatur ist lediglich ein Maß für die Intensität der von der Erde ausgehenden Strahlung und sagt nichts aus über die *vorhandenen Temperaturen*. Wollte man, wie bereits mehrfach geschehen (vgl. Abbot and Fowle, loc. cit., p. 173; ebenso die in § 3 zu besprechende Arbeit von Humphreys), die in einer Höhe von 4—5 km liegende Luftschicht, die durch eine mittlere Jahrestemperatur von -19^{0} ausgezeichnet ist, als Ausgangsort der Erdstrahlung ansehen, so würde man den Fehler begehen, auf den wir schon bei Besprechung der effektiven Sonnentemperatur aufmerksam machten. Die effektive Erdtemperatur ist eine Eigenschaft der Strahlung und das Resultat des verwickelten Strahlungs- und Absorptionsprozesses, den die vorliegende Untersuchung behandelt.

II. Die ankommenden und ausgesandten Strahlen werden auf ihrem Wege durch die Atmosphäre durch wirkliche *Absorption*, also thermodynamisch geschwächt. Hätten wir es nur mit einer einzigen Strahlungsrichtung zu tun, so könnten die bekannten, einfachen Absorptionsgesetze Anwendung finden. Allein die Strahlung der Atmosphäre und der Erdoberfläche ist diffus; und auch die Sonnenstrahlung durchsetzt die Atmosphäre nach allen Richtungen, wenn wir sie gleichmäßig von allen Seiten kommend über die Erde ausbreiten. (Soweit es sich nur um die Strahlungssumme unabhängig von ihrer Zusammensetzung nach Wellenlängen handelt, kann dies einfach erreicht werden, indem wir die Erde von einer schwarzen Fläche auf effektiver Erdtemperatur *eingeschlossen annehmen*.) Wir haben deshalb in erster Linie die Absorptionsverhältnisse bei diffuser Bestrahlung zu untersuchen; sie bestimmen die Temperaturen bei Strahlungsgleichgewicht. Wir haben ferner das Strahlungsgesetz ebener Luftschichten aufzusuchen. Denn bei durchsichtigen Körpern sind Absorptions- wie Emissionsvermögen keine Materialkonstanten, sondern durch den ganzen Bau des Körpers mitbedingt. Ein Glasprisma besitzt an den End- und Seitenflächen verschiedenes Emissionsvermögen.

Ein genügend kleines Element f der Oberfläche eines schwarzen Strahlers sendet bekanntlich in den Kegelausschnitt, dessen Erzeugende mit der Flächennormalen die Winkel ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ bilden, in den Wellenlängen λ bis $\lambda + d\lambda$ Strahlung aus gleich

$$1) \qquad f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta \, \frac{\text{Grammkal.}}{\text{min.}}$$

und in den ganzen bestrahlten Raum

$$2) \qquad f \cdot E_\lambda \, d\lambda = f \cdot \pi J_\lambda \, d\lambda \, \frac{\text{Grammkal.}}{\text{min.}}.$$

E_λ bezeichnen wir als Emissionsvermögen für die Wellenlänge λ. Das Gesamtemissionsvermögen E ergibt sich durch Integration über alle Wellenlängen zu

$$3) \qquad E = \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda.$$

J_λ, E_λ und E sind bekannte Funktionen der Temperatur, speziell ist

$$4) \qquad E = s\,T^4; \qquad s = 7{,}59.10^{-11} \, \frac{\text{Grammkal.}}{\text{cm}^2.\,\text{min.}}.$$

Auf einen beliebigen Strahler falle auf eine Stelle der Oberfläche die Strahlung $S_\lambda \, d\lambda$, von welcher der Bruchteil $A S_\lambda \, d\lambda$ absorbiert wird. Dann ist sein Absorptionsvermögen a_λ an dieser Stelle definiert durch die Beziehung

$$5) \qquad a_\lambda = \frac{A S_\lambda \, d\lambda}{S_\lambda \, d\lambda}$$

und nach dem Kirchhoffschen Satze ist sein Strahlungsvermögen

6) $$i_\lambda = a_\lambda J_\lambda,$$

J_λ gemessen bei derselben Temperatur T. Sein Gesamtemissionsvermögen wird

7) $$e = \int_0^\infty a_\lambda J_\lambda \, d\lambda.$$

Einen Strahler, der für alle Wellenlängen das gleiche Absorptionsvermögen a besitzt, nennen wir grau, und für die von ihm ausgehende, graue Strahlung gelten die Beziehungen

8) $$i_\lambda = a J_\lambda$$

9) $$e = a E = a s T^4\text{[1]}.$$

Das Absorptionsvermögen einer dünnen, ebenen Schicht bei senkrecht einfallender Strahlung, weiterhin mit α_λ bezeichnet, setzen wir mangels besserer experimenteller Grundlagen proportional ihrer Dicke dl, der vorhandenen Dichte ϱ und einer von der Temperatur unabhängigen Materialkonstanten k_λ, dem Absorptionskoeffizienten, also

10) $$\alpha_\lambda = k_\lambda \varrho \, dl = k_\lambda \, dm; \quad [k_\lambda] = \frac{1}{\text{Masse}}.$$

Für die Strahlung, die unter dem $\sphericalangle \vartheta$ einfällt, haben wir

11) $$\alpha_{\lambda\vartheta} = k_\lambda \varrho \frac{dl}{\cos\vartheta} = k_\lambda \frac{dm}{\cos\vartheta}.$$

---

[1]) In die Literatur ist der um 1% größere Wert $s = 7{,}68 . 10^{-11}$ übergegangen. In seiner grundlegenden Arbeit (Wied. Annal. LXV, S. 746, 1898) gibt Kurlbaum als Resultat seiner Versuche $S_{100} - S_0 = 0{,}01763 \, \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\,\text{sec}} = 0{,}0731 \, \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$ mit dem Beifügen, daß als elektrothermisches Äquivalent 0,240 angesetzt wurde. Allein $\frac{0{,}01763}{0{,}0731}$ ergibt 0,2412, während der jetzt gebräuchliche Wert (vgl. Ebert, Lehrbuch der Physik, S. 487, 1912) 0,239 ist, also 1% kleiner. Mit diesem Umrechnungsfaktor führt der experimentell ermittelte Wert $0{,}0731 \, \frac{\text{Watt}}{\text{cm}^2}$ zu $s = 7{,}59 . 10^{-11}$. Dieser Wert von s ergibt sich auch aus den von Plank benutzten Werten für das h und k seiner bekannten Formel.

Fällt diese Strahlung im Betrage $S_\lambda\, d\lambda$ auf eine Schicht von der endlichen Dicke L und der Masse $\frac{M}{\mathrm{cm}^2}$, so ergibt sich

12) $$\text{Durchgelassene Strahlung} = S_\lambda\, d\lambda\, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}}$$

13) $$\text{Absorbierte Strahlung} = S_\lambda\, d\lambda \left(1 - e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}}\right).$$

Mit Hilfe der Gleichung (12) wird k_λ experimentell ermittelt.

Wir sind nunmehr imstande, das der Gleichung (1) entsprechende Strahlungsgesetz einer ebenen Gasschicht von endlicher Dicke abzuleiten. Die Gasschicht werde zwischen zwei ihr parallele, unendlich große, schwarz strahlende Flächen von derselben Temperatur T eingeschlossen. Der Zwischenraum ist dann erfüllt von schwarzer Strahlung; also muß in jeder Wellenlänge und jeder Richtung die Strahlung in Richtung und Gegenrichtung gleich und die ausgesandte Strahlung gleich der absorbierten Strahlung sein. Die Geometrie der Strahlung ergibt (wir brauchen die Gasschicht nur durch eine schwarze Fläche ersetzt denken), daß ein Flächenstückchen f der Oberfläche der Gasschicht von der gegenüberliegenden schwarzen Fläche in Richtung ϑ Strahlung zugesandt erhält (Gleichung 1):

$$f \cdot 2\pi J_\lambda\, d\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta,$$

die nach Gleichung (13) absorbiert wird. Diese absorbierte Menge muß aber in derselben Richtung wieder ausgestrahlt werden. Also ergibt sich das

Strahlungsgesetz einer ebenen, dünnen Gasschicht (oder einer Schicht beliebigen Materials mit endlichem Absorptionsvermögen):

14) In Richtung ϑ ausgesandte Strahlung

$$= f \cdot 2\pi J_\lambda\, d\lambda \left(1 - e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}}\right) \sin\vartheta \cos\vartheta\, d\vartheta,$$

von dem Strahlungsgesetz einer schwarzen Fläche (oder rauhen Oberfläche eines undurchsichtigen Körpers ($J_\lambda = i_\lambda$)) sehr verschieden[1]). Für $M = \infty$ werden beide Strahlungsgesetze gleich, d. h.: eine genügend mächtige, isotherme Atmosphäre emittiert schwarze Strahlung.

Für eine Gasschicht von geringer Mächtigkeit Δm erhalten wir aus (14) das Strahlungsgesetz

$$15)\quad f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \cdot k_\lambda \Delta m \cdot \sin\vartheta\, d\vartheta = f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \cdot \propto_\lambda \sin\vartheta\, d\vartheta$$

und nach den ganzen bestrahlten Raum wird ausgesandt

$$16)\qquad f \cdot 2\pi J_\lambda d\lambda \cdot \propto_\lambda .$$

Dies ist zugleich der Bruchteil der ganzen, f von der schwarzen Fläche zugestrahlten Energiemenge $f \cdot \pi J_\lambda d\lambda$, der absorbiert wird.

Wir erhalten demnach in diesem Fall für das Absorptionsvermögen a_λ, wie wir es in Gleichung (5) definiert haben,

$$17)\qquad a_\lambda = 2 \propto_\lambda ,$$

d. h. das Absorptionsvermögen einer ebenen, dünnen Gasschicht ist bei schwarzer Bestrahlung in jeder Wellenlänge doppelt so groß wie bei senkrecht einfallender Strahlung.

Ankommende schwarze Strahlung ist, kurz ausgedrückt, nach bestimmtem Gesetze diffus. Wir untersuchen den Zusammenhang zwischen a_λ und $\propto_\lambda$ in anderen Spezialfällen, in welchen die Intensität der ankommenden Strahlung in den Richtungen ϑ anderem Verteilungsgesetze folgt. Von einer Krümmung der Strahlen beim Durchlaufen verschieden dichter Gasmassen werde abgesehen. Wir schicken voraus, daß das auftretende Integral $\beta^n \int\limits_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx$ den Grenzwert 0 erreicht für $\beta = 0$ und für $\beta = \infty$.

[1]) Dies Strahlungsgesetz findet sich bereits angegeben bei J. Koenigsberger, *Über die Emission von Körpern mit endlichem Absorptionsvermögen.* Wied. Ann. XII, S. 342, 1903, sowie in der bereits erwähnten Arbeit von Gold.

Der dünnen Gasschicht stehe im Abstande Z eine schwarze Fläche gegenüber; der Zwischenraum sei mit demselben Gase gefüllt. Der Zylinder vom Querschnitt 1 cm² und der Höhe Z enthalte die Masse M. Auf die Fläche f fällt aus der Richtung ϑ eine von der schwarzen Fläche ausgehende, durch die zwischenliegende Gasmasse geschwächte Strahlung im Betrage $f \cdot 2\pi \cdot J_\lambda \, d\lambda \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}} d\vartheta$, von welcher in der dünnen Schicht der Bruchteil $\frac{\alpha_\lambda}{\cos\vartheta}$ absorbiert wird. Wir erhalten so über alle Richtungen integriert

$$\text{Auffallende Strahlung } S_\lambda \, d\lambda = f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \cos\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}} d\vartheta$$

$$18) \qquad = f \cdot \pi J_\lambda \, d\lambda \left[e^{-\beta}(1-\beta) + \beta \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \right].$$

$$\text{Absorbierte Strahlung } \varDelta S_\lambda \, d\lambda = \alpha_\lambda f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda M}{\cos\vartheta}} d\vartheta$$

$$19) \qquad = 2\alpha_\lambda f \cdot \pi J_\lambda \, d\lambda \left[e^{-\beta} - \beta \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx \right].$$

$$\beta = k_\lambda M.$$

Das Absorptionsvermögen $a_\lambda = \frac{\varDelta S_\lambda \, d\lambda}{S_\lambda \, d\lambda}$ ist in diesem Falle Funktion von M.

Um den physikalischen Bedingungen zu genügen, nehmen wir an, daß die zwischenliegende Masse M, durchwegs auf die Temperatur der schwarzen Fläche gebracht, ebenfalls strahle. Im Abstande z von der bestrahlten Schicht nehmen wir eine dünne, strahlende Schicht an; beide sind getrennt durch eine Gasmasse von der Mächtigkeit m. Von dieser Schicht gemäß Gleichung (15) ausgehend fällt auf f in Richtung ϑ Strahlung von der Intensität

$$f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, k_\lambda \, dm \sin\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} \, d\vartheta ,$$

von welcher der Bruchteil $\frac{\alpha_\lambda}{\cos\vartheta}$ absorbiert wird. Wir erhalten so

Auffallende Strahlung $S_\lambda \, d\lambda$

$$\begin{aligned} & = f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, k_\lambda \int_0^M dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta \, e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} \, d\vartheta \\ \text{20)} \quad & \\ & = f \cdot \pi J_\lambda \, d\lambda \left[1 - e^{-\beta}(1-\beta) - \beta^2 \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} \, dx \right] \end{aligned}$$

Absorbierte Strahlung $\Delta S_\lambda \, d\lambda$

$$\begin{aligned} & = f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, \alpha_\lambda k_\lambda \int_0^M dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \, e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}} \, d\vartheta \\ \text{21)} \quad & \\ & = f \cdot 2\pi J_\lambda \, d\lambda \, \alpha_\lambda \left[1 - e^{-\beta} + \beta \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x} \, dx \right] \\ & \qquad \beta = k_\lambda M \end{aligned}$$

und wieder einen verwickelten Zusammenhang zwischen a_λ und α_λ. Lassen wir aber $M = \infty$ werden, so ergibt sich wieder Gleichung (17) $a_\lambda = 2\,\alpha_\lambda$; selbstverständlich, da, wie wir oben zeigten, eine genügend mächtige, isotherme Atmosphäre schwarze Strahlung liefert. Grenzen wir anderseits eine beliebige Masse M durch eine schwarze Fläche ab, die ebenfalls bei gleicher Temperatur strahlt, so haben wir (18) zu (20) und (19) zu (21) zu addieren und bekommen wieder schwarze Strahlung. Was die Masse M an Strahlung der schwarzen Fläche absorbiert, gibt sie in derselben Wellenlänge in gleichem Betrage weiter. Eine isotherme Atmosphäre auf gleich temperierter schwarzer Unterlage befindet sich im Strahlungsgleichgewicht. Daraus folgt: S t r a h l t d i e E r d o b e r f l ä c h e s c h w a r z , s o k a n n k e i n e a u f l i e g e n d e i s o t h e r m e A t m o s p h ä r e v o n g l e i c h e r T e m -

peratur die in den Weltenraum austretende Strahlung ändern. Wir werden auf diese Verhältnisse bei Besprechung der Versuche Very's zurückzukommen haben.

Um den Bedingungen, die wir weiterhin bei Behandlung des Strahlungsgleichgewichtes finden werden, näherzukommen, nehmen wir an, daß die Strahlungsintensität proportional der durchstrahlten Masse m zunimmt. In Gleichung (15) setzen wir dementsprechend

22) $$J_\lambda = J_{0\lambda} + J_{1\lambda} \cdot k_\lambda \cdot m$$

Wir schreiben $k_\lambda m$, um $J_{0\lambda}$ gleich $J_{1\lambda}$ gleich dimensioniert zu erhalten; für das erste Glied rechts gelten die Beziehungen (20) und (21), und für das zweite Glied ergibt sich

Auffallende Strahlung $S_\lambda\, d\lambda$

23) $$= f \cdot 2\pi J_{1\lambda}\, d\lambda \int_0^M k_\lambda m\, dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}}\, d\vartheta$$
$$= f \cdot J_{1\lambda}\, d\lambda \frac{2\pi}{3}\left[1 - e^{-\beta}(1 + \beta - \beta^2) - \beta^3 \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx\right]$$

Absorbierte Strahlung $\Delta S_\lambda\, d\lambda$

24) $$= f \cdot \alpha_\lambda J_{1\lambda}\, d\lambda \int_0^M k_\lambda m\, dm \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} e^{-\frac{k_\lambda m}{\cos\vartheta}}\, d\vartheta$$
$$= f \cdot \alpha_\lambda J_{1\lambda}\, d\lambda\, \pi\left[1 - e^{-\beta}(1 + \beta) + \beta^2 \int_\beta^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx\right.$$
$$\beta = k_\lambda m$$

und aus diesen beiden Beziehungen sowohl für sehr kleine, wie sehr große m

$$a_\lambda = \tfrac{3}{2}\alpha_\lambda.$$

Für das ganze J_λ der Gleichung (22) ergibt sich

$$
25)\qquad \begin{aligned} &\text{für kleine } m && a_\lambda = 2\,\alpha_\lambda \\ &\text{für große } m && a_\lambda = \frac{2\,J_{0\lambda} + J_{1\lambda}}{J_{0\lambda} + \frac{2}{3}\,J_{1\lambda}}. \end{aligned}
$$

Stets ergibt sich ein a_λ etwas kleiner wie für schwarze Strahlung; für $J_{1\lambda}$ klein gegen $J_{0\lambda}$ kann der Unterschied vernachlässigt werden.

[Dasselbe Resultat ergibt sich für den Ansatz

$$
J_\lambda = J_{0\lambda} + \sum_1^n J_{n\lambda} \cdot (k_\lambda m)^n,
$$

da wir für große m

$$
S_\lambda\, d\lambda = f\pi J_{0\lambda}\, d\lambda + f\, 2\,\pi\, \Sigma\, J_{n\lambda}\, \frac{n!}{n+2}
$$

$$
\varDelta S_\lambda\, d\lambda = 2\,\alpha_\lambda\, f\pi\, J_{0\lambda}\, d\lambda + \alpha_\lambda f\, 2\,\pi\, \Sigma\, J_{n\lambda}\, \frac{n!}{n+1}
$$

erhalten.]

Würden wir anderseits annehmen, daß die Strahlungsintensität proportional der durchstrahlten Masse abnimmt,

$$
J_\lambda = J_{0\lambda} - J_{1\lambda} \cdot k_\lambda m,
$$

so würden wir für kleine m wieder $a_\lambda = 2\,\alpha_\lambda$ erhalten; für große m können wir den Ausdruck für a_λ nicht bilden, da wir selbstverständlich nur bis zu einem m gehen können, das durch die Bedingung $0 = J_{0\lambda} - J_{1\lambda} \cdot k_\lambda m$ begrenzt ist. Doch läßt sich allgemein folgendes aussagen:

Nimmt die Strahlungsintensität in Richtung der durchstrahlten Masse zu, so sind alle a_λ zwischen $2\,\alpha_\lambda$ (schwarze Strahlung) und α_λ (parallele Strahlung) eingeschlossen; nimmt die Strahlungsintensität in Richtung der durchstrahlten Masse ab, so ist stets $a_\lambda > 2\,\alpha_\lambda$ (größer wie für schwarze Strahlung). Dies einzusehen schlagen wir um f in die isotherm gedachte Gasmasse eine Halbkugel mit beliebigem Radius und ziehen von f nach allen Richtungen ϑ Strahlungskegel mit kleinen Öffnungswinkeln Ω derart, daß von den auf der Kugelfläche ausgeschnittenen Basisflächen gleichviel Strahlung bei f zur Absorption gelangt. Wir haben so schwarze Strahlung und

$a = 2\alpha_\lambda$. Lassen wir nun die Strahlung aus der Richtung $\vartheta = 0$ zunehmen, so nimmt der Betrag der aus dieser Richtung fallenden Strahlung zu, und das Minus der Strahlung mit größerem ϑ kann der Absorptionen wegen nicht ausgeglichen werden, wenn wir diese Kegel bis auf das Niveau der Tangentialfläche an der Kugel bei $\vartheta = 0$ verlängern. Je stärker die Strahlung in Richtung $\vartheta = 0$ zunimmt, desto mehr nähern wir uns den Verhältnissen paralleler Strahlung mit $a_\lambda = \alpha_\lambda$. Nimmt umgekehrt die Strahlung in Richtung $\vartheta = 0$ ab, so überwiegen die stärker geneigten Strahlen, die mit $\frac{a\lambda}{\cos\vartheta}$ eingehen, und a_λ wird größer wie $2\alpha_\lambda$.

In Gleichung (10) war α_λ definiert als $k_\lambda\, dm$. Für diffuse Strahlung können wir die entsprechende Beziehung ansetzen, indem wir k_λ im Verhältnis $\frac{a_\lambda}{\alpha_\lambda}$ vergrößern.

Diese Veränderlichkeit von a_λ macht eine strenge, mathematische Behandlung des Strahlungsgleichgewichtes unmöglich. Denn a_λ ist Funktion der Temperaturverteilung, die eben ermittelt werden soll. Man könnte in schrittweiser Annäherung rechnen. Allein in den Fällen, die von Wichtigkeit sein werden, ergibt sich eine solche Temperaturzunahme, daß in Gleichung (25) $J_{1\lambda}$ ungefähr von gleicher Größe wie $J_{0\lambda}$ wird und wir mit genügender Genauigkeit mit $a_\lambda = 2\alpha_\lambda$, also denselben Verhältnissen wie bei schwarzer Bestrahlung, rechnen können. Eine größere Genauigkeit wird schon dadurch illusorisch, daß die in Betracht kommenden Absorptions-Koeffizienten für Luft nicht mit genügender Genauigkeit bekannt sind. Wir werden deshalb mit einem nur von der Wellenlänge abhängigen a_λ rechnen, das die beobachteten Absorptionsverhältnisse möglichst richtig darstellt und, da dies a_λ als für schwarze Strahlung gültig angenommen wird, zur Bildung des Kirchhoffschen Gesetzes (Gleichung 6 und 7) verwenden.

