Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1935. Heft II
Mai-Juli-Sitzung

München 1935
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Strukturprobleme bei reellen Gebilden.

Von Otto Haupt in Erlangen.

Vorgelegt von H. Tietze in der Sitzung vom 1. Juni 1935.

1. Die zu erörternden Fragestellungen sollen zunächst am *einfachsten Beispiele* dargelegt werden, nämlich am Falle der *Bogen* in der *Ebene.*

Dabei möge zuerst auf einen Unterschied des von uns hier eingenommenen Standpunktes gegenüber dem u. a. von Juel und von an ihn anschließenden Autoren[1] hingewiesen werden: In den für uns augenblicklich in Betracht kommenden Arbeiten Juels und anderer handelt es sich nämlich um die Untersuchung von Kurven bzw. Bogen, welche eine *vorgegebene* (lineare) *Ordnung n* besitzen[2]; es ist also a priori eine Ordnung vorgeschrieben und es werden gewissermaßen die Einschränkungen untersucht, welche diese Vorschrift nach sich zieht. Demgegenüber wird in den folgenden Zeilen ein *Bogen* $\mathfrak{B}$ *beliebig vorgegeben* und man sucht unter bevorzugter *Verwendung des Ordnungsbegriffes zu Aussagen (allgemeiner Natur) über das Verhalten von* $\mathfrak{B}$ *zu gelangen.*

Der eben gestellten Aufgabe entsprechend *lokalisieren* wir zunächst den Ordnungsbegriff, führen also den Begriff der „*Ordnung eines Punktes*“ P auf $\mathfrak{B}$ ein, welcher erklärt ist als das

---

[1] Vgl. etwa a) den Bericht von P. Montel, Sur la géométrie finie et les travaux de M. C. Juel, Bull. Sci. math., 2. Ser., Bd. 48, première partie, Paris 1924, S. 109 ff. — b) Bezüglich der in a) noch nicht aufgeführten neueren Arbeiten vgl. etwa Haupt, Zur Theorie der Ordnung usw., Monatsh. f. Math. u. Phys., Bd. 40 (1933), S. 1 ff., sowie weitere, dort noch nicht genannte Arbeiten von J. von Sz. Nagy. — c) Zusatz bei der Korrektur: Über Probleme verschiedener Art, die aus dem Juelschen Gedankenkreise entspringen, vgl. man ferner den (inzwischen zu meiner Kenntnis gelangten) Vortrag von Herrn Hjelmslev, Die graphische Geometrie, Förhandl. Ättonde skandinav. Matematikerkongr., Stokholm 1934.

[2] Die *lineare* Ordnung eines (reellen) Bogens $\mathfrak{B}$ ist gleich der maximalen Mächtigkeit des (reellen) Durchschnittes von $\mathfrak{B}$ mit den (reellen) Geraden der Ebene.

Minimum der Ordnungen aller Umgebungen von P auf $\mathfrak{B}$. Diese Begriffsbildung führt dann von selbst zu einer *ersten Frage*, nämlich der nach der möglichen *Verteilung der Punkte der einzelnen Ordnungen* über den Bogen hin. Durch sehr allgemeine Schlüsse erkennt man[3]: Die Punkte einer vorgegebenen Ordnung n (mit $n \geqq 2$) können nur nirgends dicht auf $\mathfrak{B}$ verteilt sein, falls sie nicht ganze Bogen, also Teilbogen von $\mathfrak{B}$, erfüllen. Letztere Teilbogen bestehen nur aus Punkten der gleichen Ordnung n und sind mithin als *ordnungshomogen* (von der Ordnung n) zu bezeichnen.[4] Somit lautet der gewünschte *Verteilungssatz*:[5] *Jeder Bogen ist Summe aus ordnungshomogenen Bogen und nirgends dicht verteilten Punkten (höherer als zweiter Ordnung).* Gleichwertig damit ist die Aussage: *Jeder* Bogen enthält ordnungshomogene Teilbogen.

