

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

**K. B. Akademie der Wissenschaften**

zu München.

---

Band XXXIII. Jahrgang 1903.

---

**München.**

Verlag der K. Akademie.

1904.

---

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

## Das Rückwärtseinschneiden im Raum.

Von **S. Finsterwalder** und **W. Scheufele**.

(Eingelaufen 7. November.)

Zu den in der geodätischen Praxis am häufigsten gelösten Aufgaben gehört zweifellos das nach Pothenot (1692) benannte und auf Willebrod Snellius (1617) zurückgehende Problem des Rückwärtseinschneidens. Dasselbe ist ein Problem der ebenen Geometrie, welches sich folgendermassen formulieren lässt: In der Ebene sind eine Anzahl (ein Haufen) von  $n$  Punkten (Fixpunkten) gegeben; von einem weiteren Punkt (Standpunkt) sind Strahlen nach den Fixpunkten gezogen, und das von ihnen gebildete Strahlenbüschel ist durch Messung der Winkel der Strahlen gegeneinander festgelegt. Es soll die Lage des Standpunktes ermittelt werden. Die Lösung dieser Aufgabe erfolgt in zwei Teilen. Da drei Fixpunkte  $P$  und das Büschel der drei zugehörigen Strahlen vom Standpunkt aus im allgemeinen hinreichen, um den Standpunkt festzulegen, so wird zunächst aus drei passend gewählten Fixpunkten und den zugehörigen Strahlen des Büschels eine Lage des Standpunktes (Näherungslage) bestimmt. Ergänzt man das Büschel der drei Strahlen durch die übrigen Strahlen, so werden dieselben infolge der unvermeidlichen Messungsfehler nicht genau durch die entsprechenden Fixpunkte hindurchgehen und es entsteht nun die Aufgabe, durch kleine Verrückung des Standpunktes und Veränderung des Strahlenbüschels ein genaues Einpassen des letzteren in den Haufen der Fixpunkte herbeizuführen. Dabei verfährt man im Anschluss an Gauss (1823) nach dem

Grundsatz, dass die Summe der Quadrate der Richtungsänderungen der Strahlen des Büschels, oder auch der Änderungen der Winkel, die sie untereinander einschliessen, zu einem Minimum gemacht wird. Es ist dabei offenbar vorausgesetzt, dass die Lage der Fixpunkte gegeneinander ungleich genauer ist, als die Messung der Winkel. Würde man, was in der Tat manchen Verhältnissen in der Praxis mehr Rechnung trägt, die gemessenen Winkel als unbedingt richtig, dagegen die Lage der Fixpunkte gegeneinander als weniger genau annehmen, so wäre offenbar eine Ausgleichung vorzuziehen, bei welcher die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den Strahlen des Büschels ein Minimum wird, wobei das Strahlenbüschel seine Form ungeändert beibehält. In diesem Falle sind bei der Ausgleichung drei Grössen zu bestimmen, nämlich die Koordinatenverschiebungen des Standpunktes und der Winkel, um welchen das Strahlenbüschel gedreht wird. Beide Methoden der Ausgleichung lassen sich als Sonderfälle einer dritten auffassen, bei welcher an dem Grundsatz festgehalten wird, dass die Koordinatenverschiebungen des Standpunktes und die Drehung des Strahlenbüschels so erfolgen, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den Strahlen, jeweils multipliziert mit passenden Gewichten, zu einem Minimum gemacht wird. Wählt man als Gewichte die Quadrate der reziproken Werte der Strahlenlängen, so kommt man auf das erste Ausgleichungsprinzip; wählt man sie gleich 1, so folgt das zweite.

Wie ausgedehnt auch die Literatur über das so formulierte ebene Problem des Rückwärtseinschneidens ist, so findet man kaum einen Versuch, dasselbe auf den Raum zu erweitern, wie naheliegend ein solcher Gedanke vom geometrischen Standpunkt aus erscheinen mag. Es hat das darin seinen Grund, dass eine solche räumliche Erweiterung der praktischen Verwendbarkeit, welche das ebene Problem so sehr auszeichnet, zu entbehren scheint. Durch die Einführung der Photographie in die Geodäsie wird aber auch das räumliche Problem einer gewissen Anwendung fähig, wie in den nachfolgenden Zeilen auseinandergesetzt werden soll. Das räumliche Problem möge dabei

folgendermassen formuliert werden: Es ist eine Anzahl (ein Haufen) von Fixpunkten im Raum gegeben. Das Bündel von Strahlen, welche von einem Standpunkt aus nach den Fixpunkten führen, sei durch Messung bekannt. Man soll die Lage des Standpunktes finden. Die Photographie setzt uns nämlich in den Stand, von einem Punkt aus ein Bündel von Strahlen auf einmal festzulegen; dazu ist nur nötig, dass man die sogenannte innere Orientierung<sup>1)</sup> der betreffenden Photographie kennt. Darunter versteht man die relative Lage des perspektivischen Zentrums gegenüber der Photographie, welche am einfachsten durch die Bildweite, nämlich die Entfernung jenes Zentrums von der Ebene der Photographie, und den Hauptpunkt oder den Fusspunkt des Lotes von jenem Zentrum auf die Ebene der Photographie gegeben wird.<sup>2)</sup> Kurz gefasst kann man das Problem so ausdrücken: Von einem bekannten Objekt ist eine Photographie mit innerer Orientierung gegeben; es soll der Standpunkt, von dem aus die Photographie aufgenommen wurde, wieder gefunden werden. Auch diese Aufgabe löst man am besten in zwei Teilen. Es genügen hier wieder drei Fixpunkte und das aus den drei zugehörigen Strahlen gebildete Bündel zur Auffindung des Standpunktes. Ist eine grössere Zahl von Fixpunkten und Strahlen gegeben, so wird man zuerst aus drei passend gewählten Punkten und Strahlen eine Näherungslage des Standpunktes suchen und diesen sowie die Strahlen des Bündels so verändern, dass ein möglichst genaues Einpassen des Strahlenbündels in den Haufen der Fixpunkte erzielt wird. Man wird dabei, entsprechend der vorhin erwähnten Formulierung des ebenen Problems, am besten von dem Grundsatz ausgehen, die Verschiebung des Standpunktes und die Drehung des Strahlenbündels so zu bestimmen, dass die Summe der Quadrate der Abstände der Fixpunkte von den Strahlen des gedrehten Bündels (allenfalls noch multipliziert

<sup>1)</sup> Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. VI, 2, Seite 8.