III. Die beiden die Erdatmosphäre durchsetzenden Strahlungen, die Sonnenstrahlung mit $\lambda_{\max} = 0{,}470\,\mu$ und die Erdstrahlung mit $\lambda_{\max}$ ungefähr $= 10\,\mu$, sind in Bezug auf die

Intensität ihrer Komponenten so verschieden zusammengesetzt, daß wir ihre Absorptionsverhältnisse getrennt behandeln müssen. Das Absorptionsvermögen der Atmosphäre für Sonnenstrahlung können wir nur auf wenig genaue Weise abschätzen. Durch Extinktionsbeobachtungen des Sternenlichtes und Messung der Sonnenstrahlung bei verschiedenen Zenithdistanzen können wir wohl die Schwächung der Strahlung für den jeweiligen Zustand der Atmosphäre sehr genau ermitteln; allein wir haben diese streng zu unterscheiden von wirklicher Absorption. Diese Schwächung der direkten Strahlung beruht in erster Linie auf diffuser Reflexion an den Gasmolekeln, dem suspendierten Staube und den Schlieren, die bei Durchmischung auftreten; nur ein kleiner Betrag resultiert aus der Umwandlung der strahlenden Energie in Wärme, die zur Temperaturerhöhung der durchstrahlten Massen verwandt wird. Nur dieser letztere Teil ist wirkliche Absorption, die in das zu behandelnde thermodynamische System eintritt und in dem Kirchhoffschen Gesetze zum Ansatze kommt, während der andere Teil in den 37 %, die zur Berechnung der Albedo dienten, eingeschlossen ist. Eine strenge Trennung der Schwächung in diese beiden Summanden ist zur Zeit nicht möglich. Das Absorptionsvermögen der Hauptbestandteile der Atmosphäre, Sauerstoff und Stickstoff, zeigt sich durch das Auftreten tellurischer Linien; allein die in Betracht kommenden Wellenlängenbereiche sind zu klein, um in Betracht kommende Energiemengen umzusetzen. Über das Absorptionsvermögen von Wasserdampf und Kohlensäure liegen zuverlässige Laboratoriumsversuche vor, eine Anwendung dieser Messungen auf athmosphärische Verhältnisse ist aber nicht mit Sicherheit möglich. Denn das Absorptionsvermögen ist Funktion des Druckes; ein und dieselbe Wasserdampf- oder Kohlensäuremenge absorbiert um so schwächer, je mehr sie durch Abnahme des Druckes in Richtung der sie durchsetzenden Strahlen gestreckt wird. Aus dem Absorptionsvermögen, das im Laboratorium bei Drucken von etwa 1 Atmosphäre ermittelt wurde, kann nicht geschlossen werden auf das Absorptionsvermögen derselben Menge, falls sie in der Atmosphäre unter einem Partialdrucke von wenig mm *Hg*, oder gar Bruchteilen eines Millimeters stehend durchstrahlt wird. Abbot und Fowle (loc. cit., Teil II, Kap. IV, S. 161) kommen durch sorgfältige Überlegungen zum Schlusse, daß aus einem Bündel Sonnenstrahlung vom Querschnitt der Erde beim Durchsetzen der Atmosphäre (es kommen also alle Richtungen mit den Vertikalen in Betracht) bei mittleren Feuchtigkeitsverhältnissen etwa 12% absorbiert werden. Dieser Wert dürfte eher zu groß sein. Mangels besserer Unterlagen werden wir annehmen, daß von der einfallenden Sonnenstrahlung durchschnittlich 10% zur Absorption gelangen. Mit weit größerer Sicherheit läßt sich die Absorption der Erdstrahlung abschätzen, da sie hauptsächlich Wellenlängen enthält, die von Wasserdampf besonders kräftig absorbiert werden. Wir schließen uns den Ausführungen Abbot-Fowle's an (loc. cit., Teil II, Kap. IV, S. 172): „Gemäß den Arbeiten von Rubens und Aschkinass, Langley, Keeler und Very und Nichols können wir sicher schließen, daß der zehnte Teil des Wasserdampfes, der durchschnittlich in einer vertikalen Säule der Atmosphäre enthalten ist, hinreicht, um die Hälfte der von der Erdoberfläche nach dem Weltenraum ausgesandten Strahlung zu absorbieren; und es ist höchst wahrscheinlich, daß mit Rücksicht auf die größeren Luftmassen, welche von vielen Strahlen, die von der Erde nach dem Weltenraum ausgesandt werden, schief durchsetzt werden, selbst an einem klaren Tage neun Zehntel der von der festen und flüssigen Erdoberfläche ausgesandten Strahlen durch den Wasserdampf der Atmosphäre absorbiert werden."

[Die Absorptionswirkung der in der Atmosphäre enthaltenen Kohlensäure tritt nach Abbot und Fowle (loc. cit., Teil II, Kap. IV, S. 172) gegenüber der Wirkung des Wasserdampfes vollständig zurück.]

Wir werden also weiterhin die Absorption eines Gemisches von Sauerstoff und Stickstoff als verschwindend klein annehmen, den mit Wasserdampf beladenen Teil der Atmosphäre höchstens 10% der Sonnenstrahlung und mindestens 90% der Erdstrahlung absorbieren lassen. Dadurch soll aber lediglich ein Mechanismus geschildert, nicht eine Wärmebilanz aufgestellt werden. In Bezug auf letztere absorbiert die Atmosphäre bei stationärem Zustande überhaupt nichts, denn was absorbiert wird, wird durch Strahlung restlos wieder abgegeben, sowohl von der Atmosphäre als Ganzem, wie von jeder einzelnen Schicht. Wir sind uns auch klar darüber, daß, wenn wir das Gesetz der Absorption in die Form kleiden $S = S_0 e^{-k_\lambda m}$, wir mangels eines besseren Gesetzes von dem Ansatze $dS = -S k_\lambda dm$ ausgegangen sind, also sicherlich nicht richtig die Absorption proportional der Masse, unabhängig von dem Drucke, unter dem sie steht, angesetzt haben.

Das Absorptionsvermögen der Atmosphäre könnte indirekt aus ihrem Strahlungsvermögen bestimmt werden. Mehrfach wurden Versuche unternommen, letztere Größen durch die nächtliche Ausstrahlung einer schwarzen Fläche zu bestimmen; ihre Bedeutung wurde von F. M. Exner[1]) angezweifelt. Allein, wie in § 6 gezeigt werden wird, bestätigen sie vollständig die weiterhin entwickelte Theorie. Durch Laboratoriumsversuche hat Very[2]) das Strahlungsvermögen abgeschlossener Gasmassen zu bestimmen versucht; seine Messungsresultate sind leider in die Literatur übergegangen, obwohl sie, worauf auch E. Gold (loc. cit., S. 53) hinweist, unmöglich richtig sein können. Die Gasmasse ist in einem Rohr durch eine Steinsalzplatte und einen beweglichen, geschwärzten Stempel abgeschlossen, und das Ganze isotherm auf konstanter Temperatur gehalten. Die Strahlung des Stempels und der Gasmasse wird gemessen, der Stempel eine gemessene Strecke zurückgezogen, und nun eine größere Strahlung gemessen, die fälschlich der hinzugekommenen Gasmasse zugeschrieben wird. Denn die hin-

---

[1]) Felix M. Exner, Über den Wärmeaustausch zwischen Erdoberfläche und der darüber fließenden Luft. Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften in Wien, math.-phys. Klasse, Bd. CXX, Abh. IIa, Februar 1911.

[2]) Frank Very, Experimentaluntersuchung über atmosphärische Strahlung. Ausführliches Referat: Meteorologische Zeitschrift, Bd. XXXVI S. 223, 1901.

zugekommene Gasmasse strahlt nicht nur, sondern sie absorbiert auch einen Teil der Strahlung des Stempels und zwar derart, daß nach dem Kirchhoffschen Gesetze gerade Kompensation eintreten muß. (Wie oben S. 65 gezeigt, kann eine isotherme Atmosphäre die Strahlung einer schwarzen Unterlage nicht ändern.) Bei einer fehlerfreien Versuchsanordnung muß die Stellung des Stempels ohne Einfluß auf die ausgesandte Strahlung sein. Daß seine Stellung dennoch von Einfluß ist, rührt daher, daß das Rohr nebst Stempel einen unvollkommenen schwarzen Hohlraumstrahler darstellt, der schwärzer, also besser strahlend wird, je mehr er sich durch Zurückziehen des Stempels einem vollkommenen Strahler, wie er von Lummer und Kurlbaum benutzt wird, nähert.

§ 2. **Strahlungsgleichgewicht bei grauer Strahlung.**

Eine Atmosphäre strahle grau, d. h. ihr Absorptionsvermögen a und der Absorptionskoeffizient k sind unabhängig von der Wellenlänge λ; die Wärmeabgabe bei grauer Strahlung ist durch Gleichung (9) bestimmt.

Die z-Achse legen wir von oben nach unten, d. i. der Schwerkraft entgegen. Eine Schicht von der Dicke dz sei ausgezeichnet durch die Dichte ϱ, die Temperatur T, den Absorptionskoeffizienten k und das Absorptionsvermögen $a = k\varrho\, dz = k\, dm$, dm die Masse per Querschnittseinheit. Diese Schicht gibt nach jeder Seite $e = aE = k\, dm E \frac{\text{Grammkal.}}{\text{cm}^2\ \text{min}}$ ab. E ist die entsprechende Größe für einen schwarzen Strahler von gleicher Temperatur. In Richtung $+z$ und $-z$ wird die Schicht von Energieströmen B und A durchsetzt, geliefert durch die Strahlung der höher resp. tiefer liegenden Schichten und etwa vorhandener, äußerer Strahlungsquellen. Diese Ströme werden beim Durchsetzen der Schicht um den Bruchteil $a = k\, dm$ durch Absorption geschwächt, und durch die Strahlung der Schicht um den Betrag $aE = k\, dm\, E$ verstärkt. Berücksichtigen wir, daß B in Richtung z, A in Richtung $-z$ verläuft, so erhalten wir die beiden Hauptgleichungen, die allen weiteren Betrachtungen zu Grunde liegen:

26) $$\frac{dB}{dm} = -kB + kE$$

27) $$\frac{dA}{dm} = kA - kE.$$

Ist die Temperaturverteilung, also auch Verteilung von E bekannt, so könnte B und A für jede Stelle z der Atmosphäre berechnet werden; denn durch Auflösung der beiden Differentialgleichungen enthalten wir B und A als Funktion der Masse m, die pro cm² zwischen einem Ausgangsniveau und der betrachteten Stelle liegt; und mit Hilfe des Temperaturverteilungsgesetzes kann, auf ähnliche Weise, wie unten gezeigt werden wird, die Abhängigkeit von z ermittelt werden. Ist E resp. T unbekannte Funktion von z resp. m, so ist die Lösung unbestimmt, da die beiden Gleichungen 3 Unbekannte B, A und E verbinden. Jede weitere Bedingungsgleichung macht die Lösung eindeutig. Wir verlangen Strahlungsgleichgewicht. Die gewonnene Wärmemenge $k\,dm\,B + k\,dm\,A$ muß für jede Schicht gleich der nach beiden Seiten abgegebenen Wärmemenge $2k\,dm\,E$ sein. Wir erhalten also die Bedingungsgleichung des Strahlungsgleichgewichtes

28) $$2kE = kB + kA.$$

Ohne diese Bedingung folgt aus (26) und (27)

29) $$\frac{dB}{dm} + \frac{dA}{dm} = -k(B - A).$$

Die Bedingungsgleichung liefert

30) $$\frac{dB}{dm} - \frac{dA}{dm} = 0,$$

so daß sich ergibt

30a) $$B - A = \text{const} = 2\gamma.$$

Wir haben also den Satz: Herrscht bei grauer Strahlung Strahlungsgleichgewicht, so ist die Differenz der Energieströme B und A konstant. Diese Konstante wird im folgenden stets mit 2γ bezeichnet.

Aus (28), (29), (30) folgt

$$\frac{dB}{dm} = -k\gamma; \quad \frac{dA}{dm} = -k\gamma$$

und die Lösung des Problems

$$\text{(31)} \qquad \begin{cases} B = -k\gamma m + B_0 \\ A = -k\gamma m + A_0 \\ E = -k\gamma m + E_0. \end{cases}$$

B_0 und A_0 sind dem jeweiligen Spezialfalle anzupassende Integrationskonstanten. Stets ist

$$\text{(32)} \qquad \gamma = \frac{B_0 - A_0}{2}; \qquad E_0 = \frac{B_0 + A_0}{2}.$$

Ansatz und Lösung dieses Strahlungsproblems sind von K. Schwarzschild (loc. cit.) gegeben.

Da $E = sT^4$ folgt: Bei Strahlungsgleichgewicht grauer Strahlung nimmt die Temperatur mit der Tiefe ab, zu oder ist konstant, je nachdem $\gamma > 0, < 0, = 0$.

Wir sehen von einer Veränderlichkeit des Wertes g der Schwerkraft ab und können 31 schreiben, da der Druck $p = gm$ ist,

$$\text{(33)} \qquad E = sT^4 = -\frac{k\gamma}{g}p + sT_0^4,$$

worin T_0 durch die Temperatur an der Grenze der Atmosphäre ($m = 0$, $p = 0$) bestimmt ist.

Wir untersuchen mit Schwarzschild die mechanische Stabilität bei Strahlungsgleichgewicht. Für jedes mechanische Gleichgewicht muß die Bedingung $dp = g\varrho\, dz$ erfüllt sein, die wir mit Hilfe der Zustandsgleichung der Gase $\frac{p}{\varrho} = gRT$

schreiben können $\frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT}$. Verbinden wir damit die Beziehung, die sich ergibt, wenn wir (33) logarithmisch differenzieren, so erhalten wir den Zusammenhang zwischen T und z in der Form

$$\frac{dz}{R} = \frac{4\,T^4\,dT}{T^4 - T_0^4}. \tag{34}$$

Damit stabiles Gleichgewicht vorhanden ist, darf der Temperaturgradient $\frac{dT}{dz}$ nicht größer sein als der Temperaturgradient $\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}\frac{1}{R}$, der für indifferentes Gleichgewicht gilt[1]). Bedingungsgleichung für Stabilität ist deshalb

$$1 - \left(\frac{T_0}{T}\right)^4 < 4\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}. \tag{35}$$

Der Ausdruck rechts hat für 1 atomige ($\varkappa = \frac{5}{3}$), 2 atomige ($\varkappa = \frac{7}{5}$), 3 atomige ($\varkappa = \frac{4}{3}$), noch mehr atomige Gase ($\varkappa < \frac{4}{3}$) die Werte $\frac{8}{5}$, $\frac{8}{7}$, $1, < 1$. Wir schließen: Nimmt die Temperatur mit der Tiefe zu, so ist für 1, 2 und 3 atomige Gase stets Stabilität vorhanden. (Bei Temperaturabnahme nach unten ist selbstverständlich stets Stabilität vorhanden.)

Gleichung (34) läßt sich integrieren und wir erhalten, wenn wir noch die Höhe h, $dh = -dz$ einführen:

$$\begin{aligned} \text{const} + \frac{z}{R} &= \text{const} - \frac{h}{R} = \\ &= T_0\left[4\,\frac{T}{T_0} + \log\frac{T - T_0}{T + T_0} - 2\,\text{arctg}\,\frac{T}{T_0}\right]; \quad T > T_0,\ \gamma < 0 \\ &= T_0\left[4\,\frac{T}{T_0} - \log\frac{T_0 + T}{T_0 - T} - 2\,\text{arctg}\,\frac{T}{T_0}\right]; \quad T < T_0,\ \gamma > 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Schwarzschild hat die Gleichungen (31) angewandt auf die Sonne. An ihrer Oberfläche ist die Einstrahlung, also auch B_0, $= 0$;

[1]) R. Emden, Gaskugeln (Kap. XVII, §§ 10, 11, 12 und Kap. XIX, § 5), 1907.

A_0 ist bestimmt durch die Solarkonstante, also durch die effektive Sonnentemperatur, und E_0 resp. T_0, die Temperatur der äußersten Schichten, wird nach (32) $T_0 = \frac{T \text{ effektiv}}{\sqrt[4]{2}}$. (Vgl. die Ausführungen des folgenden Paragraphen.) Mit Hilfe dieses T_0 wurde Gleichung (36) numerisch ausgewertet.

Bevor wir die Gleichung (31) auf die Erde und ihre Atmosphäre anwenden, bringen wir noch einige formale Änderungen an, die sich später nützlich erweisen werden. Wir können B_0 und A_0 und dadurch E_0 bestimmen durch die Werte von B, A, E an der oberen Grenze der Atmosphäre, die wir $\overline{B}$, $\overline{A}$, $\overline{E}$ schreiben, und haben

$$
\begin{aligned}
B &= -k\gamma m + \overline{B} \\
A &= -k\gamma m + \overline{A} \\
E &= -k\gamma m + \overline{E} \\
\gamma &= \frac{\overline{B} - \overline{A}}{2}, \qquad \overline{E} = \frac{\overline{B} + \overline{A}}{2}
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Haben wir, wie bei der Erde, eine Atmosphäre von endlicher Masse M pro cm², so kann es zweckmäßig sein, A_0 zu bestimmen durch $\underline{A}$, den Wert von A an der unteren Grenze, $m = M$. (Im folgenden werden stets Werte, die sich auf die obere resp. untere Grenze beziehen, durch einen oben resp. unten angebrachten Querstrich ausgezeichnet.) Dann ergibt eine leichte Umrechnung

$$
\begin{aligned}
B &= -k\gamma m + \overline{B} \\
A &= -k\gamma(m - M) + \underline{A} = -k\gamma m + \frac{k\overline{B}M + 2\underline{A}}{kM + 2} \\
E &= -k\gamma m + \overline{E} = -k\gamma\left(m - \frac{M}{2}\right) + \frac{\overline{B} + \underline{A}}{2} \\
\gamma &= \frac{\overline{B} - \underline{A}}{kM + 2}; \quad \overline{E} = \frac{k\overline{B}M + \overline{B} + \underline{A}}{kM + 2}; \quad \underline{E} = \frac{k\underline{A}M + \overline{B} + \underline{A}}{kM + 2}.
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Ist der Wert von B und A für eine Stelle gegeben, etwa

$\overline{B}$ und $\overline{A}$ (Gleichung 37) oder $\overline{B}$ und $\underline{A}$ (Gleichung 38), so ist E resp. T für jede Stelle m eindeutig bestimmt. Soll aber T als Funktion von z resp. h ermittelt werden, so bleibt eine neu auftretende Integrationskonstante zu unserer Verfügung (vgl. Gleichung 36). Denn ist $m = f(T)$ und berücksichtigen wir die mechanische Gleichgewichtsbedingung

$$dp = -g\varrho dh = -\frac{gp\,dh}{RT},$$

so haben wir, da $p \infty m$

$$\int T d(\log f(T)) = -\frac{g}{R}\int dh.$$

Die Lösung ist wieder eindeutig, wenn T für ein bestimmtes h oder auch die ganze Masse M (endlich) gegeben ist.

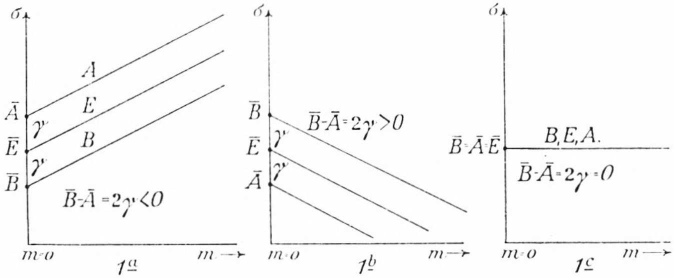

Fig. 1.

Den Inhalt der Gleichung (37) resp. (38) können wir auf einfache Weise graphisch zur Darstellung bringen (Fig. 1). Abszisse ist die durchstrahlte Masse m, Ordinate die Stärke des Energiestromes in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ \text{min}}$. $\overline{B}$ ist eine „Solarkonstante“. Für $m = 0$ treffen wir die Werte $\overline{B}$, $\overline{A}$, $\overline{E}$; die Ordinate bei $m = M$ bestimmt $\underline{B}$, $\underline{A}$, $\underline{E}$. Stets ist $E = \frac{B + A}{2}$ und die Neigung der unter sich parallelen Geraden ist proportional ihrem gegenseitigen Abstande, nach aufwärts oder abwärts gerichtet, je nachdem die Ausstrahlung oder Einstrahlung überwiegt. Sind beide gleich, so ist $E = \overline{E} = \overline{B} = \overline{A}$, und wir haben Isothermie. Würde die Erdatmosphäre nicht durch Konvektionsströme und die allgemeine Zirkulation gemischt, so würden in den nördlichen Gebieten die Temperaturverhältnisse im Winter der Fig. 1a, im Sommer der Fig. 1b sich anpassen.

Wir betrachten die Atmosphäre als Ganzes und durch genügend lange Zeiten. Da Ausstrahlung und Einstrahlung sich Gleichgewicht halten, haben wir $\overline{B} - A = 2\gamma = 0$ (Fig. 1c) und nach (37)

$$E = \text{const} = \overline{B} = B = A. \tag{39}$$

D. h. durch die ganze Atmosphäre hindurch ist die Temperatur konstant und gleich der Temperatur eines schwarzen Strahlers, der die über die Erde gleichmäßig ausgebreitete Sonnenstrahlung wieder zurückstrahlt. Diese Temperatur haben wir (vgl. § 1) effektive Erdtemperatur genannt. Die ganze Atmosphäre befände sich somit auf der effektiven Erdtemperatur, T eff. $= 254 = -19^0$ C. Bestimmen wir weiter die Oberflächentemperatur der Erde. Von unten muß in die Atmosphäre ein Energiestrom $A = B = \overline{B} = s\,T^4_{\text{eff.}}$ eintreten, geliefert dadurch, daß die Erdoberfläche einen Teil des unten aus der Atmosphäre austretenden Energiestromes $B = \overline{B}$ reflektiert und einen zweiten Teil gemäß ihrer Temperatur T grau ausstrahlt. Ist das Absorptionsvermögen der Erde a, so ist ihr Reflexionsvermögen $1 - a$, der erste Teil wird $(1 - a)\,\overline{B} = (1 - a)\,s\,T^4_{\text{eff.}}$, der zweite Teil $a\,s\,T^4$; wir haben die Bedingungsgleichung

$$(1 - a)\,s\,T^4_{\text{eff.}} + a\,s\,T^4 = s\,T^4_{\text{eff.}} \tag{40}$$

und erhalten die Temperatur der Erdoberfläche $T = T$ eff. $= 254 = -19^0$, unabhängig von ihrem Absorptions- resp. Strahlungsvermögen.

Wir erhalten als Resultat dieser Untersuchung:

Wird die von der Sonne zugestrahlte Energiemenge, vermindert um die Energiealbedo, gleichmäßig verteilt und graue Strahlung vorausgesetzt, so ist bei Strahlungsgleichgewicht die Atmosphäre isotherm, und ihre Temperatur, sowie die Temperatur der strahlenden Erdoberfläche sind gleich der effektiven Erdtemperatur $T = 254^0 = -19^0$ C.

Dies Resultat ist, da die Temperatur der oberen Inversionsschicht durch Beobachtung zu -55^0 C rund bestimmt ist und die Mitteltemperatur der Erdoberfläche $14{,}4^0$ C beträgt, ungenügend. Wir haben deshalb die vereinfachenden Voraussetzungen fallen zu lassen. k und a wurden unabhängig 1. von der Wellenlänge (graue Strahlung); 2. von der Höhe angenommen. Die zweite Annahme ist sicher unstatthaft, denn der in erster Linie absorbierende Wasserdampf nimmt mit der Höhe ab. Es läßt sich aber leicht zeigen, daß der ausgesprochene Satz bestehen bleibt, wenn k resp. a beliebige Funktionen der Höhe sind. Denn führen wir ein die „optische" Masse μ

$$\mu = \int_0^m k\,dm,$$

so können wir die beiden Hauptgleichungen schreiben

$$41)\qquad \begin{aligned} \frac{dB}{d\mu} &= -B + E \\ \frac{dA}{d\mu} &= A + E \end{aligned}$$

und erhalten mit der Bedingungsgleichung $2kE = kB + kA$ wie oben die Lösungen

$$42)\qquad \begin{aligned} B &= -\gamma\mu + B_0 \\ A &= -\gamma\mu + A_0 \\ E &= -\gamma\mu + E_0 \\ B - A &= \text{const} = 2\gamma \end{aligned}$$

und für $\overline{B} = \overline{A}$, $\gamma = 0$ ergibt sich wieder $E = \text{const} = \overline{B}$, also Isothermie von derselben Temperatur.

Wir haben also die erste Annahme, graue Strahlung, fallen zu lassen. Ehe wir dazu übergehen, haben wir uns mit den Untersuchungen Humphreys und Gold's, die graue Strahlung voraussetzen, zu beschäftigen.