Aus dem Verteilungssatze geht bereits hervor, daß es ordnungshomogene Bogen mindestens einer Ordnung wirklich gibt. Es bleibt aber dabei noch die viel schwieriger zu entscheidende erste Existenzfrage offen, nämlich die Frage, *welche* Ordnungen denn bei ordnungshomogenen, im übrigen beliebigen, Bogen wirklich auftreten. Die Antwort erteilt der *Existenzsatz*[6]*: Jeder (ebene) ordnungshomogene Bogen ist entweder von der kleinsten überhaupt möglichen Ordnung, nämlich von der Ordnung zwei, oder von der höchstmöglichen Ordnung, also von der Ordnung unendlich. Übrigens gibt es zu jeder dieser beiden Ordnungen auch wirklich ordnungshomogene Bogen.*

Eine weitere, schon mit der Lokalisierung des Ordnungsbegriffes sich ergebende ist die zweite Existenzfrage: Welche

[3] Vgl. Haupt, Über die Struktur reeller Kurven, Crelles Journal 164 (1931), § 2. Dort auch weitere Literaturangaben. Der a. a. O. gegebene Beweis des Verteilungssatzes gilt — bei geeigneter Modifikation — auch für die übrigen, im folgenden besprochenen Strukturprobleme.

[4] Auch als „primitiv" bezeichnet. Vgl. Fußnote 3 a. a. O.

[5] Auch als „Zerlegungssatz" bezeichnet. Vgl. Fußnote 3 a. a. O.

[6] Vgl. Fußnote 3 a. a. O., § 3. Der Beweis für den Fall endlicher, nicht beschränkter Ordnung ist dort nur skizziert. — Sätze über beliebige ordnungshomogene (ebene) Bogen von unendlicher linearer Ordnung sind, außer in den a. a. O. zitierten Arbeiten von Hjelmslev und Rosenthal, noch enthalten in Kaufmann, B., Über die Konvexitäts- und Konkavitätsstellen auf Jordankurven. Crelles Journal 164 (1931), S. 112 ff.

Ordnungen sind für einzelne (nicht auf ordnungshomogenen Bogen gelegene) Punkte überhaupt möglich? Die Antwort ist enthalten im *Punkt-Existenzsatz*[7]*: Es gibt Punkte jeder vorgegebenen Ordnung* $n \geqq 2$.

Damit dürften die am nächsten gelegenen Aussagen gewonnen sein, welche sich vom Standpunkte des hier zugrunde gelegten Ordnungsbegriffes über die ebenen Bogen machen lassen. Diese Aussagen sind im wesentlichen lokaler Natur und können als *Aussagen über die Struktur eines beliebigen ebenen Bogens, und zwar bezüglich der linearen*[2] *Ordnung*, bezeichnet werden.

2. Wie soeben hervorgehoben, ist das hier zur Diskussion stehende Strukturproblem von relativem Charakter, insofern nämlich der Begriff der *linearen* Ordnung in die Fragestellung wesentlich eingeht. Dieser Umstand eröffnet den Weg zu mannigfachen Abänderungen; man braucht ja nur den Begriff der linearen Ordnung durch irgendeinen anderen Ordnungsbegriff zu ersetzen. Als nächstliegende erwähnen wir die Ersetzung der linearen durch die zyklische Ordnung.[8] Der *Verteilungssatz* gilt (nach Beweis und Inhalt) unverändert für den Fall der zyklischen Ordnung. Hingegen bereitet der *Existenzsatz* erheblich größere Schwierigkeiten als im Falle der linearen Ordnung; vor allem, wenn man *auf jegliche Differenzierbarkeitsannahmen verzichtet*, was auch hier (wie in Nr. 1) verlangt wird. Neuerdings ist es gelungen, besagten Existenzsatz zu erledigen. Es ergibt sich – ganz entsprechend wie im Falle der linearen Ordnung –: *Zyklisch-ordnungshomogene Bogen können nur für die zyklischen Ordnungen drei und unendlich existieren, also wiederum nur für die kleinstmögliche und die größtmögliche zyklische Ordnung. Und es existieren zu jeder dieser beiden Ordnungen auch wirklich ordnungshomogene Bogen.*[9]

---

[7] Vgl. Fußnote 1, b a. a. O., Nr. 7, 2.

[8] Die „*zyklische*" Ordnung ist gleich der maximalen Mächtigkeit des Durchschnittes des betrachteten Bogens mit den Kreisen der Ebene. Rechnen wir, wie es hier geschehen soll, die Geraden zu den Kreisen, so ist jeder Bogen höchstens von der linearen Ordnung k, sobald er die zyklische Ordnung k besitzt; es sind also z. B. für Bogen der linearen Ordnung zwei im allgemeinen noch verschiedene zyklische Ordnungen denkbar, was einer gewissen Verfeinerung der Untersuchung gleichkommt.