<sup>2)</sup> Dieses Lot soll künftighin als die optische Axe des photographischen Apparates bezw. der orientierten Photographie bezeichnet werden.

mit passenden Gewichten) zu einem Minimum wird. Bei der photogrammetrischen Anwendung des Problems werden im allgemeinen die Fehler in der Identifizierung der photographischen Punkte mit den Kartenpunkten erheblich grösser sein als die Messungsfehler auf der Photographie selbst. In diesem Falle wird man die erwähnten Gewichte gleich 1 setzen, und also die Summe der Quadrate der kürzesten Abstände, die im wesentlichen durch die Fehler der Identifizierung bedingt sind, zu einem Minimum machen. Hat man Grund, bei einzelnen Fixpunkten grosse Fehler der Identifizierung zu vermuten, so könnte man diesem Umstand durch Einführung geschätzter Gewichte Rechnung tragen.

Der erste Teil der Aufgabe des räumlichen Rückwärtseinschneidens ist bereits in den geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie<sup>1)</sup> behandelt worden. Die unmittelbare Veranlassung, uns mit dem zweiten Teil, nämlich der systematischen Ausgleichung, zu beschäftigen, gab eine Ballonphotographie aus den Alpen, welche gelegentlich einer wissenschaftlichen Hochfahrt des Münchener Vereins für Luftschiffahrt, die über 7000 m emporführte, von Herrn Professor K. Heinke am 21. Februar 1903 gewonnen wurde. Dieselbe bildet die Grundlage des Rechenbeispielles, welches unsere Ausführungen illustrieren soll. Vorher mögen noch der Vollständigkeit halber die früheren Ausführungen über die Lösung des ersten Teiles der Aufgabe wiederholt werden.

## I.

Durch den Hauptpunkt  $A$  in der Ebene des photographischen Bildes sollen beliebige zwei zu einander senkrechte Linien als Koordinatenachsen gezogen und nach ihnen die Bilder  $P'_1 P'_2 P'_3 \dots$  der Fixpunkte  $P_1 P_2 P_3 \dots$  festgelegt werden (Fig. 1). Der zu suchende Standpunkt sei mit  $O$  bezeichnet. Das Dreikant

---

<sup>1)</sup> S. Finsterwalder, Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresbericht der Mathematikervereinigung, Bd. VI, 2, pag. 26 ff.

$O P_1 P_2 P_3$  lässt sich aus der Photographie und den inneren Orientierungselementen berechnen. Bezeichnen wir mit  $(O)$  das zur Photographie gehörige perspektivische Zentrum, so ist jenes Dreikant dem Dreikant  $(O) P'_1 P'_2 P'_3$  kongruent. Wir bezeichnen zur Abkürzung die Kanten des Tetraeders

$$P_2 P_3 = a, P_3 P_1 = b, P_1 P_2 = c, P_1 O = l, P_2 O = m, P_3 O = n,$$

ferner die Winkel

$$P_1 O P_2 = P'_1(O) P'_2 = \gamma, P_2 O P_3 = P'_2(O) P'_3 = \alpha, P_3 O P_1 = P'_3(O) P'_1 = \beta;$$

dann gelten die Gleichungen:

$$1) \quad \begin{cases} a^2 = m^2 + n^2 - 2 m n \cos \alpha \\ b^2 = n^2 + l^2 - 2 n l \cos \beta \\ c^2 = l^2 + m^2 - 2 l m \cos \gamma, \end{cases}$$

aus welchen man das Verhältnis  $l : m : n$  folgendermassen berechnen kann:

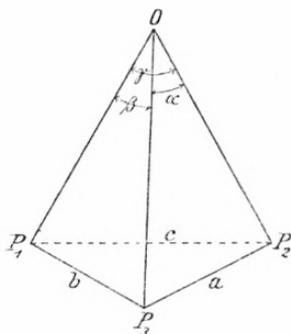
Durch Kombination der beiden ersten Gleichungen bzw. der ersten und dritten Gleichung erhält man:

$$\left. \begin{aligned} m^2 b^2 + n^2 (b^2 - a^2) - l^2 a^2 - 2 m n b^2 \cos \alpha + 2 n l a^2 \cos \beta &= 0 \\ n^2 c^2 + m^2 (c^2 - a^2) - l^2 a^2 - 2 m n c^2 \cos \alpha + 2 m l a^2 \cos \gamma &= 0, \end{aligned} \right\} 2)$$

welche man nach Division mit  $l^2$  als zwei quadratische Gleichungen für die Verhältnisse  $\frac{m}{l}$  und  $\frac{n}{l}$  auffassen kann. Anstatt

nun durch Elimination eines der beiden Verhältnisse eine Gleichung 4. Grades für das andere Verhältnis zu bilden, kann man diese beiden Gleichungen auch so mittels eines Faktors  $\lambda$  linear kombinieren, dass das Resultat der Kombination in zwei Linearfaktoren zerfällt. Zu diesem Behufe muss man den Faktor  $\lambda$  so wählen, dass er folgender in Determinantenform geschriebenen Gleichung 3. Grades genügt:

Fig. 1.