Anmerkung. Durch Gleichung 40 hat sich das scheinbar überraschende Resultat ergeben, daß die Temperatur der Erdoberfläche unabhängig von ihrem Absorptionsvermögen, also auch unabhängig von ihrem Emissionsvermögen ist. Dies beruht auf einem allgemeinen Satze: Graue Strahlung vorausgesetzt, bestimmt das Absorptionsvermögen wohl die umgesetzten Wärmemengen und damit die Geschwindigkeit der Einstellung, nicht aber die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes. Denn sind a, r und d die Bruchteile der auf einen Körper fallenden Strahlung S, die von diesem absorbiert, reflektiert und durchgelassen werden, so ist die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes bestimmt durch die Beziehung: abgegebene = zugestrahlte Wärmemengen

$$a s T^4 + r \cdot S + d \cdot S = S,$$

welche Gleichung durch die Beziehung

$$1 = a + r + d$$

die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes T

$$s T^4 = S$$

unabhängig von a bestimmt. Stets ergibt sich die Temperatur eines bestrahlten schwarzen Körpers. Eine versilberte Kugel, eine Gasmasse in einer vollkommen durchsichtigen Hülle eingeschlossen, und ein Schwarzkugelthermometer nehmen, unter denselben Bedingungen bestrahlt, dieselbe Temperatur an. Die Temperatur, auf welche sich ein fester oder gasförmiger Himmelskörper einstellt, ist unabhängig von seiner Albedo (immer graue Strahlung vorausgesetzt) gleich der Temperatur eines unter denselben Bedingungen bestrahlten schwarzen Körpers. Wir haben so den einfachsten Beweis, daß sich die Erdatmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht isotherm auf effektive Erdtemperatur einstellt. Das Absorptionsvermögen macht sich nur geltend, wenn noch Wärmemengen durch sogenannte äußere Wärmeleitung abgegeben werden. Setzen wir diese gleich $h(T - T_0)$, h das äußere Wärmeleitungsvermögen, T_0 die Temperatur der Umgebung, so bestimmt sich T aus der Bedingungsgleichung

$$a s T^4 + r \cdot S + d \cdot S + h(T - T_0) = S$$

und wird

$$s T^4 + \frac{h}{a}(T - T_0) = S,$$

also bei gleichem h mit a zu- und abnehmend. Bei kleinem a (versilberte Kugel $a = 0{,}03$) nimmt T beträchtlich kleinere Werte an wie für $a = 1$.

§ 3. Die Untersuchungen von W. J. Humphreys und E. Gold[1]).

Die Temperatur der oberen Inversion, der Stratosphäre, auf Grund von Strahlungsvorgängen zu bestimmen ist von W. J. Humphreys versucht worden. Seine Ausführungen werden sich als nicht stichhaltig erweisen. Da sie aber mehrfach in die Literatur übergegangen sind, und Humphreys das Verdienst zukommt, zuerst, wenn auch nicht einwurfsfrei, einen richtigen Ausdruck für diese Temperatur gefunden zu haben, müssen sie hier behandelt werden.

Eine strahlende Platte vom Absorptionsvermögen a sei zwischen zwei ihr parallele, schwarze Flächen von der Temperatur T eingeschlossen. Pro Flächeneinheit entnimmt sie dem von beiden Flächen zugestrahlten Betrage $2 E_T = 2 s T^4$ den Bruchteil a, und bei stationärem Zustande wird, da sie nach beiden Seiten ausstrahlt, ihre Temperatur T_2 bestimmt durch die Beziehung

a) $$2 a E_T = 2 a s T_2^4; \qquad T_2 = T.$$

Die eine schwarze Fläche werde entfernt. Da die Platte nun nur noch von einer Seite her Strahlung empfängt, aber immer nach beiden Seiten ausstrahlt, bestimmt sich ihre neue Temperatur T_1 aus der Beziehung

b) $$a E_T = 2 a s T_1^4$$

und aus (a) und (b) folgt

43) $$T_1 = \frac{T}{\sqrt[4]{2}} = \frac{T}{1{,}19}.$$

Die Anwendung dieses Strahlungsschemas auf das zu behandelnde Problem ergibt sich nach Humphreys wie folgt: Die Sonnenstrahlen durchsetzen die Stratosphäre ohne nennenswert

[1]) W. J. Humphreys, Vertical Temperaturgradient of the Atmosphere, especially in the region of the upper inversion. Astrophys. Journal, vol. XXIX, p. 14, 1909.

E. Gold, The Isothermal Layer of the Atmosphere and Atmospheric Radiation. Proceedings of the Royal Society of London, series A, vol. 82, p. 43, 1909.

absorbiert zu werden und veranlassen die tiefer liegenden, wasserdampfhaltigen Schichten, schwarze Strahlung von der effektiven Erdtemperatur $T = 254^0$ auszusenden, die nun von der Stratosphäre zum Bruchteil a absorbiert wird. (Humphreys nimmt die atmosphärische Schicht mit $T = 254^0$ Mitteltemperatur als Strahlungsquelle an. Dies ist, wie bereits oben S. 59 erwähnt, nicht zulässig und durch die vorstehende Betrachtungsweise eliminiert.) Also berechnet sich nach Gleichung (43) die Temperatur der Stratosphäre zu

$$T_1 = \frac{254^0}{\sqrt[4]{2}} = 214^0 = -59^0 \text{ C},$$

während man sie auf Grund zahlreicher Messungen zu rund -55^0 C ansetzen kann. Diese glänzende Übereinstimmung und die Einfachheit der Überlegung haben Zweifel an deren Richtigkeit nicht aufkommen lassen. Daß sie nicht richtig ist, beweist schon die einfache Tatsache, daß sie zu einer unmöglichen Wärmebilanz führt. Denn die Sonne strahlt der Erde (nach Abzug der Albedo) pro Zeit und Flächeneinheit σ-Energieeinheiten zu, welche die Stratosphäre durchsetzen und die tiefer liegenden Schichten so erwärmen, daß diese wieder σ-Einheiten, nur in anderen Wellenlängen, zurückstrahlen. Ohne Zwischentreten der Stratosphäre würde sich also eine richtige Wärmebilanz ergeben. Allein die Stratosphäre absorbiert $a\sigma$-Einheiten und wird dadurch zur Temperatur $T_1 = \frac{T}{\sqrt[4]{2}}$ erhitzt, so daß sie nach jeder Seite hin $\frac{a\sigma}{2}$ Einheiten abgibt. Es verlassen also die Atmosphäre nach außen $\sigma - a\sigma + \frac{a\sigma}{2} = \sigma - \frac{a\sigma}{2}$ Einheiten, so daß die Erde als Ganzes pro Zeit und Flächeneinheit $\frac{a\sigma}{2}$ Einheiten gewinnen würde, was offenbar nicht möglich ist und dem Begriff des Strahlungsgleichgewichtes widerspricht.

Die Arbeit von E. Gold, die wir unten besprechen werden, wird häufig als wertvolle Ergänzung und Erweiterung der

Ausführungen Humphreys' betrachtet. Mit Unrecht, denn sie steht mit ihnen in direktem Gegensatze. Sie bestimmt die Temperatur der Atmosphäre bei Voraussetzung grauer Strahlung richtig durchwegs konstant zu $T = 254^0$, also gleich der effektiven Erdtemperatur.

Das der Formel (b) zu Grunde liegende Strahlungsschema gibt uns bereits einigen Einblick in die nächtlichen Strahlungsverhältnisse bei Strahlungswetter. Die Erdoberfläche gebe pro Minute und Quadratzentimeter S-Wärmeeinheiten ab. Fehlt nachts die Einstrahlung der Sonne und ist die Atmosphäre sehr trocken, ihr Absorptionsvermögen infolgedessen außerordentlich klein, so wird diese Wärmemenge in den Weltenraum ausgestrahlt. Die nächtliche Temperatur der Erdoberfläche kann dann selbst nach heißen Sommertagen sehr tiefe Werte erreichen. (Oparakane: 9. Sept. 1904 12 Uhr mittags 40^0 C, 12 Uhr nachts -9^0 C). Wird durch Beimischung von Wasserdampf das Absorptionsvermögen der Atmosphäre auf den Wert a gebracht, so absorbiert sie aS-Einheiten und sendet bei einer Temperatur T' nach oben und unten je S'-Einheiten aus. Die Erdoberfläche verliert nur noch $S - S'$-Einheiten und in den Weltenraum werden $S - aS + S'$ Einheiten ausgestrahlt. Hierbei haben wir, da wir nicht die einzelnen Wellenlängen berücksichtigten, graue Strahlung der Atmosphäre angenommen. Wir lassen in erster Annäherung die Erdoberfläche schwarz strahlen; namentlich für tiefe Wassermassen dürfte dies mit Rücksicht auf ihr geringes Reflexionsvermögen zutreffen. Ist Strahlungsgleichgewicht vorhanden, so ist $S' = \frac{aS}{2}$ und der Wärmeverlust der Erdoberfläche wird von S auf $S - \frac{aS}{2}$ herabgesetzt. Schon geringe Wasserdampfmengen genügen, die Erdstrahlung kräftig absorbieren zu lassen. Wir schließen: Die strahlende Erdoberfläche vermag eine wasserdampfhaltige Atmosphäre derart anzuheizen, daß ihr eigener Wärmeverlust durch Gegenstrahlung im Maximum auf den halben Wert herabsinkt.

Dieser Strahlungsschutz der feuchten Atmosphäre tritt noch stärker in Erscheinung, wenn wir statt Strahlungsgleichgewicht die in Wirklichkeit vorhandenen Temperaturen berücksichtigen. Wir geben der Erdoberfläche eine Temperatur von 12^0 C, $T = 285^0$. Schwarz strahlend gibt sie $0{,}50 \frac{\text{Grammkal.}}{\text{cm}^2 \text{ min.}}$ ab, und bei Strahlungsgleichgewicht wird die Temperatur der Atmosphäre, unabhängig von ihrem Gehalt an Wasserdampf, $T = \frac{285^0}{\sqrt[4]{2}} = 239^0 = -34^0$ C. Diese abnorm kalte Atmosphäre könnte bereits bei genügendem Gehalt an Wasserdampf den Wärmeverlust der Erdoberfläche auf 50% herabsetzen. Bei höheren Temperaturen, die selbstverständlich nicht durch Strahlungsgleichgewicht bedingt sind, steigt die Gegenstrahlung stark an, proportional T^4. Diese Verhältnisse werden in § 6 eingehend behandelt werden.

Die gediegenen Untersuchungen von E. Gold, deren Studium und Verständnis durch eine sehr gedrängte Darstellungs- und mathematische Bezeichnungsweise erschwert werden, verdienen eine eingehendere, kritische Durchsicht. Wir haben bereits S. 56 aufmerksam gemacht, daß Gold für Strahlungsgleichgewicht zwei Bedingungen als gleichwertig ansetzt: 1. Gleichheit absorbierter und emittierter Strahlung jeder Schicht (enthalten in unserer Gleichung (28)); 2. Gleichheit der Energieströme B und A, welche die Schicht in entgegengesetzten Richtungen durchsetzen. Wie die Untersuchungen des § 2 zeigten, ist das erste Kriterium weit allgemeiner und gilt die zweite Bedingung nur für den Spezialfall der Wärmebilanz Null, $B - A = 0$. Da aber Gold nur diesen Spezialfall näher untersucht, entsteht kein weiterer Nachteil. Das erste Hauptresultat der Goldschen Untersuchungen (loc. cit., S. 5) „or the temperature for the isothermal state must be such, that a full radiator at that temperature would radiate with an intensity equal to the average vertical component of the intensity of solar radiation“ deckt sich mit den Ergebnissen unseres § 2. Dies Resultat ergab sich uns bei Voraussetzung grauer Strahlung der Atmosphäre. Gold hingegen (sein b entspricht unserem k) bemerkt S. 55 ausdrücklich, obwohl b nicht den Index λ trägt, where b may vary with λ; und sein Satz ist ohne weitere Einschränkung der b abgeleitet. Allein es ist a priori klar, daß in dieser Allgemeinheit der Satz nicht richtig sein kann. Denn würde die Atmosphäre nur in zwei Wellenlängen λ_1 und λ_2 strahlen und absorbieren, so ist die Ausstrahlung $b_1 E_{\lambda_1} + b_2 E_{\lambda_2}$ bestimmt durch die Temperatur, die Absorption $b_1 S_{\lambda_1} + b_2 S_{\lambda_2}$ aber abhängig, wie die Strahlungsbestandteile S_{λ_1} und S_{λ_2} in der einfallenden Strahlung gemischt sind. Die Goldsche Schreibweise erschwert den Fehler aufzufinden. Gold schließt (S. 58): Again if we substitute in equation II, we find

$$\text{a)} \qquad \int_0^\infty V_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty 2\pi J_\lambda \, d\lambda \int_0^\infty x^{-3} e^{-u(o,\, p_1)} \, dx$$

(die linke Seite gibt die Strahlung der Sonne, die rechte Seite die Strahlung aller Schichten plus der Erde, welche eine Ebene beim Drucke p_1 durchsetzen)

and if p_1 is small, this becomes

$$\text{b)} \qquad \int_0^\infty V_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty \pi J_\lambda \, d\lambda = \pi J.$$

b) liefert den ausgesprochenen Satz. Allein schreiben wir (a) ausführlicher, unter Weglassung von Unwesentlichem und bezeichnen die Sonnenstrahlung mit S, so haben wir

$$a') \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S_\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, e^{-\frac{b_\lambda p_1}{\cos\vartheta}} \, d\vartheta = \int_0^\infty 2\pi J_\lambda \, d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta \, e^{-\frac{b_\lambda p_1}{\cos\vartheta}} \, d\vartheta.$$

Die Glieder, die b_λ enthalten, sind Funktion φ von λ; wir haben also

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\lambda) \, S_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty 2\pi \, \varphi(\lambda) J_\lambda \, d\lambda$$

und so lange $\varphi(\lambda)$ nicht spezialisiert ist, können keinerlei Schlüsse über den Zusammenhang zwischen $\int\limits_0^\infty S_\lambda\, d\lambda$ und $\int\limits_0^\infty J_\lambda\, d\lambda$ gezogen werden. Gold kommt zu seinem Satze lediglich dadurch, daß er, indem $p_1 = 0$ gesetzt wird, b_λ aus den Gleichungen entfernt. Dasselbe Resultat ergibt sich, wenn in (a') b_λ konstant gesetzt, also graue Strahlung angenommen wird.

Die Goldsche Behandlung atmosphärischer Strahlungsprobleme unterscheidet sich in zwei Punkten von unserem in § 2 und auch weiterhin benützten Verfahren. Wir haben in § 1 gezeigt, daß die Absorption diffuser Strahlung, soweit sie hier in Betracht kommt, sich mit genügender Genauigkeit behandeln läßt, wenn sie als parallele Strahlung mit doppeltem Absorptionskoeffizienten angesetzt wird. Die Ungenauigkeit tritt vollständig zurück gegenüber der Tatsache, daß wir die Zahlenwerte derselben kaum der Größenordnung nach kennen. Gold rechnet formal streng. Dies hat aber den Nachteil, daß das ganze Zahlenmaterial seines Abschnittes VI nur durch mühsame, mechanische Quadratur gewonnen werden kann, während wir, wie sich unten zeigen wird, übersichtliche, geschlossene Ausdrücke erhalten, die sich leicht numerisch ausrechnen lassen. Gold behandelt zweitens Sonnenstrahlung, Erdstrahlung und atmosphärische Strahlung getrennt. Wir haben nach dem Schwarzschildschen Ansatze lediglich die Energieströme B und A zu berechnen; der Einfluß der Sonnen- resp. Erdstrahlung kommt (Gleichung 38) in den Integrationskonstanten $\overline{B}$ (oben auffallende Sonnenstrahlung) und $\underline{A}$ (unten einfallende Erdstrahlung) zur Geltung.

Die Behandlung des Strahlungsgleichgewichtes ist bei Gold mit Aufdeckung der Isothermie von der effektiven Erdtemperatur erledigt. Das Resultat ist, wie wir oben (S. 79) sahen, unbefriedigend und steht in keinem Verhältnis zu dem großen angewandten mathematischen Apparat. Von neuen Gesichtspunkten geht der Abschnitt VI aus: Application to the Earth Atmosphere taking into account the Diminution of Watervapour with Height. Limits to which Convective Equilibrium can subsist. Wir nehmen mit Gold k und a als unabhängig von der Wellenlänge an, setzen also Graustrahlung der Atmosphäre voraus. Ist die Atmosphäre in konvektivem Gleichgewichte, so ist bekanntlich $T \sim p^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$, $\varkappa$ für atmosphärische Luft $= \frac{7}{5}$, also $T = p^{\frac{1}{3,5}}$. Die Ausstrahlung ist bei grauer Strahlung $\sim T^4$, also $\sim p^{\frac{4}{3,5}}$. Dies würde zu unangenehmen Ausdrücken führen, da Integrale von der Form $\int x^{\frac{8}{7}} e^x \, d x$ auftreten würden. Wir setzen deshalb in Annäherung $T \sim p^{\frac{1}{4}}$ und erzielen so $E \sim p$. Wir haben damit $\varkappa = \frac{4}{3}$ angenommen; unsere Betrachtungen wären deshalb für eine 3atomige Gasmasse strenge richtig.

Die Temperaturabnahme bei dieser Annahme berechnet sich[1]) zu $0{,}85^0$ pro 100 m, ist also $15\,^0/_0$ kleiner als der bekannte, adiabatische Temperaturgradient 1^0 pro 100 m. Da $p \sim m$, der Masse, die unterhalb der oberen Grenze der Atmosphäre liegt, haben wir auch $T^4 \sim E \sim m$. Ist die ganze Masse pro cm^2 M und beziehen sich T_0 resp. E_0 auf die untere Begrenzung der Atmosphäre, so haben wir für konvektives Gleichgewicht in dieser Annäherung

$$E = E_0 \frac{m}{M} \tag{44}$$

und unsere beiden Hauptgleichungen (S. 73) werden:

$$\frac{dB}{dm} = -kB + kE_0 \frac{m}{M} \tag{45}$$

$$\frac{dA}{dm} = \quad kA - kE_0 \frac{m}{M}. \tag{45a}$$

Wir nehmen erst k konstant an. Dann erhalten wir die Lösungen:

$$B = B_0 e^{-km} + \frac{E_0 m}{M} - \frac{E_0}{kM}. \tag{46}$$

$$A = A_0 e^{km} + \frac{E_0 m}{M} + \frac{E_0}{kM}. \tag{47}$$

[1]) Vgl. R. Emden, Gaskugeln, S. 355. Leipzig 1907.

Nehmen wir weiter an, daß Sonnenstrahlung im Betrage σ einfällt ($B = \sigma$ für $m = 0$) und die Atmosphäre ohne Temperatursprung auf der Erdoberfläche aufliegt ($A = E_0$ für $m = M$), so erhalten wir:

$$B = \left(\sigma + \frac{E_0}{kM}\right) e^{-km} + \frac{E_0 m}{M} - \frac{E_0}{kM} \tag{48}$$

$$A = -\frac{E_0}{kM} e^{k(m-M)} + \frac{E_0 m}{M} - \frac{E_0}{kM}. \tag{49}$$

Diese Atmosphäre ist nun nicht im Strahlungsgleichgewichte. Bilden wir für die Schicht von m bis $m + dm$ den Überschuß der absorbierten über die ausgestrahlte Energie, also den Ausdruck $k\,dm\,(B + A) - 2k\,dm\,E$, so erhalten wir

$$\text{Absorption} - \text{Emission}$$

$$= k\,dm \left[\left(\sigma + \frac{E_0}{kM}\right) e^{-km} - \frac{E_0}{kM} e^{k(m-M)}\right] \tag{50}$$

und selbst wenn wir von Sonnenstrahlung absehen ($\sigma = 0$)

$$\text{Absorption} \gtrless \text{Emission, wenn } m \lessgtr \frac{M}{2}. \tag{51}$$

Strahlt die Sonne, so erstreckt sich der Überschuß noch auf tiefere Schichten. Der angenommene Temperaturgradient wird somit durch Strahlung gebrochen (selbstverständlich, denn bei grauer Strahlung ist Strahlungsgleichgewicht isotherm), aber im besonderen so, daß mindestens (bei $\sigma = 0$ genau) die obere Hälfte (der Masse nach) der Atmosphäre gewärmt, die untere Hälfte abgekühlt werden. Der Temperaturgradient 1^0 auf 100^m wird, da die Temperatur nach oben stärker abnimmt, noch rascher gebrochen. Daraus zieht Gold folgende Schlüsse. Treten Konvektionsströme auf, so werden der Erdoberfläche Wärmemengen entnommen und in die Atmosphäre übergeführt. Reichen diese Konvektionsströme bis in die obere Hälfte der Atmosphäre empor, so bewirken die emporgeführten Wärmemengen, daß die Temperaturen steigen und somit der adiabatische Temperaturgradient noch rascher gebrochen wird. In den tiefen

Schichten aber können die emporgeführten Wärmemengen die zu große Ausstrahlung decken und das konvektive Gleichgewicht aufrecht halten. Konvektives Gleichgewicht und damit Konvektion sind also nur möglich, wo die Ausstrahlung die Absorption überwiegt, also in der unteren Hälfte der Atmosphäre. So erklärt sich die seltsam scheinende 5. Annahme Golds (loc. cit., S. 46). V. A necessary condition for convection, which forms the keystone of the present discussion, is that, in the upper part of the convective system, the radiation from any horizontal layer (or any elementary sphere) should exceed the absorption by it. Wiederholen wir, um Mißverständnissen vorzubeugen, nochmals mit den Worten Golds (loc. cit., S. 44): I propose to show, that in an atmosphere which is not transparent, but absorbs and emits radiation, the process of radiation would prevent the establishment of the temperature gradient necessary for convective equilibrium, in the upper layers of the atmosphere; and that in the lower layers of our atmosphere it can be maintained only by transference of energy from the earth to the atmosphere by direct convection or by the process of evaporation of water at the earth's surface and subsequent condensation in the atmosphere.