[9] Der Beweis erscheint in den Monatsheften für Math. u. Phys.

In diesem Zusammenhange sei noch bemerkt, daß der für zyklische Ordnung gefundene Beweis des Existenzsatzes es gestatten wird, allgemeiner den Existenzsatz für K_k-Ordnungen in der Ebene zu erledigen, also für Ordnungsbegriffe, bei welchen die Geraden bzw. Kreise ersetzt sind durch Kurven, deren jede durch k Punkte eindeutig festgelegt ist und welche überdies noch gewisse Stetigkeits-, Glattheits- usw. Eigenschaften besitzen.[10]

3. Den bisher besprochenen Strukturproblemen war gemeinsam einerseits das Festhalten an der Ebene, also am Operationsbereich, andererseits die Beibehaltung der Bogen als der Untersuchungsobjekte. Unterschiede bestanden nur hinsichtlich der Ordnungscharakteristiken, d. h. derjenigen Gebilde (Geraden, Kreise, K_k-Kurven), durch deren maximalmächtige Durchschnitte mit dem gegebenen Bogen jeweils dessen Ordnung bestimmt wurde. Wir gewinnen neue Probleme durch *Wechsel des Operationsbereiches*, beispielsweise durch Übergang zum (euklidischen oder projektiven) Raume R_n. Behalten wir gleichzeitig die *Bogen* als *Objekte* bei, so wird ein Wechsel der *Ordnungscharakteristiken* unvermeidlich; wir wählen hier als solche die ((n—1)-dimensionalen) *Hyperebenen*: „Lineare Ordnung" im R_n.[11] Wieder gilt der Verteilungssatz und wieder wird das nächste Interesse auf den Inhalt des *Existenzsatzes* gerichtet sein. Es scheint nun, daß mit dem für den Fall der zyklischen bzw. K_k-Kurven in der Ebene geführten Beweise bereits wesentliche Schwierigkeiten beseitigt sind, welche der Erledigung der Frage für die Bogen im R_n entgegenstehen.[12] Es kann daher die Vermutung ausgesprochen werden, daß auch im R_n die linear-ordnungshomogenen Bogen nur die Ordnung n und unendlich besitzen können.[13]

---

[10] Vgl. auch Fußnote 1b a. a. O.

[11] Man könnte statt dessen auch andere „Hyperflächen" wählen, z. B. die Hyperkugeln („sphärische" Ordnung; vgl. Math. Zeitschr. 37 [1933], S. 589 ff.; ferner [Zusatz bei der Korrektur] Hjelmslev, J., Introduction à la théorie des suites monotones, Overs. over det kgl. Danske vidensk. selskabs Forhandl. 1914, Nr. 1, S. 68).

[12] Unter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen ist die Frage erledigt. Vgl. Crelles Journal 169 (1933), S. 177 ff.

[13] Die Frage, ob jeder ordnungshomogene Bogen beschränkter Ordnung

4. Noch in einer dritten Richtung läßt sich das Strukturproblem abändern, nämlich durch *Wechsel der Untersuchungsobjekte.* Indem wir beispielsweise den R_n als Operationsbereich beibehalten, können wir *k-dimensionale Mannigfaltigkeiten*[14] M_k als Objekte wählen und dabei als Ordnungscharakteristiken die linearen, $(n-k)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten L_{n-k} des R_n verwenden. $(1 \leqq k \leqq n-1)$. Einfachste Fälle: I. n beliebig, $k=1$: Bogen im R_n mit den Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken; II. $n=3$, $k=2$: Flächen im R_3 mit den Geraden als Ordnungscharakteristiken.

Auch hier gilt der *Verteilungssatz*; dabei treten an Stelle der ordnungshomogenen Teilbogen jetzt ordnungshomogene k-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten von M_k. Eine Erledigung des einschlägigen *Existenzsatzes* in voller Allgemeinheit, also *ohne* Heranziehung einschränkender Annahmen (z. B. ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen), steht noch aus; hierfür dürfte unter anderem eine eingehende Untersuchung der ordnungshomogenen M_k erforderlich sein, z. B. hinsichtlich ihres „differentiellen Verhaltens" (Vorhandensein von Tangentialräumen usw.).[15] Übrigens sind bereits gewisse Anhaltspunkte vorhanden bezüglich der Änderungen, welche beim Existenzsatz für die M_k gegenüber dem für Bogen zu erwarten sind. Zunächst gibt es nämlich (sogar algebraische) Beispiele von ordnungshomogenen M_k im R_n mit jeder der Ordnungen $(n-k+1)$ bis $(k(n-k)+1)$ einschließlich.[16] Sodann läßt sich zeigen, daß unter gewissen Differenzierbarkeitsannahmen gar keine anderen Ordnungen bei ordnungshomogenen M_k auftreten können; dabei ist von gewis-