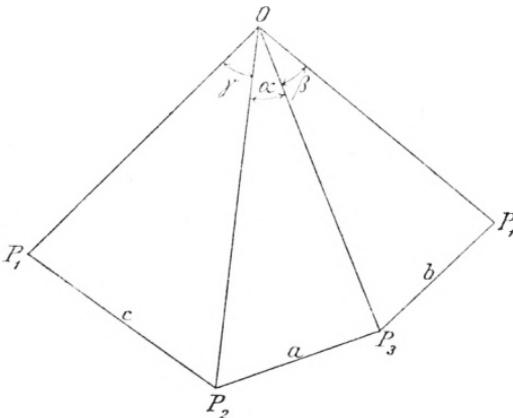
$$\begin{vmatrix} b^2 - \lambda(c^2 - a^2) & (-b^2 + \lambda c^2) \cos \alpha & -\lambda a^2 \cos \gamma \\ (-b^2 + \lambda c^2) \cos \alpha & b^2 - a^2 - \lambda c^2 & a^2 \cos \beta \\ -\lambda a^2 \cos \gamma & a^2 \cos \beta & -a^2(1 - \lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

Ausgerechnet lautet die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = & \lambda^3 c^2 (c^2 \sin^2 \alpha - a^2 \sin^2 \gamma) \\ & + \lambda^2 (a^2 \sin^2 \gamma [b^2 - a^2] - c^2 \sin^2 \alpha [2b^2 + c^2] + 2a^2 c^2 [1 - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma]) \\ & + \lambda (a^2 \sin^2 \beta [a^2 - c^2] + b^2 \sin^2 \alpha [b^2 + 2c^2] - 2a^2 b^2 [1 - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma]) \\ & + b^2 (a^2 \sin^2 \beta - b^2 \sin^2 \alpha). \end{aligned}$$

Jeder Wurzel  $\lambda$  entspricht eine Kombination der 2 Gleichungen, deren Zerfällung in 2 Linearfaktoren die Auflösung einer quadratischen Gleichung nötig macht. Die Kombination eines jeden der Linearfaktoren mit einer der beiden Gleichungen (2) ergibt die gesuchten Seitenverhältnisse. Das Verfahren ist analog der Berechnung der Schnittpunkte zweier Kegelschnitte mit Hilfe der zerfallenden Kegelschnitte des Büschels, das sie bilden. Bei der Auswahl der Wurzeln ist der Umstand in Betracht zu ziehen, dass man von vornherein

Fig. 2.



über die Reihenfolge der Grössen  $l, m, n$  aus der

Photographie unterrichtet ist. An Stelle der etwas langwierigen analytischen Lösung wendet man besser folgendes geometrisches Näherungsverfahren an. Man schneidet das Dreieck an einer Kante ( $l$ ) auf und breitet es in die Ebene aus. In die drei Winkel  $\alpha, \beta, \gamma$  passt

man nun durch Probieren die drei Strecken  $a, b, c$  (am einfachsten mit Hilfe eines dreifüssigen Zirkels, dessen Spitzen

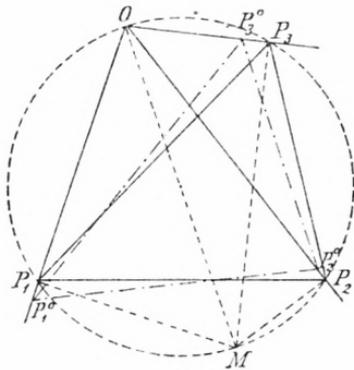
man auf die 3 Strecken  $a, b, c$  einstellt) so ein, dass die aufgeschchnittene Kante auf beiden Seiten gleich lang erscheint. Auf diese Weise erhält man auf jeden Fall einen Näherungswert für die letztere. Man kann dann die ebene Figur mit dem Näherungswert  $l$  und den Gegenseiten  $a, b, c$  sowie den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  unter Benützung logarithmischer Differenzen durchrechnen und auf diese Weise eine Korrektur für den Näherungswert so ermitteln, dass das Tetraeder beim Zusammenlegen sich schliesst. Die weitere Konstruktion des Grundrisses und Aufrisses des Standpunktes erfolgt nach bekannten Regeln der darstellenden Geometrie, oder, wenn man die Rechnung vorzieht, mittels Auflösung einiger sphärischer Dreiecke.

Bei der Auswahl der 3 Punkte  $P_1 P_2 P_3$ , welche zur Auffindung des Näherungsortes von  $O$  benützt werden, ist zu bedenken, dass diese Auffindung ähnlich wie beim ebenen Pothenot'schen Problem unter Umständen unmöglich wird. Es gibt nämlich als Gegenstück zu dem

gefährlichen Kreis durch die drei Punkte beim ebenen Problem auch hier einen geometrischen Ort, bestehend aus einem Kreiszyylinder, der den genannten Kreis als Hauptschnitt hat und dessen Punkte durch Rückwärtseinschneiden nach den 3 Fixpunkten nicht bestimmt werden können. Um den gefährlichen Ort in unserem Fall festzulegen, bedienen wir uns kinematischer Vorstellungen. Wir denken uns

das Dreikant in das Dreieck eingepasst. Wenn dabei dem Dreieck gegenüber dem Dreikant noch eine unendlich kleine Beweglichkeit zukommt, so liegt die Spitze des Dreikants in dem gefährlichen Ort. Es sei  $P_1 P_2 P_3$  das Dreieck,  $O$  die Projektion der Spitze des Dreikants auf die Ebene  $P_1 P_2 P_3$ . Wir schneiden nun das Dreikant mit einer zur Projektionsebene  $P_1 P_2 P_3$  unendlich benachbarten Ebene. Es sei  $P_1^0 P_2^0 P_3^0$  die

Fig. 3.



Projektion des Schnittdreieckes. Die Seiten der Projektion können sich nur um ein Unendlichkleines der 2. Ordnung von ihren wahren Längen unterscheiden, sobald der Winkel der beiden Dreiecksebenen unendlich klein von der 1. Ordnung ist. Wenn es also, wie im Fall des gefährlichen Ortes, zwei unendlich benachbarte kongruente Schnittdreiecke gibt, so muss  $P_1^0 P_2^0 P_3^0$  bis auf Größen zweiter Ordnung mit  $P_1 P_2 P_3$  kongruent sein. Durch Drehung um eine zur Projektionsebene  $P_1 P_2 P_3$  vertikale Axe kann man dann das Dreieck  $P_1^0 P_2^0 P_3^0$  immer zur Deckung mit  $P_1 P_2 P_3$  bringen. Das zugehörige Momentanzentrum  $M$  wird gefunden, indem man in den Punkten  $P_1 P_2 P_3$  Lote auf  $P_1 O, P_2 O, P_3 O$  errichtet. Diese drei Lote müssen sich in  $M$  schneiden, was nur dann möglich ist, wenn  $P_1 P_2 P_3$  auf einem Kreis mit dem Durchmesser  $OM$  liegen. Die Spitze des Dreikantes liegt alsdann auf dem geraden Kreiszylinder, der sich über dem Umkreis des Dreiecks  $P_1 P_2 P_3$  erhebt.