Diese Betrachtungen werden vertieft, indem die Wirkung des Wasserdampfes in Rechnung gezogen wird. Die Menge desselben nimmt mit der Höhe ab; seine Wirkung angenähert darzustellen, setzt Gold $k = \frac{a}{q-m}$, wo a und q geeignete Konstanten sind. Für q werden die Werte $\frac{9}{8}M$ und $\frac{5}{4}M$ angesetzt, welche die Abnahme der Absorption rascher resp. langsamer darstellen sollen, als sie der wirklichen Abnahme des Wasserdampfes entspricht. Senkrecht einfallende Strahlung wird beim Durchlaufen der Atmosphäre um den Bruchteil $\left(\frac{q-M}{q}\right)^a$ geschwächt, wie eine leichte Rechnung ergibt. Für a werden zwei Annahmen zu Grunde gelegt. Angenommen, daß 25% der Erdstrahlung ungeschwächt durchgelassen, und zwei Drittel des Restes absorbiert werden, ergeben sich für die beiden q-Werte $a = 0{,}5$ und $0{,}68$. Wird aber die Erdstrahlung bis auf verschwindend kleine Beträge absorbiert, so ist $a = 2$ resp. 4 zu setzen.[1]) Wir setzen also in den beiden Hauptgleichungen (S. 73) $k = \frac{a}{q - m}$. Ist die Atmosphäre isotherm auf der Temperatur $T = T_0$, $E = E_0$, so erhalten wir als Lösungen

$$52)\qquad B = B_0\left(\frac{q - m}{q}\right)^a + E_0$$

$$53)\qquad A = A_0\left(\frac{q}{q - m}\right)^a + E_0.$$

Bestimmen wir die Integrationskonstanten so, daß die Strahlung σ einfällt, ($\overline{B} = \sigma$), und die Atmosphäre auf der Erdoberfläche von der Temperatur T_0 aufliegt ($\underline{A} = \underline{E_0}$), so ergibt sich

$$54)\qquad B = (\sigma - E_0)\left(\frac{q - m}{q}\right)^a + E_0$$

$$54\,a)\qquad A = E_0\,.$$

Nehmen wir anderseits an, daß sich die Atmosphäre in nahezu konvektivem Gleichgewichte befindet, so daß wir in den Hauptgleichungen $E = E_0 \frac{m}{M}$ setzen können, so erhalten wir die Lösungen

$$55)\qquad B = B_0\left(\frac{q - m}{q}\right)^a - \frac{E_0}{M}\frac{a\,q}{a - 1}\frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M}q$$

$$55\,a)\qquad A = A_0\left(\frac{q}{q - m}\right)^a - \frac{E_0}{M}\frac{a\,q}{a + 1}\frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M}q,$$

und spezialisieren wir wieder für $\overline{B} = \sigma$; $\underline{A} = E_0$, so ergibt sich

$$56)\qquad B = \left(\sigma + \frac{E_0}{M}\frac{q}{a - 1}\right)\left(\frac{q - m}{q}\right)^a - \frac{E_0}{M}\frac{a\,q}{a - 1}\frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M}q$$

$$56\,a)\qquad A = -\frac{E_0}{M}\frac{q - M}{a + 1}\left(\frac{q - M}{q - m}\right)^a - \frac{E_0}{M}\frac{a\,q}{a + 1}\frac{q - m}{q} + \frac{E_0}{M}q.$$

---

[1]) Den Einfluß des Wasserdampfes werden wir in unseren Untersuchungen § 5 durch andere, besser begründete Ausdrücke darstellen.

Abstrahieren wir von der Sonnenstrahlung, so ist in (54) und (56) $\sigma = 0$ zu setzen; sehen wir von der Erdstrahlung ab ($\underline{A} = 0$), so erhalten wir an Stelle von (53) und (55 a)

$$57) \qquad A = -E_0\left(\frac{q-M}{q-m}\right)^a + E_0$$

$$57) \qquad A = -\frac{E_0}{M}q\left(1 - \frac{a}{a+1}\,\frac{q-M}{q}\right)\left(\frac{q-M}{q-m}\right)^a$$

$$-\frac{E_0}{M}\cdot\frac{aq}{a+1}\cdot\frac{q-m}{q} + \frac{E_0}{M}q.$$

Die geschlossenen Ausdrücke (52) bis (57) gestatten die Berechnung des von Gold in Abschnitt VI durch mechanische Quadratur gewonnenen Zahlenmaterials mit mehr als hinreichender Genauigkeit. Die eingehendere Anwendung derselben zeigt:

Mit Berücksichtigung des Wasserdampfes tritt für die Atmosphäre im konvektiven Gleichgewicht an Stelle der Gleichung (51) in genügender Annäherung die Gleichung

$$58) \qquad \text{Absorption} \gtrless \text{Emission, wenn } m \lessgtr \frac{M}{4}.$$

Und wie oben schließt Gold, daß jetzt Konvektionsströme nicht über das Niveau $m = \frac{1}{4}$, das ist eine Höhe von zirka 9200 m, emporreichen können. Unterhalb des Niveaus $m = \frac{M}{4}$ halten sie das konvektive Temperaturgefälle gegen die Wirkung der Strahlung aufrecht, oberhalb unterstützen sie die Strahlung in ihrem Erwärmungsprozeß. Innerhalb des Niveaus von $m = \frac{M}{4}$ und $m = \frac{M}{2}$ ist die Differenz Ausstrahlung — Absorption so klein, daß nur Konvektionsströme von geringer Intensität bis in diesen Teil der Atmosphäre emporsteigen müssen. Oberhalb $m = \frac{M}{4}$ stellt der Strahlungsprozeß Isothermie her. (Gold setzt ihre Temperatur gleich der Temperatur, die durch die

Konvektionsströme bei $m = \frac{M}{4}$ bewirkt wird ($J_c = \frac{1}{4} J$), nach meiner Meinung nicht richtig, denn die Isothermie ist bestimmt als Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes, also gleich der effektiven Erdtemperatur.)

Zusammenfassend ergibt sich das Resultat c (Gold, loc. cit., S. 47); It is found that if the atmosphere consists of to skells, the inner in the adiabatic, the outer in the isothermal state: 1) the inner cannot extend to a height greater than that for which $m = \frac{1}{4} M$ (10500 m); 2) the inner must extend to a height greater than that for which $m = \frac{1}{2} M$ (5500 m)[1]).

Diesen Ausführungen habe ich folgendes beizufügen. Sie können sich selbstverständlich nur auf Konvektionsströme beziehen, die durch geringe Überschreitung des angenommenen, adiabatischen Temperaturgradienten ausgelöst werden. Ich habe an anderer Stelle[2]) gezeigt, daß die atmosphärischen Strömungen sich in zwei Arten sondern lassen, die ich als „kurze“ und „lange“ Zykeln bezeichnete. Nur die ersteren, die sich auf verhältnismäßig kleinen Gebieten abspielen, wie etwa die Wärmegewitter, die Tornados usw., haben labiles Gleichgewicht der Atmosphäre zur Vorbedingung. Der größte Teil aller ihrer Bewegungsvorgänge, wie sie etwa in den Hoch- und Tiefdruckgebieten sich einstellen, wird durch andere Energie, als der Senkung des Schwerpunktes der über diesen Gebieten sich mischenden Luftmassen, gespeist. Sie haben keinen besonderen Temperaturgradienten zur Vorbedingung, sondern dieser wird umgekehrt durch sie erzwungen. Soweit sie emporreichen, werfen sie die durch Strahlung bedingten Temperaturen über den Haufen. Davon abgesehen verleitet das Goldsche Resultat c leicht zu der Meinung, daß durch graue Strahlung allein die Teilung der

---

[1]) Die Höhenangaben sind nicht genau; sie entsprechen der Teilung der Atmosphäre bei Isothermie von 0^0. Wir haben aber die entsprechenden Höhen bei konvektivem Gleichgewicht anzusetzen; sie sind bei einer Bodentemperatur von 0^0 9200 m und 5000 m; für eine Bodentemperatur von t^0 aber $t \cdot 4^0/_{00}$ größer.

[2]) R. Emden, Gaskugeln, S. 363 f. Leipzig 1907.

Atmosphäre bei $m = \frac{M}{4}$ in diese sich so verschieden verhaltenden Gebiete verursacht würde; etwa folgendermaßen überlegend. Die ganze Atmosphäre sei in konvektivem Gleichgewichte. Der Teil über $m = \frac{M}{4}$ wird durch den Strahlungsprozeß angewärmt, bei festgehaltener Bodentemperatur können die Konvektionsströme nicht mehr störend eingreifen, es muß sich also die Isothermie des Strahlungsgleichgewichtes einstellen. Unterhalb $m = \frac{M}{4}$ tritt durch Strahlung Abkühlung ein, bei festgehaltener Bodentemperatur bilden sich also instabile Temperaturgradienten aus und Konvektionsströme treten auf, bis $m = \frac{M}{4}$ emporsteigend, die Instabilität vermindernd. Der Strahlungsprozeß allein würde also bei festgehaltener Bodentemperatur unterhalb $m = \frac{M}{4}$ stets Konvektionsströme neu erzeugen und die Trennung der Atmosphäre in Troposphäre und Stratosphäre in richtiger Höhe wäre durch den Strahlungsprozeß allein erklärt. Es ist nicht ersichtlich, ob Gold so oder ähnlich geurteilt hat, noch welche praktische Bedeutung er seinem Resultat c beimißt. Eine Schlußfolgerung wie die angegebene aber ist unrichtig. In den ersten Zeitmomenten tritt die angegebene Temperaturänderung ein, was sich aber in den folgenden Zeiten abspielt, läßt sich nicht mehr überblicken. Wohl aber läßt sich das Endprodukt des Strahlungsvorganges angeben; denn von b e l i e b i g e m A n f a n g s z u s t a n d e a u s g e h e n d muß sich Strahlungsgleichgewicht einstellen. Für die Wärmebilanz Null ergibt sich somit graue Strahlung (wie bei Gold) vorausgesetzt stets Isothermie von der effektiven Erdtemperatur, mag die Absorption auch beliebige Funktion der Höhe sein. Für diese Wärmebilanz stellt sich der Erdboden ebenfalls auf effektive Erdtemperatur ein. Würden wir seine Temperatur künstlich höher halten, etwa durch Wärmezufluß aus dem Erdinnern, oder wäre vorherige intensive Bestrahlung genügend lange nachwirkend, so wären die Wärmebilanz Null und die Isothermie gestört, und es könnten sich Temperaturgradienten ausbilden. Stets aber wird durch die ganze Atmosphäre hindurch stabiles Gleichgewicht hervorgerufen (vgl. oben S. 75); denn unter allen Umständen hat graue Strahlung Stabilität durch die ganze Atmosphäre hindurch zur Folge und kann keine Trennung in Troposphäre und Stratosphäre bewirken. Lassen wir aber, im Gegensatze zu Gold, die Voraussetzung grauer Strahlung fallen, so ändern sich diese Verhältnisse, wie in § 5 gezeigt werden wird, vollkommen.

Eine geistreiche Überlegung ermöglicht Gold die tiefsten Temperaturen zu bestimmen, die in der Atmosphäre auf die Dauer möglich sind. Ist die Atmosphäre in konvektivem Gleichgewichte, so ist jedes Teilchen auf der tiefsten Temperatur, die bei gegebener Bodentemperatur mit Stabilität verträglich ist und emittiert deshalb ein Minimum von Strahlung. Die geringste Strahlungsmenge empfängt offenbar die oberste atmospärische Schicht; die Temperatur, auf welche sich diese bei Strahlungsgleichgewicht einstellt, ist deshalb die tiefste Temperatur, die der Strahlungsaustausch zuläßt. Sie bestimmt sich aus der Beziehung $2\overline{E} = \overline{B} + \overline{A}$, wenn $\overline{B} = 0$, zu $\overline{E} = \frac{\overline{A}}{2}$. Gold berechnet entsprechend seiner Annahme über die Verteilung und Wirkung des Wasserdampfes $T = 198^0$, 173^0; 193^0 und 154^0; bei einer Bodentemperatur von $T = 300^0$.

Die Ergebnisse der Goldschen Untersuchungen lassen sich wie folgt zusammenfassen. Graue Strahlung vorausgesetzt ergibt sich:

1. a) Das Strahlungsgleichgewicht der Atmosphäre von gleichmäßiger Zusammensetzung ist Isothermie von der effektiven Erdtemperatur, $T = -19^0$ C.

b) Die Differenz Absorption — Emission ist durch Gleichung (51) bestimmt.

2. Wird der Wirkung des Wasserdampfes Rechnung getragen, so folgt weiter:

a) Satz 1a bleibt bestehen. (Dieser Satz ist bei Gold nicht besonders angeführt, er ergibt sich aber leicht aus dessen Ansätzen. Allgemein, d. h. für k beliebige Funktion von m haben wir den Satz oben S. 79 bewiesen.)

b) An Stelle der Gleichung (51) tritt die Gleichung (58). Konvektives Gleichgewicht wird durch den Strahlungsprozeß gebrochen, derart, daß in den ersten Zeiten oberhalb $m = \frac{M}{4}$ Konvektion verhindert, unterhalb Konvektion begünstigt wird.

3. Der Wirkung des Wasserdampfes Rechnung tragend werden für eine Bodentemperatur $T = 300$ die niedersten Temperaturen von Schichten, die sich im Strahlungsgleichgewicht befinden, zwischen $T = 150$ und 200 bestimmt. Da aber Sonnenstrahlung ausgeschlossen ist, würden diese Temperaturen mit der Bodentemperatur rasch sinken.

§ 4. Die Integralgleichung des Strahlungsgleichgewichtes.

Wir schließen an die Untersuchungen des § 2 an. Wir setzen nicht mehr graue Strahlung voraus, sondern schreiben der Atmosphäre für jede Wellenlänge λ ein besonderes Absorptionsvermögen a_λ, k_λ zu. Dann werden die beiden Hauptgleichungen in leichtverständlicher Bezeichnung:

59) $$\begin{aligned} \frac{dB_\lambda}{dm} &= -k_\lambda B_\lambda + k_\lambda E_\lambda \\ \frac{dA_\lambda}{dm} &= k_\lambda A_\lambda - k_\lambda E_\lambda . \end{aligned}$$

Dies Aufgeben der grauen Strahlung hat die weitgehende Konsequenz, daß wir das Absorptionsvermögen nicht mehr als beliebige Funktion der Höhe ansetzen können. Denn wollten wir entsprechend den Gleichungen (41) und (42) eine optische Masse einführen, so würde dieselbe reelle Masse in jeder Wellenlänge einer anderen optischen Masse entsprechen. Das Absorptionsvermögen sei also nur Funktion der Wellenlänge. Bei Strahlungsgleichgewicht muß jetzt für jedes m an Stelle von Gleichung (28) die integrale Beziehung

$$2\int_0^\infty k_\lambda E_\lambda \, d\lambda = \int_0^\infty k_\lambda (B_\lambda + A_\lambda) \, d\lambda \tag{60}$$

erfüllt sein.

Setzen wir weiter $B_\lambda - A_\lambda = 2\gamma_\lambda$, so folgt durch Addition der Hauptgleichungen

$$\frac{dB_\lambda}{dm} + \frac{dA_\lambda}{dm} = -k_\lambda (B_\lambda - A_\lambda) = -2k_\lambda \gamma_\lambda \tag{61}$$

mit der Folge

$$\int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda + \int_0^\infty A_\lambda \, d\lambda = -2\int dm \int_0^\infty k_\lambda \gamma_\lambda \, d\lambda + \text{const}; \tag{62}$$

und durch Subtraktion, mit Rücksicht auf Strahlungsgleichgewicht, Gleichung (60),

$$\frac{d}{dm}\int_0^\infty (B_\lambda - A_\lambda) \, d\lambda = 0$$

$$\int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda - \int_0^\infty A_\lambda \, d\lambda = +2\int_0^\infty \gamma_\lambda \, d\lambda = \text{const}, \tag{63}$$

d. h. die Differenz der ab- und aufsteigenden Energieströme ist konstant. Dieser Satz (vgl. oben S. 74) ist also nicht auf graue Strahlung beschränkt.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungsweise führen wir ein

$$E = \int_0^\infty E_\lambda \, d\lambda; \quad B = \int_0^\infty B_\lambda \, d\lambda; \quad A = \int_0^\infty A_\lambda \, d\lambda; \quad \gamma = \int_0^\infty \gamma_\lambda \, d\lambda;$$

Aus (62) und (63) folgt

$$\begin{aligned} B &= -\int_0^m dm \int_0^\infty k_\lambda \gamma_\lambda \, d\lambda + \overline{B} \\ A &= -\int_0^m dm \int_0^\infty k_\lambda \gamma_\lambda \, d\lambda + \overline{A}, \end{aligned} \tag{64}$$

während (61) noch die merkwürdige Beziehung liefert

$$\int_0^\infty \frac{1}{k_\lambda} (B_\lambda + A_\lambda) \, d\lambda = -2m\gamma + \text{const} = -(\overline{B} - \overline{A})\, m + \text{const}. \tag{65}$$

Wir untersuchen, unter welchen Bedingungen Isothermie vorhanden sein kann. In den Gleichungen (59) setzen wir dementsprechend E_λ konstant, d. h. unabhängig von m, und erhalten durch Integration

66) $$B_\lambda = B_{0\lambda} e^{-k_\lambda m} + E_\lambda$$
$$A_\lambda = A_{0\lambda} e^{+k_\lambda m} + E_\lambda$$

und daraus mit Rücksicht auf Strahlungsgleichgewicht (Gleichung 63)

$$\int_0^\infty B_\lambda d\lambda - \int_0^\infty A_\lambda d\lambda = \int_0^\infty (B_{0\lambda} e^{-k_\lambda m} - A_{0\lambda} e^{k_\lambda m})\, d\lambda$$

$$= 2\int_0^\infty \gamma_\lambda d\lambda = \overline{B} - \overline{A} = \text{const.}$$

Es muß also sein $B_{0\lambda} = A_{0\lambda} = 0$ mit der Folge

$$\overline{B} = \overline{A} = \underline{B} = \underline{A}$$

$$B_\lambda = A_\lambda = E_\lambda \text{ unabhängig von } m.$$

Wir haben den Satz: „Soll Isothermie vorhanden sein, so muß nicht nur (wie bei grauer Strahlung) sich **integral** die Wärmebilanz Null ergeben, $\overline{B} = \overline{A}$, sondern in jeder einzelnen Wellenlänge; und die auf- und absteigenden Energieströme müssen an jeder Stelle in jeder Wellenlänge übereinstimmen in einer Intensität gleich $E_\lambda d\lambda$.

Damit die Erdatmosphäre sich auf Isothermie einstellen könnte, müßte sie mit der Strahlung, die ein schwarzer Körper auf ihrer Temperatur aussendet, beleuchtet werden, und statt auf der nach anderer spektraler Verteilung emittierenden Erdoberfläche auf einer vollkommen schwarzen, gleich temperierten oder vollkommen spiegelnden Unterlage aufliegen. **Nach den in Wirklichkeit vorhandenen Bedingungen kann die Erdatmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht nicht isotherm sein.**

Um weiteren Einblick zu erhalten, integrieren wir die Hauptgleichungen (59), indem wir E_λ als unbekannte Funktion von m betrachten und erhalten

$$
\begin{aligned}
B_\lambda &= \overline{B}_\lambda e^{-k_\lambda m} + e^{-k_\lambda m}\int_0^m e^{k_\lambda m} k_\lambda E_\lambda \, dm \\
&= e^{-k_\lambda m}(\overline{B}_\lambda - \overline{E}_\lambda) + E_\lambda - e^{-k_\lambda m}\int_0^m e^{k_\lambda m}\frac{dE_\lambda}{dm}\, dm
\end{aligned}
\tag{67}
$$

$$
\begin{aligned}
A_\lambda &= \overline{A}_\lambda e^{k_\lambda m} - e^{k_\lambda m}\int_0^m e^{-k_\lambda m} k_\lambda E_\lambda \, dm \\
&= e^{k_\lambda m}(\overline{A}_\lambda - \overline{E}_\lambda) + E_\lambda - e^{k_\lambda m}\int_0^m e^{-k_\lambda m}\frac{dE_\lambda}{dm}\, dm .
\end{aligned}
\tag{68}
$$

Da A_λ den aufsteigenden Energiestrom mißt, kann es oft zweckmäßiger sein, an Stelle von $\overline{A}_\lambda$ den Wert an der unteren Grenze der Atmosphäre, $\underline{A}_\lambda$, einzuführen. Hat die Atmosphäre eine Mächtigkeit M, so ergibt sich durch leichte Umformung von (68)

$$
A_\lambda = e^{k_\lambda (m-M)}(\underline{A}_\lambda - \underline{E}_\lambda) + E_\lambda + e^{k_\lambda m}\int_m^M e^{-k_\lambda m}\frac{dE_\lambda}{dm}\, dm. \tag{69}
$$

Kann die Masse der Atmosphäre, wie etwa bei sehr großen Gaskugeln, praktisch unendlich große Werte annehmen, während die Energiemengen endlich bleiben sollen, so wird Gl. 68 $A_\lambda = A'_\lambda e^{k_\lambda m} + e^{k_\lambda m}\int_m^\infty e^{-k_\lambda m} k_\lambda E_\lambda \, dm$. A'_λ muß gleich Null sein. Das Integral bleibt endlich und wir erhalten

$$
A_\lambda = E_\lambda + e^{k_\lambda m}\int_m^\infty e^{-k_\lambda m}\frac{dE_\lambda}{dm}\, dm. \tag{70}
$$

Für Strahlungsgleichgewicht ergibt sich, infolge (63), die Bedingung in Form einer Integralgleichung

$$\int\limits_0^\infty e^{-k_\lambda m}(\bar{B}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda - \int\limits_0^\infty e^{-k_\lambda m}\,d\lambda \int\limits_0^m e^{k_\lambda m}\frac{d\,E_\lambda}{d\,m}\,dm - \int\limits_0^\infty e^{k_\lambda m}(\bar{A}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda$$

71 a)
$$+\int\limits_0^\infty e^{k_\lambda m}\,d\lambda \int\limits_0^m e^{-k_\lambda m}\,\frac{d\,E_\lambda}{d\,m}\,d\,m = +\,2\,\gamma = \mathrm{const}$$

oder

$$\int\limits_0^\infty e^{-k_\lambda m}(\bar{B}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda - \int\limits_0^\infty e^{-k_\lambda m}\,d\lambda \int\limits_0^m e^{k_\lambda m}\,\frac{d\,E_\lambda}{d\,m}\,d\,m$$

71 b)
$$-\int\limits_0^\infty e^{k_\lambda (m-M)}(\bar{A}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda - \int\limits_0^\infty e^{k_\lambda m}\,d\lambda \int\limits_m^M e^{-k_\lambda m}\,\frac{d\,E_\lambda}{d\,m}\,d\,m = +\,2\,\gamma\ \mathrm{const}$$

oder schließlich, falls $M = \infty$ werden kann

$$\int\limits_0^\infty e^{-k_\lambda m}(\bar{B}_\lambda - \bar{E}_\lambda)\,d\lambda - \int\limits_0^\infty e^{-k_\lambda m}\,d\lambda \int\limits_0^m e^{k_\lambda m}\,\frac{d\,E_\lambda}{d\,m}\,d\,m$$

71 c)
$$-\int\limits_0^\infty e^{k_\lambda m}\,d\lambda \int\limits_m^\infty e^{-k_\lambda m}\,\frac{d\,E_\lambda}{d\,m}\,d\,m = +\,2\,\gamma = \mathrm{const.}$$

In diesen Gleichungen ist k_λ durch das Gas, welches die Atmosphäre aufbaut, als Funktion der Wellenlänge gegeben. Für E_λ gilt die Plancksche Beziehung

72)
$$E_\lambda\,d\lambda = 5{,}304.10^{-11}\,\frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{1{,}462}{\lambda T}} - 1}\,d\lambda\,\frac{\mathrm{kal}}{\mathrm{cm}^2\,\mathrm{min}}\,.$$

Nach ausgeführter Integration nach λ erhalten wir eine Integralgleichung, die mit Rücksicht auf die Grenzbedingungen bei $m = 0$ und $m = M$ die Temperatur T als Funktion von m, oder mit Hilfe der Beziehung $\frac{d\,m}{m} = \frac{d\,z}{R\,T}$ (oben S. 75) als Funktion von z bestimmt. Die Gleichungen (71) enthalten somit die vollständige Lösung des gestellten Problems. Ihrer

Auflösung scheinen selbst in den einfachsten Fällen allzu große mathematische Schwierigkeiten zu begegnen. Leicht zugänglich sind sie lediglich in 2 Spezialfällen.