---

im R_n von n-ter Ordnung ist, ist auch für andere Untersuchungen von einem gewissen Interesse. Vgl. A. Rosenthal, Über die Nichtexistenz von Kontinuen in gewissen Mengen mit einziger Ordnungszahl, Sitz.-Ber. Heidelberger Ak. 1934, Abh. 13.

[14] Unter einer M_k verstehe man hierbei das eindeutige stetige Bild etwa eines k-dimensionalen Würfels.

[15] Für den Fall $k=1$ vgl. man auch diese Sitz.-Ber., Jahrg. 1934, S. 191 ff. Zusatz bei der Korrektur: Der a. a. O. zitierte und benutzte „verschärfte Stetigkeitssatz" ist, wie ich jetzt bemerkte, schon von Herrn Hjelmslev (vgl. Fußnote 11, a. a. O.) bewiesen worden. — Bezüglich allgemeiner Differenzierbarkeitsfragen vgl. ferner Fußnote 1c, Hjelmslev a. a. O.

[16] Vgl. Sitz.-Ber. d. phys.-med. Sozietät Erlangen, Bd. 65 (1934), S. 95/96.

sen M_k spezieller Natur abzusehen, welche als Verallgemeinerungen der geradlinigen Flächenstücke ($n = 3$, $k = 2$) aufgefaßt werden dürfen.[16] Angesichts der bei den bisher behandelten Beispielen gemachten Erfahrungen ist zu vermuten, daß im allgemeinen, also von Differenzierbarkeits- und ähnlichen Voraussetzungen freien Falle an ordnungshomogenen Mannigfaltigkeiten nur noch solche von der Ordnung unendlich neu hinzutreten.[16a]

5. Bei den in Nr. 2 bis 4 erwähnten Strukturproblemen blieb noch unerörtert die zweite Existenzfrage, nämlich die Frage nach der Existenz von *einzelnen Punkten* beliebig vorgegebener Ordnung (vgl. den *Punktexistenzsatz* der Nr. 1). In dieser Richtung ist bisher wenig bekannt. Von Teilergebnissen bei zyklischer Ordnung abgesehen[7] ist neuerdings die Untersuchung der sog. „elementaren Punkte" auf Bogen im R_n in Angriff genommen worden.[17] Unter einem elementaren Punkt P des Bogens $\mathfrak{B}$ wird dabei jeder Punkt verstanden, dessen einseitige Umgebungen auf $\mathfrak{B}$ (ordnungshomogene) Bogen der Ordnung n sind.

6. Zum Schlusse sei noch auf ein hier anschließendes, aber andersartiges Problem hingewiesen. Wir meinen die Frage nach dem Verlauf der ordnungshomogenen Gebilde im großen. Ein hierher gehöriger Satz ist z. B. der über die ordnungsfeste Erweiterbarkeit der (ordnungshomogenen) Bogen n-ter Ordnung im R_n, welcher (ohne Beweis) zuerst von Juel ausgesprochen wurde.[18, 19]

[16a] Noch andere Strukturprobleme z. B. diese Sitz.-Ber. Jahrgang 1932, S. 71 ff.

[17] Durch Herrn F. Denk, welcher über die von ihm bisher erzielten Ergebnisse an anderer Stelle berichten wird.

[18] Vgl. Crelles Journal 170 (1934), S. 154 ff. — In der dort, Fußnote 4, erwähnten brieflichen Mitteilung hat Herr Juel übrigens auch die Frage nach der ordnungsfesten Erweiterbarkeit der Flächenstücke dritter Ordnung im R_3 aufgeworfen.

[19] Im Falle zyklischer Ordnung gibt es Bogen der niedrigsten Ordnung (drei), welche in bestimmtem Sinne nicht mehr ordnungsfest erweitert werden können. Der im Text erwähnte Erweiterungssatz gilt also in dem gemeinten Sinne nicht für jedes Ordnungsproblem. Zusatz bei der Korrektur: Vgl. aber zu dieser Frage Fußnote 1c, Hjelmslev a. a. O.