Denkt man sich zu dem Dreikant  $O P_1 P_2 P_3$  noch die Vertikale durch  $O$  als vierten Strahl hinzugefügt und dasselbe dann mit dem kongruenten Dreikant  $(O) P_1' P_2' P_3'$  zur Deckung gebracht, so wird der vierte Strahl die Bildebene im Punkte  $N$  (Nadir, bezw. Zenith<sup>1)</sup>) schneiden; dieser Punkt  $N$  ist nichts anderes als der Fluchtpunkt der Vertikalen. Seine Koordinaten können durch Auflösung einer Reihe sphärischer Dreiecke ohne Schwierigkeit berechnet werden. In ähnlicher Weise denkt man sich dem Dreikant  $(O) P_1' P_2' P_3'$  die optische Axe  $(O) A$  hinzugefügt und dann das genannte Dreikant mit dem Dreikant  $O P_1 P_2 P_3$  zur Deckung gebracht. Die Lage, welche dabei die optische Axe im Raum annimmt, kann ebenso berechnet und durch Horizontal- und Vertikalwinkel oder auch durch die 3 Richtungscosinus im Raumkoordinatensystem der Fixpunkte festgelegt werden.

---

<sup>1)</sup> Je nachdem das Lot (optische Axe) vom perspektivischen Zentrum zur Bildebene nach unten oder nach oben geneigt ist.

## II.

Für den weiteren Verlauf der Rechnung legt man ein neues Koordinatensystem in der Bildebene zu Grunde, dessen  $Y$ -Axe in der Richtung  $NA$  liegt, und dessen  $X$ -Axe durch die Senkrechte hiezu im Punkt  $A$  gegeben ist. Auf dieses Koordinatensystem werden nun sämtliche Bildpunkte bezogen. Mit Hilfe dieser neuen Koordinaten und der vorhin im Raum festgelegten Richtung der optischen Axe lassen sich sowohl die Horizontal- und Vertikalwinkel als auch die Richtungs-cosinus sämtlicher Strahlen nach den Bildpunkten berechnen, oder auch durch Zeichnung ermitteln.

Um die Bedingungen für das möglichste Zusammenstimmen des Strahlenbündels mit dem Haufen der Fixpunkte abzuleiten, bedienen wir uns der Vektorrechnung.<sup>1)</sup> Die Einheitsvektoren auf den Strahlen vom Näherungspunkt  $O$  aus nach den Bildpunkten werden mit  $b_1, b_2, b_3 \dots b_i$  bezeichnet; ihre Komponenten sind die soeben ermittelten Richtungs-cosinus  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ . Die Vektoren, welche von demselben Punkte  $O$  nach den Fixpunkten laufen, mögen  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3 \dots \mathfrak{A}_i$  und ihre Komponenten  $X_i, Y_i, Z_i$  heissen. Man erteilt nun dem Strahlenbündel der  $b_i$  durch  $O$  eine kleine Drehung, die wir durch den Vektor  $u$  mit den Komponenten  $u, v, w$  ausdrücken; die Vektoren  $b_i$  gehen dabei über in  $b_i + u \times b_i$ . Wir erteilen ferner dem Näherungspunkt  $O$  eine kleine Verschiebung  $\mathfrak{X}$  mit den Komponenten  $x, y, z$ ; dadurch gehen die Vektoren  $\mathfrak{A}_i$  in  $\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}$  über. Das äussere Produkt  $[\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times [b_i + u \times b_i]$  stellt einen Vektor dar, dessen Länge dem Abstand des Fixpunktes vom zugehörigen Strahl gleich ist. Multipliziert man denselben auf innere Art mit sich selbst, so bekommt man das Quadrat jenes Abstandes. Wir bilden nun die Summe über die Quadrate aller Abstände und machen dieselbe durch geeignete Wahl von  $\mathfrak{X}$  und  $u$  zu einem Minimum. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die Grössen  $\mathfrak{X}$  und  $u$  als klein zu gelten haben und ihre Quadrate gegenüber den ersten Potenzen zu vernachlässigen sind.

<sup>1)</sup> Bezüglich der Bezeichnung vergleiche man Wilson-Gibbs: Vektoranalysis, Newyork 1901.

$$\begin{aligned}
 S &= \sum_1^n ([\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times [\mathfrak{b}_i + \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i])^2 \\
 &= \sum_1^n (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i])^2 = \text{Minimo.} \quad 3)
 \end{aligned}$$

Um die Bedingung dafür zu erhalten, rechnen wir die Veränderung, welche die Summe erleidet, wenn  $\mathfrak{X}$  um  $d\mathfrak{X}$  bzw.  $\mathfrak{U}$  um  $d\mathfrak{U}$  geändert wird.

$$\begin{aligned}
 &- 2 \sum_1^n (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]) \cdot d\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i \\
 &= - 2 d\mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]] \\
 &= - 2 d\mathfrak{X} \cdot (\sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] - \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] + \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]])
 \end{aligned}$$

Ebenso:

$$\begin{aligned}
 &2 \sum_1^n (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]) \cdot \mathfrak{A}_i \times [d\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i] \\
 &= 2 \sum (d\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i) \cdot (-\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] + \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] - \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]) \\
 &= 2 d\mathfrak{U} \cdot (\sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i]] + \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i]] \\
 &\quad - \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]]).
 \end{aligned}$$