1. Spezialfall. Wir setzen in (71 b) $\overline{B}_\lambda = \overline{E}_\lambda$, $\underline{A}_\lambda = \underline{E}_\lambda$. Dann folgt ohne weiteres $\frac{d E_\lambda}{d m} = 0$, $\gamma = 0$. Wir erhalten somit $E_\lambda =$ const, also Isothermie, mit der Folge $\overline{B}_\lambda = \overline{E}_\lambda = \underline{E}_\lambda = \underline{A}_\lambda$. Dasselbe ergibt sich, wenn wir von $E_\lambda =$ const ausgehen. Wir erhalten das bereits auf andere Weise ermittelte Resultat: I s o t h e r m i e i s t b e i S t r a h l u n g s g l e i c h g e w i c h t d a n n u n d n u r d a n n m ö g l i c h , w e n n d i e A t m o s p h ä r e v o n b e i d e n S e i t e n h e r m i t g l e i c h e r , s c h w a r z e r S t r a h l u n g b e l e u c h t e t w i r d ; i h r e T e m p e r a t u r w i r d d e r A r t , d a ß e i n g l e i c h t e m p e r i e r t e r s c h w a r z e r S t r a h l e r S t r a h l u n g g l e i c h d e r i h r z u g e s a n d t e n S t r a h l u n g a u s s e n d e t. Während die vereinfachende Annahme grauer Strahlung nur die integrale Wärmebilanz Null für Isothermie erfordert, muß bei Eingehen auf die einzelnen Wellenlängen nicht nur diese Wärmebilanz für jede einzelne Wellenlänge vorhanden sein, sondern auch, um dies zu ermöglichen, schwarze Strahlung einfallen. Dies so gänzlich verschiedene Verhalten ist in letzter Linie darin begründet, daß graue Strahlung von bestimmter Intensität auf unendlich viele verschiedene Arten, schwarze Strahlung von bestimmter Intensität nur auf eine einzige Art und Weise erhalten werden kann.

2. Spezialfall. Die Strahlung sei grau. Wir setzen in (71 b) k_λ konstant gleich k. Um die Konstante 2γ wegzuschaffen, wird nach m differentiert, und wenn wir mit C eine neue, beliebige Konstante bezeichnen, spaltet sich, wie leicht ersichtlich, die Gleichung in die 2 Gleichungen

$$- e^{-k m}(\overline{B} - \overline{E}) - e^{-k m}\int_0^m e^{k m} \frac{d E}{d m}\, d m = C$$

$$e^{k(m-M)}(\underline{A} - \underline{E}) + e^{k m}\int_m^M e^{-k^m} \frac{d E}{d m}\, d m = C.$$

Wird nochmals differentiert und das bleibende Integral partiell integriert, ergibt sich leicht die Beziehung $\frac{d^2 E}{d m^2} = 0$ und die allgemeine Lösung für graue Strahlung

$$E = C m + C_1 .$$

Die Integrationskonstanten lassen sich auch leicht bestimmen, so daß sich die Gleichungen (38) ergeben.

§ 5. Das Strahlungsgleichgewicht der Atmosphäre und die Temperatur der oberen Inversion.

Die Untersuchungen des § 2, die graue Strahlung zur Voraussetzung hatten, führten zu dem unbefriedigenden Resultate, daß bei Strahlungsgleichgewicht die Atmosphäre sich durchwegs auf konstante Temperatur gleich der effektiven Erdtemperatur, $T = 254^0 = -19^0$ C einstellt. Anderseits sind die Formeln des § 4, welche dem verschiedenen Absorptionsvermögen der einzelnen Wellenlängen Rechnung tragen und die exakte Lösung des Problems enthalten, weiterer Behandlung nicht zugänglich. Wir nähern uns in diesem Paragraphen dieser Lösung auf einem Wege, der dadurch ermöglicht wird, daß die die Atmosphäre durchsetzenden Strahlen sich in zwei Gruppen von gänzlich verschiedener Temperatur anordnen lassen. Die von der Sonne ausgehende Strahlung hat ihr Energiemaximum bei $\lambda = 0{,}47\ \mu$ (die Plancksche Formel (72) liefert hiefür 25000 Einheiten für $T = 6000^0$); der Beitrag, den Wellenlängen größer als etwa $2\ \mu$ liefern, ist zu vernachlässigen. Die Strahlung der Erde und der angewärmten Atmosphäre hat für $T = 285^0$ ihr Energiemaximum bei $\lambda = 10\ \mu$ (die Plancksche Formel gibt hiefür etwa 300 Einheiten), der Anteil in Wellenlängen $< 2\ \mu$ ist zu vernachlässigen. Wir zerlegen dementsprechend die Strahlung in 2 Teile: der Teil 1 umfaßt $0 < \lambda < 2\ \mu$, der Teil 2 umfaßt $2\ \mu < \lambda < \infty$. Wir setzen also

$$B = B_1 + B_2$$
$$A = A_1 + A_2$$
$$E = E_1 + E_2$$

und werden später A_1 gegen A_2, E_1 gegen E_2 vernachlässigen, hüten uns aber, auch B_2 klein gegen B_1 anzunehmen, denn die absteigende Strahlung B besteht nicht nur aus der kurzwelligen Sonnenstrahlung B_1, sondern es tritt noch die langwellige Ausstrahlung der angewärmten Atmosphäre dazu. Wir nehmen weiter vereinfachend an, daß jedes dieser Strahlenbündel mit einem mittleren Absorptionskoeffizienten k_1 resp. k_2 behandelt werden kann.

Entgegen vielfach verbreiteter Meinung ist der Fehler, den man begeht, für die einfallende Sonnenstrahlung einen mittleren Absorptionskoeffizienten anzusetzen, nicht bedeutend, falls nur ein etwas kleinerer Wert für die Solarkonstante angenommen wird. So kann nach Abbot und Fowle (loc. cit., S. 94 ff.) die Intensität der Sonnenstrahlung auf dem Mount Wilson und Washington bis zu einer Zenithdistanz $\Theta = 75^0$ mit großer Genauigkeit dargestellt werden in der Form $J = 1{,}84\,(0{,}894)^{\sec\Theta}$ resp. $J = 1{,}78\,(0{,}787)^{\sec\Theta}$. Wird die Solarkonstante aber um $n\,^0/_0$ geändert, so ändern sich die Temperaturen nur um $\frac{n}{4}\,^0/_0$; ein Betrag, der gegenüber dem Umstande, daß wir die thermodynamischen Absorptionskoeffizienten nur unvollkommen kennen (§ 1), nicht in Betracht kommt. Mit weit geringerer Ungenauigkeit kann die aufsteigende Strahlung A_2, da bei den tiefen Temperaturen $\frac{dE_\lambda}{dT}$ klein ist, mit einem mittleren k_2 behandelt werden.

Wir schreiben dementsprechend die beiden Hauptgleichungen (§ 2) in der Form

$$\frac{dB}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_1 E_1 + k_2 E_2$$

$$\frac{dA}{dm} = \quad k_1 A_1 + k_2 A_2 - k_1 E_1 - k_2 E_2$$

und die Bedingungsgleichung für Strahlungsgleichgewicht:

$$2\,(k_1 E_1 + k_2 E_2) = k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_1 A_1 + k_2 A_2$$

folgern wieder

$$\frac{dB}{dm} - \frac{dA}{dm} = 0, \qquad B - A = \mathrm{const} = 2\gamma$$

und

$$\frac{dB}{dm} + \frac{dA}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_1 A_1 + k_2 A_2$$

und erhalten aus beiden Gleichungen:

$$2\frac{dB}{dm} = 2\frac{dA}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_1 A_1 + k_2 A_2. \tag{73}$$

Gemäß unseren vereinfachenden Voraussetzungen vernachlässigen wir A_1 gegen A_2, ebenso $k_1 A_1$ gegen $k_2 A_2$, was um so mehr gestattet ist, als nicht nur A_1 klein gegen A_2 ist, sondern sich auch k_1 klein gegen k_2 ergeben wird, und erhalten

$$2\frac{dB}{dm} = 2\frac{dA}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_2 A_2 \tag{74}$$

nebst

$$B_1 + B_2 - A_2 = 2\gamma$$

und daraus

$$\left.\begin{aligned} \frac{dB}{dm} &= \frac{k_2 - k_1}{2} B_1 - k_2 \gamma \\ \frac{dA}{dm} &= \frac{k_2 - k_1}{2} B_1 - k_2 \gamma. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Wären k_1 und k_2 unabhängig von m, so könnten wir unmittelbar integrieren. Allein die Absorptionsverhältnisse der Atmosphäre sind in erster Linie durch ihren Gehalt an Wasserdampf bedingt. Wir setzen mangels besserer experimenteller Unterlagen die Absorptionskoeffizienten jeder Schicht proportional ihrem Gehalt an Wasserdampf, solange dieser nicht unter einen zu geringen Prozentsatz heruntergeht, und haben in erster Linie diesen als Funktion von m zu ermitteln.

Es hat sich gezeigt[1]), daß die Abnahme der Dichte des Wasserdampfes mit der Höhe mit einer für unsere Zwecke genügenden Genauigkeit bis in Höhen von etwa 8 km (soweit liegen Messungen vor) dargestellt werden kann durch die Beziehung

[1]) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, S. 170. Leipzig 1906.

$$f = f_0 \, 10^{-\frac{h}{6000}}.$$

Wir haben f auszudrücken als Funktion der über h liegenden Luftmasse m. Da die Dichte mit genügender Genauigkeit zu $\varrho = \varrho_0 e^{-\frac{h}{8000}}$ angesetzt werden kann, ergibt sich

$$m = M e^{-\frac{h}{8000}} = M \, 10^{-\frac{h}{18400}}$$

und daraus die Menge w des Wasserdampfes über h und dessen Dichte f

76) $$w = W \left(\frac{m}{M}\right)^3; \qquad f = f_0 \left(\frac{m}{M}\right)^3.$$

Die Masse M der Erdatmosphäre werden wir weiterhin $= 1$ setzen. Den Absorptionskoeffizienten jeder Schicht setzen wir proportional f, also

$$k = b m^3$$

und bestimmen b gemäß dem Absorptionsvermögen der Atmosphäre unter mittleren Bedingungen. Dit Strahlung J_0 wird beim Durchlaufen der ganzen Atmosphäre, $M = 1$, geschwächt auf den Betrag

$$J = J_0 e^{-\int_0^1 b m^3 \, dm} = J_0 e^{-\frac{b}{4}}$$

und entsprechend dem Transmissionsvermögen der Atmosphäre 0,9 für die kurzwellige Sonnenstrahlung und 0,1 für die langwellige Erdstrahlung (vgl. § 1) erhalten wir

$$\frac{b_1}{4} = 0{,}1 \qquad \text{und} \qquad \frac{b_2}{4} = 2{,}3$$

und somit

77) $$\begin{aligned} k_1 &= b_1 m^3 = 0{,}4 \, m^3 \\ k_2 &= b_2 m^3 = 9{,}2 \, m^3 . \end{aligned}$$

So unsicher diese Werte ihrer absoluten Größe nach auch sein mögen, reichen sie für unseren Zweck aus, da es in erster Linie nur auf das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ ankommen wird.

Wir sind nun in der Lage, das in Gleichungen (75) auftretende B_1 zu bestimmen. Dies ist der Wert der von der Sonne zugestrahlten, gleichmäßig über die Erde verteilten Sonnenstrahlung im Niveau m. Bezeichnen wir mit σ den vierten Teil der Solarkonstanten, nach Abzug der Albedo, $\sigma = \frac{2.0{,}63}{4} = \frac{0{,}315 \text{ Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$ (vgl. oben § 1), so erhalten wir

$$B_1 = \sigma e^{-\int\limits_0^m b_1 m^3 \, dm} = \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4}$$

und die Gleichungen (75) werden

$$78)\quad \begin{aligned} \frac{dB}{dm} &= \sigma \frac{b_2 - b_1}{2} m^3 e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - b_2 m^3 \gamma \\ \frac{dA}{dm} &= \sigma \frac{b_2 - b_1}{2} m^3 e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - b_2 m^3 \gamma . \end{aligned}$$

Wir integrieren und erhalten

$$79)\quad \begin{aligned} B &= -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma + C_B \\ A &= -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4} - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma + C_A . \end{aligned}$$

Die Integrationskonstante C_B bestimmen wir aus der Bedingung $B = B_1 = \sigma$ für $m = 0$, und C_A aus der Bedingung $B - A = \text{const} = 2\gamma = \overline{B} - \overline{A} = \sigma - C_A$ und erhalten schließlich

$$80)\quad \begin{aligned} B &= -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma \left(1 - e^{-\frac{b_1}{4} m^4}\right) + \sigma - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma \\ A &= -\frac{b_2 - b_1}{2 b_1} \sigma \left(1 - e^{-\frac{b_1}{4} m^4}\right) + \sigma - \frac{b_2}{4} m^4 \gamma - 2\gamma . \end{aligned}$$

Wir spezialisieren gleich auf den mittleren Zustand der Atmosphäre; er ist bedingt durch die Wärmebilanz Null, d. h. zugestrahlte und ausgestrahlte Mengen sind sich gleich; $\overline{B} - \overline{A} = 2\gamma = 0$, und wir erhalten

$$
81)\qquad \begin{aligned} B = A &= \frac{b_2 - b_1}{2\,b_1}\,\sigma\left(1 - e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right) + \sigma \\ &= \sigma\left\{\frac{b_2 + b_1}{2\,b_1} - \frac{b_2 - b_1}{2\,b_1}\,e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right\}. \end{aligned}
$$

Um die Temperatur der Atmosphäre in der Stelle m zu bestimmen, gehen wir aus von der Bedingungsgleichung für Strahlungsgleichgewicht:

$$
2\,\{k_1 E_1 + k_2 E_2\} = k_1 B_1 + k_2 B_2 + k_2 A_2 .
$$

Da E_1 sehr klein gegen E_2 ist, können wir die linke Seite gleich $2\,\{k_2 E_1 + k_2 E_2\} = 2\,k_2 E$ setzen. Die rechte Seite wird mit Rücksicht auf (74) gleich

$$
2\left(k_2 A_2 - \frac{d\,B}{d\,m}\right) = 2\left(k_2 A - \frac{d\,B}{d\,m}\right),
$$

und benützen wir die entwickelten Ausdrücke für A, $\dfrac{d\,B}{d\,m}$ und k_2, so erhalten wir

$$
82)\qquad E = \sigma \cdot \frac{b_1 + b_2}{2\,b_1\,b_2} \cdot \left[b_2 - (b_2 - b_1)\,e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right].
$$

Da aber $E = s\,T^4$, $\sigma = s\,\tau^4$, $\tau = 254^0$ = effektive Erdtemperatur, ergibt sich schließlich

$$
83)\qquad T^4 = \tau^4\,\frac{b_1 + b_2}{2\,b_1\,b_2}\left[b_2 - (b_2 - b_1)\,e^{-\frac{b_1}{4}m^4}\right], \qquad \tau = 254^0 \text{ abs.}
$$

Da bei dem ermittelten Werte von b_1 der Maximalwert von $\dfrac{b_1}{4}\,m^4 = 0{,}1$ ist, können wir mit längst genügender Genauigkeit schreiben

$$
84)\qquad B = A = \sigma\left[1 + (b_2 - b_1)\,\frac{m^4}{8}\right]
$$

$$
85)\qquad T^4 = \tau^4\,\frac{b_1 + b_2}{2\,b_2}\left[1 + (b_2 - b_1)\,\frac{m^4}{4}\right].
$$

Für k_1 und k_2 konstant, also unabhängig von m, hätte sich ergeben

84 a) $$B = A = \sigma \left[\frac{k_2 + k_1}{2 k_1} - \frac{k_2 - k_1}{2 k_1} e^{-k_1 m} \right]$$

85 a) $$T^4 = \tau^4 \frac{k_1 + k_2}{2 k_1 k_2} \left[k_2 - (k_2 - k_1)\, e^{-k_1 m} \right]$$

und für $k_2 = k_1$, graue Strahlung, $T = \tau$, also Isothermie von der effektiven Erdtemperatur. Dieselbe Isothermie würde sich auch für $b_1 = b_2$ ergeben. Vgl. oben S. 79.

Anwendung der gewonnenen Beziehungen. Gleichung (81) zeigt, daß durch die ganze Atmosphäre hindurch die Strahlungen B und A sich gleich sind. Eine Platte, die in der Atmosphäre in beliebiger Höhe horizontal aufgestellt wird, erhält durchschnittlich (d. h. im Laufe eines Jahres) auf beiden Seiten gleiche Wärmemengen zugestrahlt.

An der oberen Grenze der Atmosphäre ist $m = 0$. Wir erhalten hier $B = A = \sigma$ und

86) $$T = 254^0 \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{b_1}{b_2}}{2}} = 254^0 \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{k_1}{k_2}}{2}}.$$

In diesen obersten Schichten wird der Wasserdampf in so außerordentlich geringer Dichtigkeit vorhanden sein, daß von einer besonderen Absorption desselben nicht mehr gesprochen werden kann und die Gleichungen (77) ihre Bedeutung verlieren. (Die Absorption gleicher, durchstrahlter Massen nimmt mit zunehmender Dichte ab.) Da wir das verschiedene Verhalten der Atmosphäre in Übereinstimmung mit den Beobachtungen dem Gehalt an Wasserdampf zuschrieben, ist es angezeigt, diesen Unterschied mit verschwindendem Wasserdampfgehalt verschwinden zu lassen. Wir machen deshalb die Annahme, daß in den höchsten Schichten k_1 und k_2 einem gemeinschaftlichen, kleinen Werte k zustreben, so daß wir erhalten

$$T = 254^0 = -19^0 \text{ C} = \tau,$$

d. h. die Temperatur der höchsten Schichten der Atmosphäre ist gleich der effektiven Erdtemperatur.

Gehen wir in die Tiefe, so bleiben B und $A = \sigma$, so lange $e^{-k_1 m}$ gleich 1 gesetzt werden kann. In 11 km Höhe, etwa der unteren Grenze der Stratosphäre entsprechend, ist m rund $\frac{1}{4}$; k_1 ist aber bedeutend kleiner als 0,1 zu setzen, da dieser Wert mit Berücksichtigung der tiefen, besonders wasserdampfhaltigen Schichten gewonnen wurde. Dazu kommt, daß in dem Maße, wie in die Tiefe gegangen wird, allmählich die Gleichungen (77) zur Wirkung gelangen und die Exponentialfunktion in einer höheren Potenz abnimmt. Bis in diese Tiefe etwa können wir deshalb von einer thermodynamischen Absorption der kurzwelligen Strahlung absehen und in Gleichung (81—84) $B = A = \sigma$ annehmen. Nun sind aber die Gleichungen (83) und (85) gewonnen, indem die Absorptionskoeffizienten nach Gleichung (77) variabel angenommen wurden. In höheren Niveaus gelten diese Beziehungen nicht mehr und die k ändern sich nach anderen unbekannten Gesetzen. Teilen wir aber die Atmosphäre in Schichten von so geringer Mächtigkeit, daß wir in jeder k_1 und k_2 als konstant annehmen können, so gilt für jede Schichte die Gleichung (85a) und zwar mit demselben Werte von τ, da B hier oben, wie auseinandergesetzt, genügend konstant ist. Die Temperatur jeder Schicht oberhalb etwa 11 km bestimmt sich deshalb zu

86) $$T = 254^0 \sqrt[4]{\frac{1 + \frac{k_1}{k_2}}{2}}$$

und ist nur bestimmt durch das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$, das in den höchsten Schichten den Wert 1 hat, um mit zunehmender Tiefe allmählich den Wert $\frac{1}{23}$ anzunehmen (Gleichung 77). Wir erhalten für verschiedene Werte dieses Verhältnisses folgende Temperaturen

$\frac{k_1}{k_2}$	T	
1	254^0	$= -19^0$ C
$\frac{1}{2}$	238^0	$= -35^0$ C
$\frac{1}{5}$	224^0	$= -49^0$ C
$\frac{1}{10}$	219^0	$= -54^0$ C
$\frac{1}{23}$	$215{,}87^0$	$= -57{,}23^0$ C
0	$213{,}7^0$	$= -59{,}3^0$ C.

Gehen wir von den oberen Grenzen der Atmosphäre h in die Tiefe, so nimmt, solange $e^{-k_1 m}$ gleich 1 gesetzt werden kann, in dem Maße, wie mit zunehmender Menge des Wasserdampfes seine Eigenschaft, langwellige Strahlung stärker zu absorbieren wie kurzwellige Strahlung, zur Geltung kommt, die Temperatur ab, um einem Minimalwerte $T = 213{,}7^0 = -59{,}3^0$ zuzustreben.

Die Temperaturen der unteren Schichten der Stratosphäre bestimmen sich demnach durch ihren Gehalt an Wasserdampf. Die Menge desselben ist in dieser Höhe von 9—11 km gering; allein, daß sie hinreicht optisch bereits stark zur Wirkung zu gelangen, zeigen die Zirruswolken, die gerade in dieser Höhe aufzutreten pflegen. Auch andere Wolkenformen können hier noch beobachtet werden[1]). Maßgebende, für seine Temperatur bestimmende Wirkung ist aber nicht sein Absorptionsvermögen, sondern lediglich das Verhältnis $k_1 : k_2$. Würden die Gleichungen (77) hier oben bereits voll gelten, so ergäbe sich $T = -57{,}2^0$ C, bei dem Verhältnis $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{10}$ (statt $\frac{1}{23}$) $T = -54^0$ C. Diese Temperaturen fallen mit den wirklich beobachteten Temperaturen der Stratosphäre zusammen. Die entwickelte Strahlungstheorie zeigt ferner in Übereinstimmung mit der Beobachtung, daß mit wachsender Höhe die Temperaturen der Stratosphäre in dem Maße,

[1]) J. Hann, Lehrbuch d. Meteorol., 2. Aufl., S. 207 u. f. Leipzig 1906.

wie der Wasserdampf an Masse und Dichte abnimmt, langsam zunehmen. Als tiefste mögliche Temperatur ergibt sich $-59{,}3^0$; tiefere Temperaturen sind unmöglich Folge des Strahlungsprozesses, sondern resultieren durch adiabatische Abkühlung der vor nicht zu langer Zeit als Ganzes gehobenen Stratosphäre.

Die Temperatur $T = \tau \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2^3}}{2}}$, die „Inversionstemperatur" bezeichnen wir im folgenden mit T_i.

Gehen wir, von Konvektion absehend, von der unteren Grenze der Stratosphäre, der Höhe von 9—11 km etwa, weiter in die Tiefe, so gelangt in den Gleichungen (81—85) das Glied mit m zur Wirkung und die Temperatur steigt. Um die Temperatur der untersten atmosphärischen Schicht, T_0, zu erhalten, haben wir in Gleichung (83) $m = 1$ zu setzen und erhalten

$$87)\qquad T_0 = T_i \sqrt[4]{1 + 2{,}2} = 288{,}8^0 = +\,15{,}8^0\ \mathrm{C},$$

also außerordentlich nahe der durch Beobachtungen erhaltenen, mittleren Temperatur[1]) von $14{,}4^0$ C.

Wir bestimmen weiter die Temperatur der Erdoberfläche. Die untere Begrenzung der Atmosphäre wird von zwei Energieströmen B und A durchsetzt, die sich nach Gleichung (84) zu

$$88)\qquad B = A = s \cdot 254^4\,(1 + 1{,}1)$$

bemessen. Die Erdoberfläche wird von der Strahlung B getroffen und durch Erwärmung befähigt, die Strahlung A emporzusenden. Das Reflexionsvermögen der Erde für diffuse, kurzwellige Strahlung ist sehr gering, nach Abbot und Fowle (loc. cit., S. 161) im Maximum 8%, welche Größe bei Bildung der Albedo bereits berücksichtigt ist. Eine Änderung der ausgesandten Strahlung um 8% würde nur eine Änderung von 2% der Temperatur erfordern. In Bezug auf die Erwärmung nehmen wir B als graue Strahlung an, der gegenüber die Erdoberfläche sich auf Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes

[1]) J. Hann, Lehrbuch der Meteorologie, 2. Aufl., S. 115. Leipzig 1906.

einstellt. Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen spielen dann keine Temperatur bestimmende Rolle (vgl. oben S. 78) und wir erhalten

$$T_{\text{Erde}} = 254^0 \sqrt[4]{2,2} = 309^0 = +36^0. \tag{89}$$

An der Berührungsfläche Atmosphäre und Erde ergibt sich somit ein Temperatursprung von 20° C, der in Wirklichkeit durch äußere Wärmeleitung stark herabgesetzt wird, namentlich auf Wasser, wo der Wasserdampf mit der Temperatur der Oberfläche in die Atmosphäre übertritt. Auch diese Strahlungstemperatur der Erdoberfläche hat einen durchaus annehmbaren Wert.

Wir untersuchen die Stabilität der Atmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht. Dazu haben wir aus Gleichung (83) die Temperaturgradienten zu bilden. Für jeden Gleichgewichtszustand gilt $dp = g\varrho\,dz$, was wir mit Hilfe der Zustandsgleichung $p = g\varrho R T$ auch schreiben können $\frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT}$. In Gleichung (85) ersetzen wir die über einem bestimmten Niveau liegende Masse m durch den hier herrschenden Wert des Druckes $p = gm$ und erhalten durch Differentiation leicht die Beziehungen

$$\begin{aligned} \frac{T^3\,dT}{T^4 - T_i^4} &= \frac{dp}{p} = \frac{dz}{RT} \\ \frac{dT}{dz} &= \frac{1}{R}\,\frac{T^4 - T_i^4}{T^4}. \end{aligned} \tag{90}$$

Damit Stabilität herrscht, muß sein (vgl. oben S. 75).

$$\frac{dT}{dz} < \frac{1}{R}\,\frac{\varkappa - 1}{\varkappa} = < \frac{1}{R}\,\frac{2}{7},$$

wenn wir für atmosphärische Luft $= \frac{7}{5} = 1,40$ ansetzen. In Verbindung mit Gleichung (90) sehen wir: *Befindet sich die Atmosphäre im Strahlungsgleichgewicht, so sind nur jene Schichten in einem mechanisch stabilen Gleichgewicht, für welche*

91) $$T < T_i \sqrt[4]{\frac{5}{7}}, \text{ d. i. } < 234{,}8^0 = -38{,}2^0 \text{ C.}$$

Das Gleichgewicht der höher temperierten, tiefer liegenden Schichten ist instabil; die Instabilität nimmt mit wachsender Tiefe zu.

Um den Zusammenhang zwischen Temperatur und Höhe zu erhalten, integrieren wir Gleichung (90), nachdem wir an Stelle der abwärts gerichteten z-Achse die Höhe h, $dz = -dh$, eingeführt haben, und erhalten

$$\text{const} - \frac{h}{R} = \frac{T_i}{4}\left[4\frac{T}{T_i} + \lg\frac{T-T_i}{T+T_i} - 2\,\text{arctg}\,\frac{T}{T_i}\right]$$

und bestimmen wir die Integrationskonstante, daß für $h = 0$ sich $T = T_0$ ergibt, so folgt schließlich

92) $$h = \frac{R\,T_i}{4}\left[4\frac{T_0 - T}{T_i} + \lg\frac{T_0 - T_i}{T_0 + T_i}\cdot\frac{T+T_i}{T-T_i} - 2\,\text{arctg}\left(\frac{T_0 - T}{T_i + \frac{T\cdot T_0}{T_i}}\right)\right].$$

Daraus berechnet sich folgende kleine Tabelle:

T	$-\frac{dT}{dh}$	h_{met}
215,87 = − 57,43⁰ C	0	∞
216,0 = − 57⁰ C	0,000081	11500
216,1 = − 56,9⁰ C	0,00014	10530
216,2 = − 56,8 C⁰	0,00021	9960
216,3 = − 56,7⁰ C	0,00029	9540
220 = − 53⁰ C	0,00249	5830
230 = − 43⁰ C	0,00765	3770
234,82 = − 38,28⁰ C	0,0098	3130
240 = − 33⁰ C	0,0118	2730
250 = − 23⁰ C	0,0152	1990
260 = − 13⁰ C	0,0178	1380
270 = − 3⁰ C	0,0202	860
280 = + 7⁰ C	0,0221	386
288,8 = + 15,8 C	0,0235	0

Gleichung (92) liefert selbstverständlich die Temperatur T_i für $m = 0$, also $h = \infty$. Wir haben aber bereits ausgeführt, daß die Gleichung (77) und somit die Gleichung (85) nur bis in Höhen gelten, in welchen der Wasserdampf noch genügend zur Wirkung gelangt. Die Zahlen dieser Tabelle gelten deshalb nur bis in Höhen von 9—11 km, wo wir die untere Grenze und die Temperatur der Stratosphäre erreichen. Nach oben zu nehmen mit abnehmendem Wasserdampfgehalt die Temperaturen langsam zu, gemäß der Tabelle S. 109, um für $h = \infty$ gleich der effektiven Erdtemperatur zu werden. In der Troposphäre in die Tiefe gehend treffen wir, bei stabilen Gradienten, steigende Temperaturen an (die m enthaltenden Faktoren kommen zur Geltung), bis in einer Höhe von 3130 m die kritische Temperatur $234{,}82^0$ und ein indifferenter Gradient auftritt. Das Gleichgewicht der tiefer liegenden Schichten ist instabil; die Temperaturen und die Instabilität nehmen nach unten immer rascher zu.

Dieser Untersuchung des mechanischen Gleichgewichtes war trockene Luft zu Grunde gelegt. In einer feuchten Atmosphäre können bereits kleinere Gradienten wie $1^0 : 100^m$ Instabilität ergeben, letztere in größere Höhen hinaufreichen. Allein bei diesen tiefen Temperaturen kann mit genügender Genauigkeit hievon abgesehen werden.

In Höhen unterhalb rund 3000 m wird deshalb Strahlungsgleichgewicht nicht von Bestand sein. Durch Abkühlung von oben werden, selbst bei mäßiger Bodentemperatur, sich namentlich in den unteren Partien Temperaturgradienten größer wie 1^0 auf 100 m ausbilden, und Konvektionsströme werden das Auftreten der tiefen Temperaturen der Tabelle verhindern. Wir nehmen an, diese Konvektionsströme erstrecken sich bis in die Höhe h. Dadurch wird die Strahlung B, welche das Niveau h von oben durchsetzt, nicht geändert. Es muß deshalb infolge der Wärmebilanz Null derselbe Energiestrom $A = B$ in Form langwelliger Strahlung von unten in die über h liegenden Schichten zurückgestrahlt werden. Die Instabilität mit ihren Folgen vermag deshalb die Strahlungstemperaturen der von den Konvektionsströmen nicht mehr erreichten Schichten nicht zu ändern. Auch die Konvektionsströme der langen Zykeln[1]), die an Hoch- und Tiefdruckgebiete gebunden sind, können aus demselben Grunde Strahlungstemperaturen nur ändern, soweit sie emporreichen. Die Temperaturgradienten nahezu Null der Stratosphäre zeigen ein höher liegendes Niveau an. Die gegenüber der Tabelle S. 112 geänderte Massen- und Temperaturanordnung der Troposphäre ist deshalb ohne Einfluß auf die berechneten Temperaturen der Stratosphäre. Dies gilt selbstverständlich nicht mehr für die Bodentemperatur der Atmosphäre und die Temperatur des Erdbodens. Mit geänderter Temperatur und Massenordnung ändern sich Absorption und Emission jeder Schicht, kurz gesagt, der innere Strahlungsprozeß und damit die Strahlungen B und A am Grunde der Atmosphäre. Dabei bleibt der kurzwellige Anteil B_1 ungeändert, denn seine Absorption ist nach unseren Voraussetzungen lediglich abhängig von der durchstrahlten, optischen Masse, unabhängig von ihrer Anordnung; allein mit anderer Massenverteilung ändert sich der Anteil B_2, den die erwärmten Luftmassen nach unten liefern. Beachtet man aber, daß diese Änderung von B_2 zurücktritt gegen den Wert von B_2 und B_1, sowie daß die Temperaturen sich ändern wie $\sqrt[4]{B}$, so werden die berechneten Werte von T_0 und T_{Erde} sich nur wenig ändern.

In einer unbewegten Atmosphäre („Strahlungswetter") würde in den untersten 3000 m durch den Strahlungsprozeß allein sich eine ganz außerordentlich instabile Temperatur- und Massenanordnung einstellen, die sich in den bekannten Erscheinungen der kurzen Zykeln auflösen muß. Die Ausbildung instabiler Atmosphäre bei diesen Wetterlagen wird in erster Linie der Ausbildung von Konvektionsströmen über dem stark erhitzten Erdboden, der Heizung von unten zugeschrieben. Die Theorie der Strahlung zeigt, daß auch Abkühlung von

[1]) R. Emden, Gaskugeln, S. 363 f. Leipzig 1907.

oben wirksam sein kann, denn die Temperaturen in Höhen von 2000—4000 m, denen die Luftmassen durch den Strahlungsprozeß zustreben, sind, wie die Tabelle zeigt, ganz außerordentlich tief. Die Instabilität durch Konvektion ist notwendig mit einer Temperatursteigerung bis in Höhen verbunden, in welche die Konvektionsströme noch emporreichen, denn infolge ihrer geringen, kinetischen Energie können diese nur in *kältere Luftschichten eintreten.* Instabilität durch Abkühlung von oben infolge Ausstrahlung kann die tiefen Temperaturen der Höhe liefern, welche der Cirrusschirm vor Ausbruch eines Wärmegewitters anzeigt und die bei Hagelfällen vorhanden sein müssen. Sie erklärt ferner die Bildung instabiler Atmosphären über den Meeren der Roßbreiten, diesen Gürteln maximaler Gewitterhäufigkeit und über den Meeren der Tropen, den Geburtsstätten der tropischen Zyklonen, also in Regionen, wo die Konstanz der Temperatur der Meeresoberfläche und die geringe Temperaturdifferenz gegen die auflagernde Atmosphäre Überhitzung von unten nicht zuläßt. Und die bekannte Tatsache, daß die Gewitter über den Meeren in größter Häufigkeit sich in der zweiten Hälfte der Nacht einstellen, findet ihre Erklärung durch die tiefen Temperaturen, die sich in der Höhe namentlich durch nächtliche Ausstrahlung einstellen können. Die Strahlungstheorie liefert so tiefe Temperaturen und Instabilitäten von solcher Intensität, daß die Wolkenkunde und die dynamische Meteorologie Strahlungsvorgängen mehr Beachtung schenken muß, wie bisher.

Überblicken wir in Kürze die Unterlagen und Ergebnisse der entwickelten Theorie. Würde die von der Sonne zugestrahlte Energie im Betrage von $2\ \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\,\text{min}}$ gleichmäßig über die Oberfläche der festen, ihrer Atmosphäre beraubten Erdoberfläche verteilt, so würde, graue Strahlung vorausgesetzt, diese sich unabhängig von ihrem Emissions- (Absorptions-) Vermögen auf die Temperatur eines Strahlungsgleichgewichtes im Betrage $T = 285^0 = 12^0$ C einstellen. Wird mit Rücksicht auf die Albedo der Erde der Zufluß an Strahlung um $37\,\%$ vermindert, so erniedrigt sich diese Temperatur auf $T = 254^0 = -19^0$ C. Diese Temperatur bezeichneten wir als effektive Erdtemperatur. Überdecken wir nun die Erde mit einer beliebigen Atmosphäre, so stellt sich diese, mag sie schichtweise beliebig arm oder reich an Wasserdampf sein, beliebig schwach oder stark absorbieren, bei Strahlungsgleichgewicht mit ihrer Unterlage isotherm auf die effektive Erdtemperatur $T = 254^0 = -19^0$ C ein (Übereinstimmung mit Gold), falls nur graue Strahlung beibehalten, d. h. ihr Absorptionsvermögen für alle Wellenlängen von gleicher, aber beliebiger Größe angenommen wird. Gehen wir auf das Verhalten in einzelnen Wellenlängen ein, so werden wir auf eine Integralgleichung geführt, die sich, namentlich mangels der nötigen physikalischen Daten, nicht auswerten läßt. Wir haben deshalb einen Mittelweg eingeschlagen, der Art, daß wir die kurzwellige Zustrahlung der Sonne und die langwellige Rückstrahlung der Atmosphäre jede für sich zusammensetzten zu einer Strahlung, die als grau, aber mit anderem Absorptionskoeffizienten, behandelt wurden. Dabei wurde die Absorption (Emission) jeder atmosphärischen Schicht proportional ihrem Gehalt an Wasserdampf gesetzt, klein für die auffallende, kurzwellige, groß für die rückkehrende, langwellige Strahlung, nur bei sehr geringem Gehalt an Wasserdampf sich einem gemeinschaftlichen, sehr kleinen Werte nähernd. Auf dieser Grundlage ergab sich folgendes: Oberhalb eines Niveaus, bis zu dem hinabsteigend die einfallende Strahlung nur wenig geschwächt wird, ist die Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes jeder Schicht lediglich bestimmt durch das Verhältnis, in welchem ihr Gehalt an Wasserdampf kurzwellige und langwellige Strahlung absorbiert, unabhängig von den absoluten Werten. Für den Wert 0 dieses Verhältnisses ergibt sich die Minimaltemperatur, die bei Strahlungsgleichgewicht eintreten kann, $\sqrt[4]{2}$ mal kleiner als die effektive Erdtemperatur, also $213{,}7 = -59{,}3^0$ C. Für mittlere Feuchtigkeitsverhältnisse haben wir dies Verhältnis zu $\frac{1}{23}$ abschätzen können, was zu einer Temperatur von -57^0

führt; der Wert $\frac{1}{10}$ würde -54^0 ergeben. Dies sind die bekannten Temperaturen der Stratosphäre. In die Höhe steigend nimmt mit abnehmendem Wasserdampfgehalt das Verhältnis $\frac{k_1}{k_2}$ zu, die Temperaturen steigen, um für dessen Wert 1 gleich der effektiven Erdtemperatur zu werden. Sind die höchsten Schichten der Atmosphäre, wie zu vermuten, hinreichend arm an Wasserdampf, so sind sie entgegen vielfach verbreiteten Anschauungen nicht durch tiefe Temperaturen ausgezeichnet, sondern befinden sich durchwegs auf der Temperatur -19^0 C. Die Atmosphäre geht auf dieser Temperatur isotherm mit wachsender Verdünnung durch Zustände, die wir mangels physikalischer Kenntnisse nicht näher behandeln können, in den sogenannten leeren Weltenraum über. Gehen wir anderseits in die Tiefe, so nehmen mit wachsender Absorption die Temperaturen ebenfalls zu. Da aber nun die absoluten Werte des Absorptionsvermögens des Wasserdampfes für kurzwellig und langwellig zur Wirkung kommen, sind die berechneten Temperaturen wesentlich unsicherer. Doch gelang es in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung, die Temperaturen der Bodenschichten der Atmosphäre zu $+15{,}8^0$ C zu berechnen. Dabei ergab sich das wichtige Resultat, daß von etwa 3000 m an abwärts die Atmosphäre bei Strahlungsgleichgewicht mechanisch instabil gebaut ist. Konvektion wird die berechneten Temperaturen weit hinauf verdecken, doch vermag sie die Temperatur oberhalb ihres Bereiches nicht, die Temperaturen der Bodenschichten nur wenig zu ändern.

Nun ist aber bekanntlich die Atmosphäre unterhalb einer durchschnittlichen Höhe von etwa 10 km in vertikaler Richtung beinahe stets durchsetzt von den Konvektionsströmen der langen Zykeln, den charakteristischen Erscheinungen der Hoch- und Tiefdruckgebiete, sowie jenen Konvektionsströmen, in welchen die allgemeine atmosphärische Zirkulation klar in Erscheinung tritt. Für diese gilt aus denselben Gründen, was oben S. 114 dargelegt wurde. Die Strahlungstemperaturen oberhalb des angegebenen Niveaus werden nicht, die der Bodenschichten wenig beeinflußt. Oberhalb dieses Niveaus ist aber die Absorption der einfallenden Strahlung so gering, daß die Temperaturen nach der kleinen Tabelle S. 109 berechnet werden können. Wir erhalten also mit jeder wünschenswerten Genauigkeit die durch Beobachtung ermittelten Temperaturen der Stratosphäre als Temperaturen des Strahlungsgleichgewichtes dieser Schichten, bestimmt durch das Verhältnis, in welchem ihr Wasserdampfgehalt kurzwellige und langwellige Strahlung absorbiert. Die Strahlungstheorie liefert mit jeder wünschenswerten Genauigkeit die Temperaturen der Stratosphäre. Sie gibt vollständigen Aufschluß über die thermische Unstetigkeit, die mit der mechanischen Unstetigkeit bei der Scheidung der Atmosphäre in Troposphäre und Stratosphäre verbunden ist. Diese mechanische Unstetigkeit selbst vermag die entwickelte Strahlungstheorie vorerst nicht zu begründen; doch scheint die Möglichkeit einer Begründung nicht ausgeschlossen. Dies einzusehen machen wir uns erst den Unterschied klar zwischen unseren Ergebnissen und dem zweiten Resultate von Gold (vgl. oben S. 94). Graue Strahlung vorausgesetzt, wie bei Gold, wird die Atmosphäre stets, mag die Absorption beliebige Funktion der Höhe sein, durch Strahlung stabil angeordnet. Von einem konvektiven Zustande ausgehend kann wohl vorübergehend bei $m = \frac{M}{4}$ eine Scheidung der Atmosphäre bewirkt werden, so daß in der unteren Partie Konvektionsströme ausgelöst werden. Aber das Endprodukt ist stets Stabilität, bei der Wärmebilanz Null Isothermie. Im Gegensatze zeigt unsere Theorie, daß durch Strahlung allein in den untersten 3 km der Atmosphäre dauernd Instabilität erzeugt wird, in den tiefsten Partien von sehr großer Intensität, so daß eine dauernde Ursache von Konvektionsströmen vorhanden ist. In einer nicht durch die allgemeine Zirkulation beeinflußten Atmosphäre muß deshalb durch Strahlung allein eine Trennung entsprechend der Troposphäre und Stratosphäre eintreten in einer Höhe, bis zu welcher die auftretenden Konvektionsströme emporreichen. Diese Höhe wäre durch die Bedingung gegeben, daß die unterhalb liegenden, durch Konvektion durchmischten Schichten ebensoviel Strahlung emporsenden, wie bei Strahlungsgleichgewicht; und es müßte gezeigt werden, daß die Instabilität Konvektionsströme bis in diese Höhe hinauftreiben kann. Es ist nicht ausgeschlossen, daß sich eine annehmbare Höhe ergeben wird. Allein selbst dann wäre es unsicher und bedenklich, die Teilung der Atmosphäre diesen Strahlungsvorgängen zuzuschreiben. Denn die allgemeine Zirkulation kann die Strahlung an Temperatur bestimmender Wirkung übertreffen; und im folgenden Paragraphen werden wir darlegen, daß bereits die Luftmassen mittlerer Breiten ihr Strahlungsvermögen nicht an Ort und Stelle, sondern namentlich im Winter in äquatorialen Gebieten empfangen und uns von dort zugeführt haben. Auf alle Fälle aber verdient die aufgedeckte Instabilität eingehende Beachtung, namentlich in ihrer Wirkung in Gebieten und zu Zeiten, die durch „Strahlungswetter" ausgezeichnet sind.

Die berechneten Temperaturen sind proportional der effektiven Erdtemperatur, deren 4. Potenz durch die Solarkonstante und die Albedo der Erde bestimmt werden. Erstere Größe ist mit genügender Genauigkeit gemessen; eine Änderung der Albedo um 10 % ihres Wertes würde die effektive Erdtemperatur um rund $4\frac{1}{2}^{0}$, die Inversionstemperatur und damit die Temperaturen der Stratosphäre um rund $3\frac{1}{2}^{0}$ ändern. Die Übereinstimmung mit der Beobachtung wäre noch immer vorzüglich, namentlich wenn wir bedenken, daß wir zu tiefe Temperaturen durch Abnahme des Wasserdampfgehaltes der Stratosphäre kompensieren können. Bedenklicher erscheint die Vereinfachung, die darin besteht, daß wir den Energiezufluß gleichmäßig über die ganze Erdoberfläche ausbreiteten, wodurch diese (Albedo $= 0{,}37$) pro Quadratzentimeter $\frac{2 . 0{,}63}{4}$ $= 0{,}315 \frac{\text{Grammkal}}{\text{min}}$ erhält, was zu der effektiven Erdtemperatur von $254^0 = -19^0$ C führte. Denn die Jahressumme der Sonnenstrahlung beträgt für den 50. Breitekreis nur 70 %, für den Pol nur 42 % des Wertes am Äquator. Selbst wenn wir von den Polarkalotten absehen, würden die höheren Breiten bei der angenommenen Verteilung, falls nur die geometrischen Verhältnisse der Bestrahlung für die Temperaturbestimmung maßgebend wären, zu viel erhalten. Allein daß es nicht angängig ist, effektive Erdtemperaturen für die verschiedenen Breitenkreise gemäß ihrer Bestrahlung einzuführen, zeigt sofort der Versuch, auch den Einfluß der Jahreszeiten zu berücksichtigen. So erhält der 50. Breitekreis im Sommerhalbjahr Sonnentrahlung im Betrage von 183, im Winterhalbjahr von 67 Äquatorialtagen[1]; für den 60. Breitekreis ergeben sich 169,5 und 38 Einheiten. Die effektiven Erdtemperaturen (und die diesen proportionalen, berechneten Strahlungstemperaturen) müßten sich verhalten wie die 4. Wurzeln; für den 50. Breitekreis wie 1 : 1,25, für den 60. Breitekreis wie 1 : 1,45. Die Sommer- und Wintertemperaturen dieser Breitenkreise sind $291,1^0$ ($+ 18,1^0$ C) und 266^0 (-7^0 C) resp. 287^0 ($+ 14^0$ C) und $257,2^0$ ($- 15,8^0$ C), verhalten sich also nur wie 1 : 1,09 resp. 1 : 1,12. Die Temperaturen der höheren Breiten werden sonach nicht durch Sonnenstrahlung an Ort und Stelle erzeugt. Die Sonnenstrahlung bedingt wohl die mittlere Jahrestemperatur der Erdoberfläche als Ganzes; ihre Veränderung mit der Breite nud die jahreszeitlichen Abweichungen vom Mittelwert werden noch durch andere Faktoren erzwungen. Die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre schafft durch Transport höher temperierter Luftmassen Entropiemengen nach höheren Breiten, und in demselben Maße, wie sie Ausgleich der Temperaturen im Wechsel der Jahreszeiten reguliert, besorgt sie auch die gleichmäßige Verteilung der Sonnenstrahlung, die unserer Theorie zu Grunde liegt. Die Temperaturen der tieferen Schichten der Stratosphäre werden aber durch die Strahlung der tieferen Schichten der Troposphäre mitbedingt (wir würden

[1]) J. Hann, Handbuch der Klimatologie, Bd. I, S. 100. Stuttgart 1908.

sonst Temperaturen gleich der effektiven Erdtemperatur antreffen); die allgemeine Zirkulation hindert deshalb auch die sonst starke örtliche und jahreszeitliche Schwankung der Inversionstemperaturen. Daß sich aber auch bei diesen der Einfluß der Jahreszeiten noch geltend macht, zeigen die Ausführungen Wagners [1]), wonach die *maximale* Temperatur der Stratophäre *im Juni* mit — 52°, die *minimale* Temperatur im Januar mit — 61,4° ermittelt wurde. Die Schwankung 9,4° ist geringer als die jahreszeitliche Schwankung an der Erdoberfläche. Unsere Theorie gibt befriedigenden Aufschluß. Die Atmosphäre, also auch die tiefen Schichten der Stratosphäre, sind im Sommer reicher an Wasserdampf; je geringer der Gehalt an Wasserdampf, desto höher die Temperatur dieser Schichten (vgl. die kleine Tabelle S. 109). Die tiefere Temperatur der strahlenden Schichten der Troposphäre wird durch geringeren Wasserdampfgehalt der oberen Inversion zum Teil kompensiert. In diese Verhältnisse werden die Untersuchungen des folgenden Paragraphen weiteren Einblick geben.