Da ein inneres Produkt nur dann für alle Werte des einen Faktors (hier  $d\mathfrak{X}$  bzw.  $d\mathfrak{U}$ ) verschwindet, wenn der andere Faktor Null ist, so ergeben sich die nachstehenden zwei Bedingungsgleichungen 4 und 5 für die Vektoren  $\mathfrak{X}$  und  $\mathfrak{U}$ . In denselben sind bereits folgende Vereinfachungen durch Weglassung von Gliedern 2. Ordnung angebracht, die durch den Umstand, dass die Richtungen der Vektoren  $\mathfrak{A}_i$  und  $\mathfrak{b}_i$  sich nur sehr wenig unterscheiden, gerechtfertigt sind:  $\mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{b}_i = A_i$  und  $\mathfrak{A}_i = A_i \mathfrak{b}_i$ . Dabei bedeutet  $A_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}$  die Länge des Vektors  $\mathfrak{A}_i$ . Im Produkt  $\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i$  darf dagegen  $\mathfrak{A}_i$  nicht durch  $A_i \mathfrak{b}_i$  ersetzt werden, da dies Vernachlässigung von Grössen 1. Ordnung zur Folge hätte.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Bei diesen Umformungen werden wiederholt die Formeln benützt:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \times \mathfrak{C} &= \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{C} \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} = 0; \\
 \mathfrak{A} \times [\mathfrak{B} \times \mathfrak{C}] &= \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \mathfrak{C},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] - \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] + \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]] \\
 = & \Sigma \mathfrak{A}_i - \Sigma \mathfrak{b}_i \mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{b}_i - n \mathfrak{X} + \Sigma \mathfrak{b}_i \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i = 0. \quad 4) \\
 & - \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i]] + \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i]] - \Sigma \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]] \\
 = & + \Sigma A_i \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i]]] \\
 = & \Sigma A_i \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \Sigma A_i \mathfrak{b}_i - \Sigma A_i \mathfrak{b}_i \times [A_i \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_i] \\
 = & \Sigma A_i \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} \times \Sigma A_i \mathfrak{b}_i - \mathfrak{U} \Sigma A_i^2 + \Sigma A_i^2 \mathfrak{b}_i \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{b}_i = 0. \quad 5)
 \end{aligned}$$

Geht man von den Vektoren zu den Koordinaten über, so entstehen aus jeder der zwei Vektorengleichungen 4 und 5 drei Koordinatengleichungen, die nachstehendes System zur Bestimmung der Werte von  $u, v, w, x, y, z$  liefern:<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned}
 +u \Sigma A^2(1-a^2) - v \Sigma A^2 a \beta - w \Sigma A^2 a \gamma - y \Sigma A \gamma + z \Sigma A \beta + \sigma_1 &= 0 \\
 -u \Sigma A^2 a \beta + v \Sigma A^2(1-\beta^2) - w \Sigma A^2 \beta \gamma + x \Sigma A \gamma - z \Sigma A a + \sigma_2 &= 0 \\
 -u \Sigma A^2 a \gamma - v \Sigma A^2 \beta \gamma + w \Sigma A^2(1-\gamma^2) - x \Sigma A \beta + y \Sigma A a + \sigma_3 &= 0 \\
 +v \Sigma A \gamma - w \Sigma A \beta + x(n - \Sigma a^2) - y \Sigma a \beta - z \Sigma a \gamma + \sigma_4 &= 0 \\
 -u \Sigma A \gamma + w \Sigma A a - x \Sigma a \beta + y(n - \Sigma \beta^2) - z \Sigma \beta \gamma + \sigma_5 &= 0 \\
 +u \Sigma A \beta - v \Sigma A a - x \Sigma a \gamma - y \Sigma \beta \gamma + z(n - \Sigma \gamma^2) + \sigma_6 &= 0
 \end{aligned} \right\} 6)$$

wobei:

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_1 &= \Sigma A(Y\gamma - Z\beta) & \sigma_4 &= -\Sigma X + \Sigma a(Xa + Y\beta + Z\gamma) \\
 \sigma_2 &= \Sigma A(Za - X\gamma) & \sigma_5 &= -\Sigma Y + \Sigma \beta(Xa + Y\beta + Z\gamma) \\
 \sigma_3 &= \Sigma A(X\beta - Ya) & \sigma_6 &= -\Sigma Z + \Sigma \gamma(Xa + Y\beta + Z\gamma)
 \end{aligned} \right\} 7)$$

Auch das gesuchte Minimum der Summe der Quadrate der Abstände lässt sich leicht ausdrücken:<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned}
 S &= \Sigma (\mathfrak{A} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b} + \mathfrak{A} \times [\mathfrak{U} \times \mathfrak{b}])^2 = \Sigma (\mathfrak{A} \times \mathfrak{b} - \mathfrak{X} \times \mathfrak{b} + A \mathfrak{U} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{U} \mathfrak{b})^2 \\
 &= \Sigma \{ (\mathfrak{A} \times \mathfrak{b})^2 + (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b})^2 + A^2 \mathfrak{U}^2 + (\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{U})^2 - 2(\mathfrak{A} \times \mathfrak{b}) \cdot (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}) + 2A(\mathfrak{A} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{U} \\
 &\quad - 2A \mathfrak{X} \times \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{U} - 2A \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{A} \} \\
 &= (n \mathfrak{X} - \Sigma \mathfrak{b} \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{b} - \Sigma A \mathfrak{U} \times \mathfrak{b} - \Sigma \mathfrak{A} + \Sigma \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{X} \\
 &\quad + (-\Sigma A \mathfrak{X} \times \mathfrak{b} - \Sigma A \mathfrak{A} \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{U} + \mathfrak{U} \Sigma A^2 + \Sigma A \mathfrak{A} \times \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{U} \\
 &\quad + \Sigma (\mathfrak{A} \times \mathfrak{b})^2 - \Sigma \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{X} + \Sigma \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{b} \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{b} + \Sigma A \mathfrak{U} \cdot \mathfrak{A} \times \mathfrak{b}.
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Zur Vereinfachung der Schreibweise ist der Index  $i$  im folgenden weggelassen.

<sup>2)</sup> Man beachte, dass  $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{C} \times \mathfrak{D}) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{C} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{D} - \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{D} \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$  und  $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} \times \mathfrak{A} = 0$ .