§ 6. Die Strahlung der Atmosphäre.

Die Untersuchungen des letzten Paragraphen bestimmten die Temperaturen des Strahlungsgleichgewichtes der Atmosphäre, falls die Wärmebilanz gegeben ist. In diesem Paragraphen behandeln wir das umgekehrte Problem. Gegeben seien die Temperaturen der Atmosphäre und die äußere Zustrahlung; wir fragen nach den Strahlungen, die jeden Querschnitt der Atmosphäredurch setzen und an ihren Grenzflächen austreten. Wir gehen von denselben Voraussetzungen aus: jede Schicht absorbiert und emittiert proportional ihrem Gehalte an Wasserdampf; die kurzwellige Sonnenstrahlung und die langwellige Strahlung von der tiefen Temperatur der Erdoberfläche und Atmosphäre sollen jede für sich als grau betrachtet, d. h. durch

[1]) A. Wagner, Die Temperaturverhältnisse in der freien Atmosphäre. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, Bd. III, S. 57, 1910.

einen mittleren Absorptionskoeffizienten k_1 resp. k_2 behandelt werden können.

Die absteigende Strahlung B besteht aus den Bestandteilen B_1 und B_2, B_1 die kurzwellige Sonnenstrahlung, B_2 die langwellige Strahlung der erwärmten Atmosphäre. Die aufsteigende Strahlung A, herrührend von der Strahlung der Erdoberfläche und der Atmosphäre ist so tief temperiert, daß wir den kurzwelligen Anteil A_1 gegenüber A_2 vernachlässigen können. Ebenso berücksichtigen wir von der Strahlung eines schwarzen Körpers von der Temperatur der Atmosphäre lediglich den langwelligen Teil, setzen also $E_2 = E = s\,T^4$. Dann lauten die beiden Hauptgleichungen wie im vorangehenden Paragraphen:

$$\frac{dB}{dm} = \frac{dB_1}{dm} + \frac{dB_2}{dm} = -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_2 E_2$$
$$= -k_1 B_1 - k_2 B_2 + k_2 E$$

$$\frac{dA}{dm} = \frac{dA_2}{dm} = k_2 A_2 - k_2 E_2 = k_2 A - k_2 E$$

und entsprechend der Gleichung (77) setzen wir

$$k_1 = b_1 m^3; \qquad k_2 = b_2 m^3,$$

worin für mittlere Feuchtigkeitsverhältnisse $b_1 = 0{,}4$, $b_2 = 9{,}2$ angenommen werden kann. Statt Strahlungsgleichgewicht anzunehmen, betrachten wir die Temperaturverteilung der Atmosphäre, also E als Funktion von m gegeben, und integrieren. Wie oben S. 105 erhalten wir $B_1 = \sigma e^{-\frac{b_1}{4} m^4}$ und

$$B_2 = \bar{B}_2 e^{-\frac{b_2}{4} m^4} + b_2 e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m m^3 e^{\frac{b_2}{4} m^4} E\, dm.$$

Beachten wir, daß $\bar{B}_2$ (der Wert B an der oberen Grenze der Atmosphäre) gleich Null ist, so erhalten wir schließlich nach leichter Umformung

$$93)\qquad B = \sigma e^{-\frac{b_1}{4}m^4} - \overline{E}\, e^{-\frac{b_2}{4}m^4} + E - e^{-\frac{b_2}{4}m^4}\int\limits_0^m e^{\frac{b_2}{4}m^4}\frac{dE}{dm}\,dm,$$

worin $\overline{E}$ den Wert von E an der oberen Grenze der Atmosphäre bedeutet. Ebenso ergibt sich

$$A = \overline{A}\, e^{\frac{b_2}{4}m^4} - b_2 e^{\frac{b_2}{4}m^4}\int\limits_0^m m^3 e^{-\frac{b_2}{4}m^4} E\,dm$$

und nach leichter Umformung

$$94)\qquad A = (\overline{A} - \overline{E})\, e^{\frac{b_2}{4}m^4} + E - e^{\frac{b_2}{4}m^4}\int\limits_0^m e^{-\frac{b_2}{4}m^4}\frac{dE}{dm}\,dm,$$

oder wenn wir statt der Werte $\overline{A}$ und $\overline{E}$ an der oberen Grenze die Werte $\underline{A}$ und $\underline{E}$ an der unteren Grenze $m = M$ der Atmosphäre einführen

$$94\,a)\qquad A = (\underline{A} - \underline{E})\, e^{\frac{b_2}{4}(m^4 - M^4)} + E + e^{\frac{b_2}{4}m^4}\int\limits_m^M e^{-\frac{b_2}{4}m^4}\frac{dE}{dm}\,dm.$$

Hätten wir die Absorption unabhängig von der Höhenlage der Schicht anzunehmen, so wären in den Gleichungen (93), (94) und (94 a) lediglich $\frac{b_1}{4}m^3$ durch $k_1 = 0{,}1$ und $\frac{b_2}{4}m^3$ durch $k_2 = 2{,}3$ zu ersetzen. Die Gleichungen (93), (94) und (94 a) enthalten die vollständige Lösung des Problems. Bilden wir ihnen entsprechend

$$95)\qquad (2k_2 E - k_1 B_1 - k_2 B - k_2 A)\,dm,$$

so erhalten wir die Energieabgabe jeder Schicht, und dadurch ihre Abkühlungsgeschwindigkeit. Integration nach m gibt die Wärmeabgabe atmosphärischer Schichten von endlicher Dicke.

Anwendung der gewonnenen Gleichungen.

Wir stellen erst in der folgenden kleinen Tabelle die Temperaturen zusammen, bei denen ein schwarzer Strahler die Menge $E\,\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\,\text{min}}$ ausstrahlt.

$E \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$	T	$E \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$	T
0,148	210	0,467	280
0,212	230	0,500	285
0,252	240	0,537	290
0,296	250	0,615	300
0,347	260	0,701	310
0,403	270	1,014	340

I. Die nächtliche Strahlung einer isothermen Atmosphäre.

Die Temperatur sei T. Konstanz der Temperatur hat Konstanz von E zur Folge. Also ist $\frac{dE}{dm} = 0$, $\overline{E} = \underline{E} = E$. Den nächtlichen Verhältnissen Rechnung tragend setzen wir in (93) $\sigma = 0$ und erhalten

96) $$B = E\left(1 - e^{-\frac{b_2}{4} m^4}\right)$$

97) $$A = (\underline{A} - E)\, e^{\frac{b_2}{4}(m^4 - M^4)} + E.$$

Da wir nur die Strahlung der Atmosphäre selbst beurteilen wollen, nehmen wir weiter an, daß die Erdoberfläche ebenfalls auf gleicher Temperatur sei und wie ein schwarzer Körper strahle, oder bei geringerem Strahlungsvermögen sich auf etwas höherer Temperatur befinde, so daß wir haben $\underline{A} = E$, und wir erhalten

97 a) $$A = E.$$

Die für unsere Untersuchung ungleich wichtigere Strahlung B wird durch diese Vereinfachung nicht beeinflußt! Gleichung (97 a) liefert wieder den S. 65 ausgesprochenen Satz, daß eine isotherme Atmosphäre die Strahlung einer gleich temperierten schwarzen Fläche nicht ändert. Eine auf ihrer Oberseite spiegelnde, auf ihrer Unterseite schwarze, horizontale Fläche würde an jeder Stelle der Atmosphäre eine von der Höhe unabhängige Strahlung an Intensität gleich der Erdstrahlung messen. Umgedreht mißt die Fläche die durch (96) bestimmte, erdwärts gerichtete Strahlung der Atmosphäre. Der Faktor $1 - e^{-\frac{b_2}{4} m}$ ist, wie leicht ersichtlich, das Absorptionsvermögen der oberhalb des Niveaus m gelegenen Schichten, so daß Gleichung (96) der Ausdruck des Kirchhoffschen Satzes ist, der hier, da wir einen isothermen Strahler annehmen, unverändert gilt. Für die Bodenschicht, $m = 1$, ist bei mittleren Feuchtigkeitsverhältnissen $e^{-\frac{b_2}{4} m} = 0{,}1$, so daß die Erdoberfläche von der Atmosphäre Wärmemengen zugestrahlt erhält gleich 90 % der Strahlung eines gleich temperierten schwarzen Strahlers! Mit zunehmender Erhebung nimmt die Zustrahlung der Atmosphäre rasch ab. Wir stellen in folgender, kleinen Tabelle die Zustrahlung der Atmosphäre für verschiedene Temperaturen in verschiedenen Höhen zusammen, ausgedrückt in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$, die Höhen genügend genau berechnet für $T = 0^0$ C.

T	-20^0	-10^0	0^0	10^0	20^0
$h =$ 0 m	0,28	0,32	0,38	0,44	0,50
1000 „	0,23	0,27	0,315	0,37	0,42
2000 „	0,18	0,21	0,23	0,28	0,32
3000 „	0,12	0,14	0,16	0,19	0,22
4000 „	0,08	0,10	0,11	0,13	0,15
5540 „	0,04	0,05	0,055	0,06	0,07

An direkten Messungen liegen vor[1]):

	Neapel 60 m	Wien 220 m	Zürich 440 m	Rauris 950 m	Sonnblick 3100 m	
Beobachtete Temperatur	22^0	19^0	15^0	-6^0	-1^0	-12^0
Gegenstrahlung der Atmosphäre	0,40	0,41	0,37	0,21	0,23	0,12

Die Differenzen berechnet — beobachtet sind (mit einer

[1]) W. Trabert, Lehrbuch der kosmischen Physik, S. 456. Leipzig und Berlin 1911.

Ausnahme) positiv, mit wachsender Höhe abnehmend, beides selbstverständlich, da der Rechnung mit der Höhe konstante Temperatur zu Grunde liegt.

Die Zahlen zeigen im Vergleich mit den Zahlen der vorangehenden, den Zusammenhang zwischen E und T darstellenden Tabelle den gewaltigen Strahlungsschutz einer isothermen Atmosphäre bei mittleren Feuchtigkeitsverhältnissen. Im Meeresniveau beträgt die Gegenstrahlung dieser Atmosphäre 90% der Ausstrahlung der maximal (schwarz) strahlenden Erdoberfläche, sie kann also deren Wärmeverlust auf den 10. Teil herabsetzen. Sie zeigt ferner den außerordentlichen Einfluß des Wasserdampfes, denn die Abnahme der Zahlen mit der Höhe ist in erster Linie der Abnahme des Wasserdampfes in höher liegenden Niveaus zuzuschreiben.

Um die von einer atmosphärischen Schicht abgegebene Wärmemenge dQ zu berechnen, bilden wir Gleichung (95), erhalten

98) $$dQ = +Ee^{-\frac{b_2}{4}m^4} b_2 m^3 dm$$

und integriert

98 a) $$Q = E\left(e^{-\frac{b_2}{4}m_1^4} - e^{-\frac{b_2}{4}m_2^4}\right).$$

Die oberhalb m gelegenen Schichten geben deshalb Wärme ab im Betrage

$$Q = E\left(1 - e^{-\frac{b_2}{4}m}\right),$$

das ist die durch die Strahlung B beförderte Menge. Die von jeder Schicht abgegebene Wärme wandert also nur in Richtung Erde. Selbstverständlich, denn der konstante Energiestrom A, der die Atmosphäre in Richtung Weltenraum verläßt, tritt an ihrer Unterfläche ein.

Die Temperatur jeder Schicht sinkt in der Minute um den Betrag

99) $$\Delta T = \frac{Ee^{-\frac{b_2}{4}m^4} b_2 m^3}{c_p}$$

und die Mitteltemperatur der Schicht von m_1 bis m_2 um

99 a) $$\varDelta T = \frac{E\left(e^{-\frac{b_2}{4} m_1^4} - e^{-\frac{b_2}{4} m_2^4}\right)}{c_p (m_2 - m_1)}.$$

Die Temperatur sinkt nicht in allen Schichten gleich rasch. Die Isothermie wird infolge des Strahlungsprozesses aufhören, allerdings sehr langsam. Die rascheste Temperaturänderung erleidet die Schicht $m^4 = \frac{3}{b_2}$ (wie aus (99) leicht zu ermitteln ist); also in einer Höhe von rund 2250 m; ihre Temperatur sinkt bei $T = 270^0$ per Minute um $0{,}00323^0$; zu einem Grad Abkühlung sind 5 Stunden 10 Min. erforderlich. Für Abkühlung im Mittel um 1^0 benötigt die unterste Schicht von 1 km Höhenerstreckung 7 Stunden 20 Min., die ganze Atmosphäre 10 Stunden 45 Min. Der Strahlungsprozeß einer Nacht vermag deshalb eine isotherme Atmosphäre nicht wesentlich zu ändern, die tiefsten, staubbeladenen Schichten ausgenommen; die tiefen Temperaturen der Stratosphäre reagieren nicht mehr bemerkbar auf den Wechsel von Tag und Nacht.

II. Die nächtliche Strahlung einer polytropen Atmosphäre[1]).

Wir rechnen unter denselben Grenzbedingungen wie in dem eben erledigten Falle, setzen also $\sigma = 0$ und $\overline{A} = \overline{E}$ und erhalten aus den Gleichungen (93) und (94), da in jeder polytropen Atmosphäre die Temperatur bei konstantem Werte von g linear mit der Höhe abnimmt, also $\overline{E} = 0$ wird,

$$B = E - e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m e^{\frac{b_2}{4} m^4} \frac{dE}{dm}\, dm$$

$$A = E + e^{\frac{b_2}{4} m^4} \int_m^M e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \frac{dE}{dm}\, dm.$$

[1]) R. Emden, Gaskugeln, Kap. XVII, § 2. Leipzig 1907.

Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, setzen wir

$$E = E_0 \frac{m}{M}, \quad M = 1.$$

Da $m \sim p$ und $E \sim T^4$, haben wir die Polytrope

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{4}},$$

also $\varkappa = \frac{4}{3}$; dies gibt das Temperaturgefälle

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{1}{\frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot R} = -0{,}0085^0/\mathrm{m}.$$

Die Temperatur nimmt 0,85° per 100 m ab, also ausnahmsweise stark, während wir oben ausnahmsweise kleines Temperaturgefälle berücksichtigten. Wir können deshalb die Strahlung unter mittleren Verhältnissen beurteilen. In der § 3 besprochenen Arbeit hat Gold dieselben Temperaturgradienten angenommen; wir sind deshalb in der Lage, seine Ergebnisse mit unserer vervollkommneten Theorie vergleichen zu können.

Wir erhalten so

$$100) \qquad B = E_0 \left[m - e^{-\frac{b_2}{4} m^4} \int_0^m e^{\frac{b_2}{4} m^4}\, dm\right]$$

$$100\,a) \qquad A = E_0 \left[m + e^{\frac{b_2}{4} m^4} \int_m^M e^{-\frac{b_2}{4} m^4}\, dm\right].$$

Die Integrale lassen sich durch Entwicklung in Reihen auswerten, die, da $\frac{b_2}{4} = 2{,}3$, namentlich für den Maximalwert $m = M = 1$ schlecht konvergieren. (Für $m = 1$ wurde noch das 10. Glied $\frac{1}{9!\,.\,33}\left(\frac{b_2}{4}\right)^9 m^{33}$ berücksichtigt.)

Für die Gegenstrahlung B legen wir die Ergebnisse der Rechnung in einer kleinen Tabelle fest. T_0 ist die Bodentemperatur der Atmosphäre.

T_0	-20^0	-10^0	0^0	10^0	20^0	30^0
$h =$ 0 m	0,26	0,29	0,335	0,39	0,45	0,51
1000 „	0,18	0,21	0,27	0,28	0,32	0,36
2000 „	0,12	0,14	0,155	0,18	0,21	0,24
3000 „	0,07	0,08	0,09	0,11	0,13	0,14
4000 „	0,04	0,05	0,05	0,065	0,07	0,08
5540 „	0,015	0,02	0,02	0,03	0,03	0,03

Die zugestrahlten Energiemengen sind selbstverständlich kleiner wie bei isothermer Atmosphäre; für $\underline{B}$ ergibt sich 0,798 E_0 statt 0,9 E.

Zum Vergleiche führen wir nochmals die wenigen vorliegenden Beobachtungen an und fügen die Temperatur T_0 bei, die sich auf Grund des angenommenen Gradienten ergeben würde.

	Neapel 60 m	Wien 220 m	Zürich 440 m	Rauris 950 m	Sonnblick 3100 m	
Beobachtete Temperatur .	22^0	19^0	15^0	-6^0	-1^0	-12^0
T_0 berechnet	22^0	21^0	19^0	$+2^0$	$+25^0$	$+14^0$
Gegenstrahlung beobachtet	0,40	0,41	0,37	0,21	0,23	0,12
Gegenstrahlung isotherm berechnet	0,50	0,48	0,44	0,29	0,16	0,14
Gegenstrahlung polytrop berechnet	0,46	0,42	0,38	0,24	0,14	0,12

Die Übereinstimmung mit den beobachteten Werten ist so vollständig, als mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der Messung und die der Rechnung zu Grunde gelegten mittleren Verhältnisse erwartet werden kann. Auffällig ist die Nichtübereinstimmung mit der Messung 0,23 auf dem Sonnblick (die zweite Messung gibt vollständige Übereinstimmung); im Vergleiche mit den übrigen Messungsresultaten erscheint dieser Wert ausnahmsweise groß. *Diese Übereinstimmung beweist, daß wir mit unserer vereinfachenden Annahme,* die Strahlung nur in kurzwellige und langwellige Strahlung zu zerlegen, den tatsächlich vorliegenden Verhältnissen sehr gut Rechnung tragen.

Würden wir, um uns mittleren Verhältnissen mehr zu nähern, den Exponenten der Polytropen $\varkappa = \frac{7}{6}$ wählen, so würden wir die Temperaturgradienten $0{,}49^0/_{100}$ m. erhalten, und wir hätten Integrale von der Form

$$\int_0^m e^{\pm \frac{b_2}{4} m^4} \, m^{-\frac{3}{7}} \, d\,m$$

auszuwerten. Für diesen Aufbau der Atmosphäre erhalten wir $\underline{B} = 0{,}838\, E_0$ statt der eben berechneten $0{,}798\, E_0$, resp. $0{,}9\, E_0$ isotherm. Die beiden kleinen Tabellen reichen deshalb zur Beurteilung mittlerer Verhältnisse vollständig aus.

Die Strahlung A kann nach (100a) für jedes Niveau berechnet werden. Ein Freiballon würde bei Nacht pro cm^2 horizontalen Querschnittes die Strahlung $B + A$ erhalten; er kann, wie an anderer Stelle ausgeführt werden soll, als Strahlungsmesser dienen. Für die Strahlung $\overline{A}$, welche die Atmosphäre an ihrer oberen Begrenzung verläßt, ergibt sich $\overline{A} = 0{,}7274\, E_0$, also 73 $^0/_0$ des Betrages, der unten in die Atmosphäre eintritt. [Für den Temperaturgradienten 0,49 ergibt sich $\overline{A} = 0{,}826\, E_0$.] Der Strahlungsgewinn der Atmosphäre beträgt deshalb

$$E_0 (1 - 0{,}7274 - 0{,}798) = -\, 0{,}525\, E_0 \,\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}.$$

Sie wird sich infolgedessen um $0{,}00090\,^0/m$ oder 1^0 in $18^h\, 30^m$ abkühlen, falls die Bodentemperatur 0^0 C beträgt. Die Abkühlung des untersten Kilometers ist selbstverständlich kleiner als $7^h\, 20^m$, wie sich für isotherm ergab. Die Abkühlungen während der Nacht sind somit außerordentlich gering. Um die Wärmeabgabe dQ allgemein zu finden, bilden wir mit Hilfe der Gleichung (100) die Gleichung (95) und erhalten

101) $$dQ \doteq \left[e^{-\frac{b_2}{4}m^4}\int\limits_0^m e^{\frac{b_2}{4}m^4}\,dm - e^{\frac{b_2}{4}m^4}\int\limits_m^M e^{-\frac{b_2}{4}m^4}\,dm\right] b_2 m^3\,dm$$

und für die endliche Schichte von m_1 bis m_2

101 a) $$Q = e^{-\frac{b_2}{4}m_1^4}\int\limits_0^{m_1} e^{\frac{b_2}{4}m^4}\,dm - e^{-\frac{b_2}{4}m_2^4}\int\limits_0^{m_2} e^{\frac{b_2}{4}m^4}\,dm$$
$$+\, e^{\frac{b_2}{4}m_1^4}\int\limits_{m_1}^M e^{-\frac{b_2}{4}m^4}\,dm - e^{\frac{b_2}{4}m_2^4}\int\limits_{m_2}^M e^{-\frac{b_2}{4}m^4}\,dm,$$

woraus sich für $m_1 = 0$, $m_2 = M$ wieder der bereits berechnete Betrag ergibt. Uns interessiert das durch den Klammerausdruck bedingte Vorzeichen von dQ in Gleichung (101). Für größere m erhalten wir Wärmeabgabe, $dQ > 0$; wir untersuchen für kleine m. Entwickeln wir die Integrale und Exponentialfunktionen und vernachlässigen m^4 und höhere Potenzen von m, so wird der Klammerausdruck

$$2m - \left(1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{b_2}{4}\right),$$

also

$$dQ \lesseqgtr 0,\ \text{je nachdem}\ m \lesseqgtr 0{,}27.$$

In allen Schichten, für welche $m \lesseqgtr 0{,}27$, ist die Ausstrahlung $\lesseqgtr$ Absorption. Durch den Strahlungsprozeß werden die höher wie $m = 0{,}27$ gelegenen Schichten gewärmt, die tieferen abgekühlt. Berechnen wir die Höhe dieser Schicht. Da der Temperaturgradient $\frac{dT}{dh} = -\frac{1}{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}R}$ beträgt, aus der Polytropen $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ sich $dT = T_0\,dp^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}$ ergibt und $p = m$, $p_0 = M = 1$ gesetzt werden kann, erhalten wir Beziehung zwischen m und h

$$1 - m^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = \frac{h}{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1} R T_0}, \tag{102}$$

für unseren Wert $\varkappa = \frac{4}{3}$ und $m = 0{,}27$ ergibt sich $1 - m^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 0{,}28$ und für $T_0 = 273$

$$h = 8950 \text{ m}.$$

Für die Temperaturgradienten $0{,}49^0/_{\mathrm{m}}$ hätte sich 8200 m [für $0{,}1^0/_{\mathrm{m}}$ 8650 m ergeben, um mit isothermer Atmosphäre bis ∞ zuzunehmen]. An Stelle unseres Wertes $m = 0{,}27$ fand Gold (vgl. oben § 2) unter anderer Annahme über die Verteilung des Wasserdampfgehaltes 0,25. Oberhalb dieser Höhe würde eine polytrope Atmosphäre durch den Strahlungsprozeß erwärmt, unterhalb abgekühlt werden. Die Folgen dieses Umstandes haben wir bereits oben § 3 besprochen.