Die eingeklammerten Ausdrücke in den beiden ersten Zeilen sind aber infolge der Gleichungen 4 und 5 Null. Der übrig bleibende Teil lautet dann, in Koordinaten geschrieben:

$$S = u \sigma_1 + v \sigma_2 + w \sigma_3 + x \sigma_4 + y \sigma_5 + z \sigma_6 + S_1, \quad 8)$$

wo  $S_1 = \Sigma(\mathfrak{A} \times \mathfrak{b})^2$  die Summe der Quadrate der Abstände vor der Ausgleichung bedeutet.

Die 6 Gleichungen haben die Form von Normalgleichungen im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate.<sup>1)</sup> Dass sie wirklich Normalgleichungen sind, was bei der Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung nicht unbedingt der Fall sein muss, lässt sich durch eine andere Ableitung desselben Gleichungssystems zeigen, welche sich den üblichen Methoden der Ausgleichsrechnung mehr anschliesst: Der kürzeste Abstand  $\mathfrak{F}_i$  des Punktes  $P_i$  vom zugehörigen Strahl in der korrigierten Lage lässt sich bis auf Grössen 2. Ordnung als Differenz zweier Vektoren ausdrücken:

$$\mathfrak{U}_i - \mathfrak{X} - \sqrt{(\mathfrak{U}_i - \mathfrak{X})^2} (\mathfrak{b}_i + \mathfrak{u} \times \mathfrak{b}_i) = \mathfrak{F}_i. \quad 9)$$

Entwickelt man die Wurzel und behält man die Glieder niedrigster Ordnung bei, so ergibt sich die Gleichung:

$$\mathfrak{U}_i - A_i \mathfrak{b}_i - \mathfrak{X} + \frac{\mathfrak{U}_i \cdot \mathfrak{X}}{A_i} \mathfrak{b}_i - \mathfrak{u} \times \mathfrak{U}_i = \mathfrak{F}_i. \quad 10)$$

<sup>1)</sup> Verzichtet man auf die Herstellung von Normalgleichungen, so lassen sich im Gleichungssystem 6 die Summen  $\sigma_1 \dots \sigma_6$  mit Benützung der Abkürzungen  $A \Delta a = X - A a$ ;  $A \Delta \beta = Y - A \beta$ ;  $A \Delta \gamma = Z - A \gamma$  und unter Vernachlässigung weiterer Grössen 2. Ordnung folgerichtiger schreiben:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \Sigma A^2 (\gamma \Delta \beta - \beta \Delta \gamma) & \sigma_4 &= - \Sigma A \Delta a \\ \sigma_2 &= \Sigma A^2 (a \Delta \gamma - \gamma \Delta a) & \sigma_5 &= - \Sigma A \Delta \beta \\ \sigma_3 &= \Sigma A^2 (\beta \Delta a - a \Delta \beta) & \sigma_6 &= - \Sigma A \Delta \gamma \end{aligned}$$

Die Grössen  $\sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$  können als Komponenten der geometrischen Summe der kürzesten Abstände vor der Ausgleichung gedeutet werden. Ebenso  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$  als Komponenten der Momentensumme jener Abstände in Bezug auf den Näherungspunkt. Ihr Verschwinden sagt aus, dass diese Abstände ein Gleichgewichtssystem bilden. In diesem Falle verschwinden auch  $\mathfrak{u}$  und  $\mathfrak{X}$  und das Minimum der Quadratsumme ist schon vor der Ausgleichung vorhanden.

Dieselbe kann als Repräsentant von drei Fehlergleichungen aufgefasst werden, die man bei Zerfällen der Gleichung nach den 3 Koordinatenrichtungen erhält:

$$\left. \begin{aligned} +vA\gamma - wA\beta + x(1-\alpha^2) - ya\beta - za\gamma - X + Aa &= f_x \\ -uA\gamma \quad +wAa - x\alpha\beta + y(1-\beta^2) - z\beta\gamma - Y + A\beta &= f_y \\ +uA\beta - vAa \quad -xa\gamma - y\beta\gamma + z(1-\gamma^2) - Z + A\gamma &= f_z \end{aligned} \right\} 11)$$

Bildet man aus den 3  $n$  Fehlergleichungen in der üblichen Weise die Normalgleichungen, so kommt man unmittelbar zum Gleichungssystem 6. Man kann daher das System ohne weiteres nach dem in der Ausgleichsrechnung üblichen Verfahren auflösen.

### III.

Wir wollen uns noch mit zwei Sonderfällen der Aufgabe des Rückwärtseinschneidens im Raum befassen. Der erste ist dadurch ausgezeichnet, dass die Orientierung des Strahlenbündels gegen die Vertikale bekannt ist, oder wie man sich kurz ausdrücken könnte, dass die Vertikale ein bekannter Strahl des Bündels ist. Das wird der Fall sein, wenn die Photographie mit einem photogrammetrischen Apparat, der den Horizont auf dem Bild festzulegen gestattet, aufgenommen wurde. In diesem Fall ist der Standpunkt bereits durch zwei Fixpunkte und die zugehörigen Strahlen bestimmt.<sup>1)</sup> Man hat hier nur mehr eine Gleichung zweiten Grades zu lösen, die man durch folgende einfache Betrachtung erhält: Man kann dem Dreikant, das durch die Vertikale im Standpunkt  $O$  und die Strahlen nach den beiden Fixpunkten  $P_1$  und  $P_2$  gebildet wird, die beiden Höhenwinkel  $\beta_1$  und  $\beta_2$  (Seiten des Dreikants) und den Horizontalwinkel  $\alpha$  (Winkel des Dreikants), welche die Sichten vom Standpunkt  $O$  nach den Punkten  $P_1$  und  $P_2$  einschliessen, entnehmen. Ist  $z_1$  die Höhe von  $P_1$  über der Projektionsebene,  $z_2$  die von  $P_2$ , und  $z$  die gesuchte Höhe des

<sup>1)</sup> Liegen mehr Fixpunkte und Strahlen vor, so kann man statt der im Folgenden gegebenen Methode die des ebenen Rückwärtseinschneidens mit Vorteil benützen.