III. Atmosphärische Strahlung und Sonnenstrahlung.

Um unsere Anschauungen über die Erwärmung der Erde von mancherlei konventioneller Unklarheit zu reinigen, stellen wir die Frage:

Kann der Betrag von Strahlung, den die Erdoberfläche auffängt, durch eine zwischen Erde und Sonne gestellte, absorbierende Atmosphäre erhöht werden?

Die Antwort wird bejahend ausfallen. Dies leuchtet ein, wenn wir die Frage in anderer Form stellen: Würde nach Wegnahme der Atmosphäre die mittlere Temperatur der Erdoberfläche steigen oder fallen? Bei höherer Temperatur, also stärkerer Ausstrahlung, muß ihr offenbar auch mehr Wärme zugeführt werden. Rechtfertigt die Atmosphäre ihre Auffassung als „Wärmeschutz", also die Temperatur erhöhend, so muß sie die Bestrahlung vermehren.

Die Tatsache, daß eine absorbierende Substanz die sie passierende Strahlung verstärken kann, erscheint uns widersinnig, da wir unwillkürlich an die Versuchsanordnung denken, mittelst der wir Absorptionskoeffizienten im Laboratorium bestimmen. Zwischen auffangende, messende Fläche und Strahlungsquelle ist die absorbierende Substanz eingeschaltet. Dabei müssen, was wesentlich ist, um die schlechthin als Absorption bezeichnete Größe zu messen, absorbierende Substanz und Meßfläche auf wesentlich tieferer Temperatur wie die Strahlungsquelle sein, so daß nur die Schwächung der Strahlung bestimmt wird. Mit steigender Temperatur der absorbierenden Substanz ändern sich die Verhältnisse vollständig. Nehmen wir etwa als Strahlungsquelle eine schwarze, glühende Fläche und schalten ein kaltes Gas vor, so erscheinen die dunklen Absorptionslinien; bei einem heißeren Gase überwiegt trotz der Absorption die Emission, so daß die Linien hell erscheinen. Sorgen wir andererseits dafür, daß die strahlenden, absorbierenden resp. auffangenden Körper Wärme nur *unter sich* durch Strahlung austauschen können, so stellt sich dies System auf Strahlungsleichgewicht ein und jeder absorbierende Körper emittiert schwarze Strahlung.

Die Erdoberfläche ohne Atmosphäre wird sich bei gleichmäßiger Austeilung der Sonnenstrahlung auf die effektive Erdtemperatur einstellen. Fügen wir die Atmosphäre wieder bei, setzen graue Strahlung voraus und warten Strahlungsgleichgewicht ab, so stellt sich auch die Atmosphäre isotherm auf dieselbe Temperatur ein (§ 2) und jede Schicht wird, aufwärts und abwärts, unabhängig von ihrer Höhe, von demselben Energiestrom durchsetzt. *Die Strahlung, welche die Erdoberfläche erhält, bliebe ungeändert, und der „Wärmeschutz“ dieser Atmosphäre wäre Null.* Strenge genommen wäre er negativ. Die diffuse Reflexion und Wolken vermindern die nutzbare Strahlung um 37 %, den Wert der Albedo; aber zweckmäßig schalten wir diesen Energiebetrag, da er nicht in das thermodynamische System eintritt, stets aus unseren Betrachtungen aus.

Lassen wir die zu unbefriedigenden Resultaten führende Annahme grauer Strahlung fallen und teilen wieder die Strahlung ein in kurzwellig und langwellig, so wird die Erdoberfläche bei Strahlungsgleichgewicht von einer Strahlung $\underline{B}$ getroffen, die durch Gleichung (81) bestimmt ist. Bezeichnen wir mit σ die auf die obere Begrenzung der Atmosphäre einfallende Strahlung, so erhalten wir

$$\underline{B} = \sigma \sqrt[4]{2,2} = 1,218 \cdot \sigma.$$

Wärmeschutz ist vorhanden; die zwischengeschaltete Atmosphäre verstärkt die einfallende Strahlung um 22 %. Der Mechanismus des Strahlungsprozesses ist klar. Die Atmosphäre wird nicht nur durch die oben einfallende Strahlung σ, sondern hauptsächlich durch die Rückstrahlung der Erdoberfläche, die ihrerseits durch Sonnenstrahlung und Gegenstrahlung der Atmosphäre bedingt wird, gewärmt. Die Strahlungen $\underline{B} = \underline{A} = 1,218\,\sigma$ werden durch Absorption und Emission der Atmosphäre auf die Werte $\overline{B} = \overline{A} = \sigma$ an der oberen Begrenzung herabgesetzt, so daß für das Ganze sich die Wärmebilanz Null ergibt.

Die Konvektionsströme der langen Zykeln hindern die Ausbildung des Strahlungsgleichgewichtes innerhalb der Troposphäre. Die Temperaturen der Stratosphäre werden dadurch nicht geändert; ihre tiefe Temperatur und der geringe Gehalt an Wasserdampf lassen sie nur geringe Strahlungsmengen aussenden. Die Gegenstrahlung der Atmosphäre ist beinahe ausschließlich bedingt durch die Anordnung der Troposphäre, namentlich in ihren der Erde näheren Schichten. Wir kommen deshalb mittleren Verhältnissen sehr nahe, wenn wir die Temperaturabnahme $0,5^0/_{100}$ m. ansetzen; die Temperaturverhältnisse der tieferen, in erster Linie maßgebenden Schichten sind dadurch genügend dargestellt. Nach S. 130 berechnet sich dann die Gegenstrahlung der Atmosphäre genügend genau zu

103) $$\underline{B} = 0,84\,E_0 = 0,84 \cdot s \cdot T_0^4,$$

wenn T_0 die Bodentemperatur der Atmosphäre mißt. Um den in Wirklichkeit vorliegenden Verhältnissen möglichst Rechnung zu tragen, verlassen wir die Annahme, daß die Sonnenstrahlung gleichmäßig über die Erdoberfläche verteilt, diese durchgehends auf einer mittleren Temperatur sei. Wir untersuchen mit Berücksichtigung der geographischen Breite. Dazu setzen wir in (103) für T_0 die mittlere Temperatur des Breitenkreises, nach Spitaler, und zwar für das Jahr, den Juli als wärmsten und den Januar als kältesten Monat. Damit berechnen wir die Gegenstrahlung $\underline{B}$ der Atmosphäre und vergleichen mit ihr die Strahlung, welche die Sonne diesem Parallelkreis an der oberen Grenze der Atmosphäre zukommen läßt und zwar mit dem vollen Betrag an Strahlung $\sigma = 2 \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ min}}$, ohne Abzug der Albedo. (Denn es wäre zu umständlich und unsicher, die Albedo jedes Breitenkreises zu berechnen.) Die Resultate der Rechnung sind in folgender Tabelle zusammengestellt.

Die ersten 3 Reihen geben die mittleren Temperaturen der angegebenen Breitekreise nördlicher Breite, die 4. und 5. Reihe die mittlere jährliche Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen[1]) und in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$. In letzterem Maße enthält die 6. Reihe die Gegenstrahlung der Atmosphäre, falls ihre Bodentemperatur gleich der mittleren Jahrestemperatur des Parallelkreises angenommen wird, und die 9. Reihe die Gegenstrahlung für den Juli, als wärmsten Monat. Reihe 7 und 8 geben die Sonnenstrahlung zur Zeit ihres Maximums, für den 20^0-60^0 am 21. Juni; für den 0. und 15. Breitekreis am 20. März und

[1]) Die Beträge der Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen sind entnommen: J. Hann, Handbuch der Klimatologie, Bd. I, S. 94 f., 1908. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleiche empfängt der Äquator (1 Tag = 1440 min, Verhältnis des Erdumfanges zum Erddurchmesser $= \pi$, σ Solarkonstante) $\frac{1440}{\pi} \sigma = 458{,}4 \cdot \sigma \cdot \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$; die Wanderung der Sonne innerhalb der Wendekreise macht im jährlichen Mittel diesen Betrag 0,9592 mal kleiner. Ein Äquatorealtag entspricht also einer Wärmezufuhr von

$$0{,}9592 \cdot 458{,}4 \cdot \sigma = 439{,}7\, \sigma = 879{,}4 \frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}.$$

Tabelle I.

N. Breite		0°	15°	20°	30°	40°	50°	60°
1. Jahrestemperatur		25,9°	26,3	25,6	20,3	14,0	5,6	– 0,1
2. Julitemperatur		25,5°	27,9	28,1	27,4	23,8	18,1	14,1
3. Januartemperatur		26,2°	23,9	21,7	13,9	3,9	– 7,2	– 16,0
4. Mittlere jährliche Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen		365	354	345	321	288,5	250	208
5. Mittlere jährliche Sonnenstrahlung in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$		880	852	830	773	694	601	500
6. Mittlere jährl. Gegenstrahlung der Atmosphäre in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$		733	736	732	681	624	554	510
7. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	21. Juni	381	387	398	411	421,5	421	416
8. Sonnenstrahlung in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$	21. Juni	917	933,5	958	998	1015	1015	1002
9. Gegenstrahlung der Atmosphäre in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$	Juli	730	753	755	750	713	660	624
10. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	21. Dez.	358	285	258	198	135	75	21
11. Sonnenstrahlung in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$	21. Dez.	863	687	621	477	326	181	51
12. Gegenstrahlung der Atmosphäre in $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2 \text{ 24 St.}}$	Januar	736	713	694	622	540	460	403

1. Mai. Reihe 10 und 11 geben die Sonnenstrahlung für den tiefsten Sonnenstand, den 21. Dezember; Reihe 12 die Gegenstrahlung der Atmosphäre für den kältesten Monat, den Januar. (Die kleinen Polarkalotten, deren Schneebedeckung durch Schmelz und Gefrierprozesse die Wärmebilanz außerordentlich beeinflußt, bleiben unberücksichtigt; die Rechnung bis zum 60. Breitekreis gibt genügenden Überblick.)

Betrachten wir erst die mittleren jährlichen Verhältnisse. Selbst in äquatorealen Gebieten ist die Gegenstrahlung der Atmosphäre nur um 20—10% kleiner wie der Zufluß an Strahlung auf ihre obere Grenze. Da der Gehalt der Atmosphäre an Wasserdampf in diesen Regionen sicher größer ist wie der angenommene mittlere Gehalt, wird ihre Gegenstrahlung noch größer sein. (Sie kann, da wir $\underline{B} = 0{,}84 \cdot s T_0^4$ ansetzten, noch immer um 16% größer werden.) Bereits zwischen 50° und 60° werden beide Strahlungen einander gleich. Von der berechneten Sonnenstrahlung geht aber ein beträchtlicher Teil durch Reflexion an Wolken und diffuse Reflexion für die Bestrahlung der Erdoberfläche verloren. Setzen wir den diffus reflektierten Teil, wie üblich zu 19% an, so wird bereits hierdurch die Sonnenstrahlung unter die atmosphärische Strahlung herabgedrückt. Wir haben also den Satz:

Die jährliche Gegenstrahlung der Atmosphäre ist nur wenig kleiner als die jährliche Sonnenstrahlung, welche die Atmosphäre an ihrer äußeren Begrenzung trifft, und größer als die jährliche Sonnenstrahlung, welche den festen Erdboden erreicht.

Reduzieren wir die angegebenen Werte der Sonnenstrahlung um 37%, den Mittelwert der Albedo, so erhalten wir zwischen 0° und 30°, also für die halbe Erdoberfläche, etwa $840 \cdot 0{,}63 = 530$ Kal.; für die angenommene polytrope Atmosphäre wäre die Ausstrahlung der Erde plus Atmosphäre ziemlich genau gleich den angegebenen Werten der Gegenstrahlung; denn wir fanden S. 130 für den Gradienten $0{,}49°/_{100}$ m

$$\underline{B} = 0{,}84\, E_0 , \qquad A = 0{,}83\, E_0 .$$

Die Wärmebilanz würde also *nicht* mehr stimmen, da im Laufe des Jahres mehr aus- als eingestrahlt würde. Allein der angenommene Gradient gilt nur für die tieferen Schichten der Atmosphäre, welche in erster Linie die Gegenstrahlung bestimmen. Durch diesen Gradienten haben wir die höheren Schichten, welche die Ansstrahlung nach oben mitbedingen, viel zu hoch temperiert; in Höhen von 10 km würden wir etwa -25^0 bis -30^0 C, statt der Temperaturen der Stratosphäre, -50^0 bis -57^0, angesetzt haben. Die Ausstrahlung wird deshalb bedeutend kleiner ausfallen. (Vgl. das oben S. 113 über Wirkung der Konvektion auf höhere Niveaus Auseinandergesetzte); rechnen wir mit der Strahlung der Stratosphäre im Strahlungsgleichgewichte, so erhalten wir statt rund $\frac{720 \text{ Kal}}{\text{cm}^2 \text{ } 24 \text{ St.}}$ im Mittel der Gegenstrahlung, $1440 \cdot 0{,}315 = \frac{455 \text{ Kal}}{\text{cm}^2 \, 24 \text{ St.}}$ gegenüber den 530 einfallenden Kalorien. Da aber mit zunehmender Breite die atmosphärische Strahlung überwiegt, wird sich mit genügender Genauigkeit die Wärmebilanz Null ergeben.

Die folgenden Reihen der Tabelle I gestatten die größte und kleinste tägliche Gegenstrahlung der Atmosphäre mit der größten und kleinsten täglichen Sonnenstrahlung zu vergleichen. Daß mit zunehmender Breite die Sonnenstrahlung zur Zeit höchsten Sonnenstandes die Gegenstrahlung immer mehr übertrifft, war zu erwarten. Überraschend ist, in welchem Maße zur Zeit tiefsten Sonnenstandes die Gegenstrahlung der Atmosphäre überwiegt. Reduzieren wir die 181 Kal. Sonnenstrahlung, die unter 50^0 Breite einfallen, noch um den Wert der Albedo, so erhalten wir 110 Kal., während die Gegenstrahlung 460 Kal. liefert. I n M i t t e l e u r o p a e r h ä l t d e r E r d b o d e n i m J a n u a r d u r c h d i e G e g e n s t r a h l u n g d e r A t m o s p h ä r e z w e i b i s d r e i m a l s o v i e l W ä r m e z u g e f ü h r t a l s d u r c h S o n n e n s t r a h l u n g.

Um den Wärmeschutz der Atmosphäre noch auf andere Weise beurteilen zu können, haben wir die Tabelle II angelegt. Wir bezeichnen als „Strahlungstemperatur“ die Temperatur,

Tabelle II.

N. Breite		0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
1. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	Jahr	365	360	345	321	288,5	250	208
2. Strahlungstemperatur	Jahr	26,5	25,6	23,1	17,1	9,3	— 0,7	— 12,8
3. Gemessene Temperatur	Jahr	25,9	26,3	25,6	20,3	14,0	5,6	— 0,1
4. Δ	Jahr	— 0,6	+ 0,7	+ 2,5	+ 3,2	+ 4,7	+ 6,3	+ 12,7
5. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	Sommerhalbjahr	182,0	193,3	198,5	198,4	193	182,9	169,5
6. Strahungstemperatur	Sommerhalbjahr	26,5	37,8	32,9	32,9	30,7	26,6	21,1
7. Julitemperatur		25,5	27,9	28,1	27,4	23,8	18,1	14,1
8. Sonnenstrahlung in Äquatorealtagen	Winterhalbjahr	182,6	166,9	146,7	122,6	95,6	66,8	38,2
9. Strahlungstemperatur	Winterhalbjahr	26,5	19,1	10,6	— 2,9	— 18,2	— 40	— 73,2
10. Januartemperatur		26,2	23,9	21,7	13,9	3,9	— 7,2	— 16,0

auf welche die Erdoberfläche, graue Strahlung vorausgesetzt, durch die einfallende Sonnenstrahlung gebracht wird (Temperatur des Strahlungsgleichgewichtes). Dauert die Bestrahlung nicht zu kurze Zeit, etwa einige Tage, so würde die Erdoberfläche, da Wärmeleitung in vertikaler und meridionaler Richtung nur eine untergeordnete Rolle spielt, sich auf diese Temperaturen einstellen. Reihe 2 enthält diese Strahlungstemperaturen für die verschiedenen Breiten bei mittlerer jährlicher Bestrahlung. Die beobachteten mittleren Jahrestemperaturen der Atmosphäre sind nur unbedeutend höher, in 50° Breite rund 6°. Für die klimatischen Verhältnisse ist dies ein außerordentlicher Betrag; allein vom thermodynamischen Standpunkte aus, der hier allein maßgebend ist, haben wir mit der absoluten Temperatur zu vergleichen und erhalten so nur eine Differenz von 2°/₀. Der mittlere jährliche Wärmeschutz der Atmosphäre ist demnach sehr klein. Reihe 6 gibt die Strahlungstemperatur für die mittlere Strahlung des Sommerhalbjahres. Selbst die Julitemperaturen liegen tiefer. Im Sommerhalbjahr ist der Wärmeschutz der Atmosphäre negativ.

Überraschend groß ist ihr Wärmeschutz im Winter. Die mittlere Winterstrahlung der Sonne gibt außerordentliche tiefe Strahlungstemperaturen (sie würden für Dezemberstrahlung noch bedeutend tiefer ausfallen), sie liegen bereits in 20° Breite 11° unter der Januartemperatur. Der 50. Breitekreis würde ohne Atmosphäre sich im Laufe des Winters im Durchschnitt auf —40°, der 60. auf —73° C einstellen; die Atmosphäre erhöht diese Temperaturen um 33° resp. 57°. Wir erhalten somit im Winter außerordentlich großen positiven, im Sommer kleinen negativen, im Laufe des Jahres kleinen positiven Wärmeschutz der Atmosphäre. Was sich im großen zwischen Sommer und Winter abspielt, wiederholt sich im kleineren Maßstabe im Laufe von Tag und Nacht.

Den bekannten Untersuchungen Augots über die Verteilung der Sonnenstrahlung mit Berücksichtigung der atmosphärischen Absorption kommt deshalb nur eine eng umgrenzte Bedeutung zu. Sie geben lediglich den Einfluß der Atmosphäre auf die direkte Sonnenstrahlung; je kleiner das Transmissionsvermögen der Atmosphäre, desto mehr werden die höheren Breiten, und der Winter im Verhältnis zum Sommer benachteiligt. Handelt es sich jedoch um die Nutzbarmachung der Sonnenstrahlung für den Erwärmungsprozeß des Erdbodens und dessen Bedeckung, so verhält sich die Sache gerade umgekehrt. Je kräftiger die Atmosphäre emittiert (absorbiert), desto mehr kommt auf diesem Umwege die Sonnenstrahlung den höheren Breiten wenig im Jahr, gewaltig im Winter zugute. Im Sommer ist ihr Wärmeschutz negativ, aber im Winter zehren wir in mittleren und namentlich höheren Breiten von Sonnenstrahlung, die auf dem Umweg über atmosphärische Strahlung zugeführt wird. Der

Umstand, daß durch Gegenstrahlung der Atmosphäre die Strahlungstemperatur der mitteleuropäischen Breiten um 30°—60° heraufgesetzt werden, beweist, daß die Atmosphäre nicht durch Bestrahlung in diesen Breiten ihr großes Strahlungsvermögen empfangen hat. Die allgemeine Zirkulation der Atmosphäre, die infolge der großen Temperaturdifferenzen namentlich im Winter kräftig funktioniert, bringt die in äquatorealen Gebieten mit großen Entropiemengen beladenen, strahlungsfähigen Luftmassen in höheren Breiten. Die allgemeine Zirkulation gleicht, um ein Bild zu gebrauchen, einem gewaltigen Föhn, der in dem tropischen Kalmengürtel aufsteigt, die Passatregion und die Roßbreite überfließt und im Niedersteigen infolge der hohen potentiellen Temperaturen bei mittlerem Gehalte an Wasserdampf zu kräftiger Strahlung befähigt ist.

Um zu entscheiden, ob den höheren Breiten und Landmassen Wärme in erster Linie nur durch Sonnenstrahlung und atmosphärische Strahlung zugeführt wird, haben wir noch den Einfluß der Kondensationsvorgänge zu berücksichtigen. Wenn Wasserdampf kondensiert, werden Entropiemengen verfügbar, so daß Arbeit und Wärmeabgabe bestritten werden könne. Ist die Arbeitsleistung hinreichend klein, so ist, falls die Kondensation bei 0° geschieht, die Wärmeabgabe rund 600 $\frac{\text{Grammkal}}{\text{Gramm}}$ (bei $-10°$, $0°$, $+10° = 613$, 607 resp. 589 Kal.). Nehmen wir eine jährliche Regenhöhe von 120 cm, so liefert die Kondensation täglich rund 200 $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2}$, während die Gegenstrahlung der Atmosphäre rund von 3 fachem Betrage ist. Nun hat aber Brückner[1]) gezeigt, daß jeder Regentropfen durchschnittlich über dem Festlande dreimal niederfällt, ehe er wieder in den Ozean zurückkehrt. Deshalb sind $^2/_3$ der durch Kondensation verfügbaren Wärme dem Festlande selbst während der Verdampfung entnommen. Bei einer jährlichen Regen-

---

[1]) E. Brückner, Über die Herkunft des Regens. Geographische Zeitschrift II, S. 89, 1900.

menge von 120 cm beträgt die durch den dem Ozean entnommenen Wasserdampf zugeführte und durch Kondensation verfügbare Wärmemenge nur etwa 67 $\frac{\text{Grammkal}}{\text{cm}^2\ 24\ \text{St.}}$; also rund 10 % der Gegenstrahlung der Atmosphäre, während über dem Ozean selbst das Verhältnis ungleich kleiner ist. Die Wärmezufuhr durch kondensierenden Wasserdampf ist klein gegenüber der Wärmezufuhr der durch Strahlung in tropischen Gebieten erwärmten, strahlenden Luftmassen.

Den Ausführungen dieses Paragraphen wurde ein konstanter, mittlerer Gehalt der Atmosphäre an Wasserdampf zu Grunde gelegt. Das Absorptiosvermögen der Atmosphäre als Funktion des Gehaltes an Wasserdampf ist viel zu wenig bekannt, um die nach Ort und Zeit so variable Menge desselben mit genügender Sicherheit in Rechnung ziehen zu können. Diese für den Wärmehaushalt der Erde so überaus wichtige Größe kann auf Grund der entwickelten Theorie durch systematische Messungen der Gegenstrahlung der Atmosphäre gewonnen werden.