Standpunktes  $O$ , sind ferner  $r_1$  und  $r_2$  die Entfernungen des Grundrisses  $O_0$ <sup>1)</sup> von den Punkten  $P_{10}$  und  $P_{20}$  und  $a$  die Länge  $P_{10}P_{20}$ , so wird:

$$a^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos \alpha; \quad r_1 = (z - z_1) \cotg \beta_1; \quad r_2 = (z - z_2) \cotg \beta_2. \quad 12)$$

Setzt man in die erste Gleichung die Werte von  $r_1$  und  $r_2$  ein, so erhält man folgende quadratische Gleichung für die Höhe  $z$ :

$$\begin{aligned} a^2 &= (z - z_1)^2 \cotg^2 \beta_1 + (z - z_2)^2 \cotg^2 \beta_2 \\ &\quad - 2(z - z_1)(z - z_2) \cotg \beta_1 \cotg \beta_2 \cos \alpha. \end{aligned} \quad 13)$$

Ist  $z$  ermittelt, so folgen die übrigen Stücke mittels einfacher Rechnung. Der gefährliche Ort wird hier diejenige Ebene durch die Basis  $P_1P_2$ , welche senkrecht auf einer durch sie und die ausgezeichnete Richtung gelegten Ebene steht.

Die Ausgleichung, die bei Bestimmung des Standpunktes aus einer überschüssigen Zahl von Fixpunkten und Strahlen notwendig wird, vereinfacht sich auch in diesem Fall erheblich. Im Gleichungssystem 6 werden die Grössen  $u$  und  $v$  zu Null, und die erste und zweite Gleichung fällt fort, da der Vektor  $U$  nur in der  $Z$ -Richtung veränderlich ist und daher aus der Erfüllung der Gleichung 5) nur eine gewöhnliche Gleichung, die sich auf die  $Z$ -Komponente bezieht, gefolgert werden kann. Man hat also hier nur die folgenden 4 Gleichungen aufzulösen:

$$\left. \begin{aligned} w \Sigma A^2 (1 - \gamma^2) - x \Sigma A \beta + y \Sigma A a + \sigma_3 &= 0 \\ -w \Sigma A \beta + x (n - \Sigma a^2) - y \Sigma a \beta - z \Sigma a \gamma + \sigma_4 &= 0 \\ w \Sigma A a - x \Sigma a \beta + y (n - \Sigma \beta^2) - z \Sigma \beta \gamma + \sigma_5 &= 0 \\ -x \Sigma a \gamma - y \Sigma \beta \gamma + z (n - \Sigma \gamma^2) + \sigma_6 &= 0 \end{aligned} \right\} 14)$$

Ein zweiter Sonderfall von einfacherer Art entsteht dann, wenn die Orientierung des Strahlenbündels vollständig bekannt ist, wie es etwa bei einem mit einer Bussole ausgerüsteten photogrammetrischen Apparat der Fall ist. Die Art der Be-

<sup>1)</sup> Der angehängte Index 0 kennzeichnet den Grundriss des betreffenden Raumpunktes.

rechnung einer Näherungslage des Standpunktes aus 2 Fixpunkten liegt hier auf der Hand. Die Formeln für die Ausgleichung bei überschüssigen Fixpunkten und Strahlen, die durch Nullsetzen von  $w$  in den Gleichungen 6 entstehen, lassen in diesem Fall eine einfache geometrische Deutung für den Korrekptionsvektor  $\mathfrak{X}$  zu. Da die Drehung  $\mathfrak{U}$  hier gänzlich wegfällt, ist in diesem Fall der Ausdruck  $\sum ([\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times \mathfrak{b}_i)^2$  zu einem Minimum zu machen. Hieraus folgt die Bedingung:

$$2 d\mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [[\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times \mathfrak{b}_i] = 0$$

oder:

$$\sum \mathfrak{b}_i \times [[\mathfrak{A}_i - \mathfrak{X}] \times \mathfrak{b}_i] = 0 \quad (15)$$

$$\sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] = \sum \mathfrak{A}_i - \sum A_i \mathfrak{b}_i = \mathfrak{M} \quad (16)$$

Wir betrachten nun die Fläche 2. Ordnung von der Gleichung:

$$\sum (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i)^2 = \mathfrak{M}^2. \quad (17)$$

Dieselbe ist das Trägheitsellipsoid eines Massensystems, welches man erhält, wenn man die Endpunkte der Vektoren  $\mathfrak{b}_i$  mit den Massen 1 versieht. Durch Differentiation dieser Gleichung ergibt sich:

$$d\mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = 0 \quad (18)$$

und hieraus die Gleichung der Tangentialebene

$$(\mathfrak{y} - \mathfrak{X}) \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = 0, \quad (19)$$

wobei  $\mathfrak{y}$  den Vektor nach einem beliebigen Punkt der Tangentialebene,  $\mathfrak{X}$  den nach dem Berührungspunkt der Tangentialebene bedeutet. Die Gleichung kann man noch folgendermassen umformen:

$$\mathfrak{y} \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \sum (\mathfrak{b}_i \times \mathfrak{X})^2 = \mathfrak{M}^2.$$

Für den gesuchten Vektor  $\mathfrak{X}$  ist:

$$\sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \mathfrak{M}.$$

Auf der Tangentialebene im Endpunkt von  $\mathfrak{X}$  liegt daher der Endpunkt des Vektors  $\mathfrak{y} = \mathfrak{M}$ , da dieser zusammen mit der obigen Gleichung die Gleichung der Tangentialebene erfüllt. Der Vektor  $\mathfrak{M}$  steht senkrecht auf der Tangentialebene im

Endpunkt von  $\mathfrak{X}$ , weil die Bedingung  $\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$  erfüllt ist. Man kann demnach den Vektor  $\mathfrak{X}$  in folgender Weise konstruieren: Man errichtet im Endpunkt des Vektors  $\mathfrak{M}$  eine Ebene senkrecht zum Vektor  $\mathfrak{M}$  und sucht das dem Trägheitsellipsoid ähnliche und konzentrische Ellipsoid auf, welches diese Ebene berührt; der Radiusvektor nach dem Berührungspunkt ist der gesuchte Korrektionsvektor  $\mathfrak{X}$ . Das Minimum der Summe der Quadrate der kürzesten Abstände lässt sich noch in eine einfachere Form bringen:

$$S = \sum (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i)^2 - 2 \sum (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i) \cdot (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i) + \sum (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i)^2. \quad (20)$$

Dabei ist aber:

$$\begin{aligned} \sum (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i) \cdot (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i) &= \mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i] = \mathfrak{X} \cdot \mathfrak{M} \\ &= \mathfrak{X} \cdot \sum \mathfrak{b}_i \times [\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i] = \sum (\mathfrak{X} \times \mathfrak{b}_i)^2 = \mathfrak{M}^2. \end{aligned}$$

Hiernach wird:

$$S = \sum (\mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i)^2 - \mathfrak{M}^2. \quad (21)$$

Zu einem dritten Spezialfall des Problems gelangt man, wenn man den Standpunkt bereits als bekannt ansieht und nur noch die Aufgabe hat, das Strahlenbündel um den Standpunkt so zu drehen, dass die Strahlen möglichst genau durch die entsprechenden Fixpunkte hindurchgehen. In diesem Fall hat man in den Gleichungen 6  $x, y, z$  gleich Null zu setzen und erhält ein Gleichungssystem, welches in Vektorform geschrieben folgendermassen lautet:

$$\sum \mathfrak{A}_i \times [\mathfrak{u} \times \mathfrak{A}_i] = \sum A_i \mathfrak{A}_i \times \mathfrak{b}_i = \mathfrak{N}. \quad (22)$$

Die Aufsuchung des Vektors  $\mathfrak{u}$  kann nun mit Hilfe des Ellipsoids von der Gleichung

$$\sum (\mathfrak{u} \times \mathfrak{A})^2 = \mathfrak{N}^2 \quad (23)$$

und des Vektors  $\mathfrak{N}$  ebenso bewerkstelligt werden, wie im vorigen Fall. Das Ellipsoid kann als Trägheitsellipsoid des mit den Massen 1 versehenen Systems der Fixpunkte in bezug auf den Standpunkt gedeutet werden.

## IV.

Wir wenden uns nun zur Besprechung des schon erwähnten Beispiels zum allgemeinen Fall. Figur 4 stellt eine Reproduktion der Photographie vor, in welcher die zum Rückwärtseinschneiden benützten Fixpunkte durch Kreuze und Nummern kenntlich gemacht sind. Figur 5 gibt einen Ausschnitt aus der österreichischen Spezialkarte (Blatt St. Michael, Zone 17, Col. IX) im Massstab 1:75000, mit der Lage und den Höhen der Fixpunkte. Die Koordinaten derselben, auf ein durch die Mitte der Karte gelegtes rechtwinkliges System bezogen, ergaben sich folgendermassen:

Tabelle I.

	$x$	$y$	$z$	
1	— 7204	— 305	2370	Dolzenberg
2	— 6088	— 425	2342	Brettereck <sup>1</sup>
3 <i>d</i>	— 5459	— 876	2424	Grosseck, trig. Punkt
4	— 5245	— 1461	2321	Kendlspitze
5	— 3969	— 1330	2201	Schrovinkogel
6	— 3746	— 1662	2205	Kuppe oberhalb der Ödenkaralpe
7	— 869	— 3636	1850 <sup>1)</sup>	Zickenberg
8	— 3020	+ 473	1220 <sup>1)</sup>	Waldecke
9	— 1242	— 60	1111	Brücke am Cederhausbach bei Feld
10	— 1041	— 302	1105	Knie des Cederhausbaches
11	— 429	— 790	1100	Knie des Cederhausbaches
12	— 3857	— 3475	1095	Knie des Murbaches
13	— 1704	— 4271	1085	Murbrücke bei Walisch

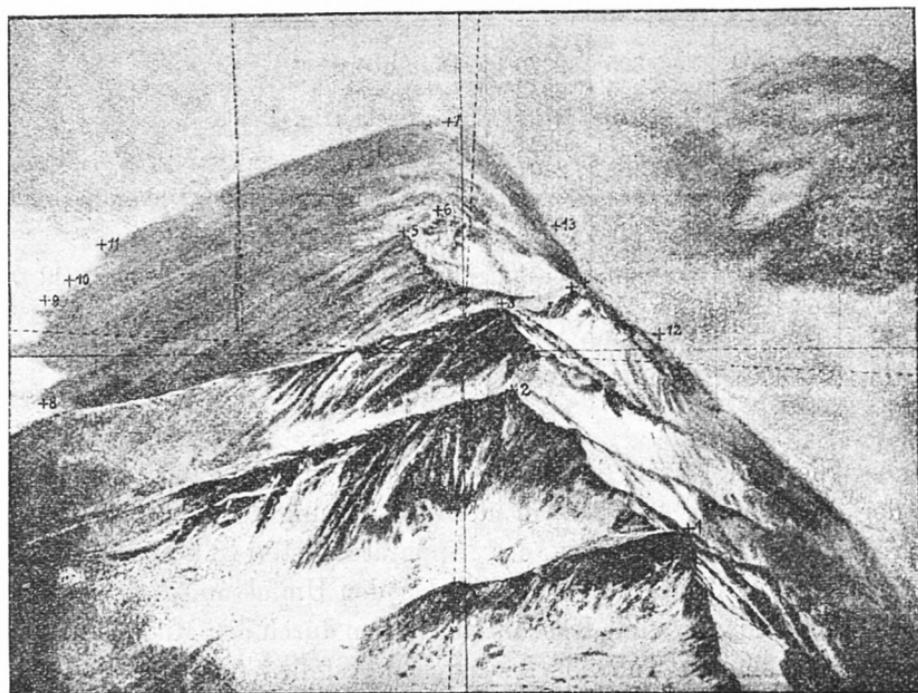
Sie sind bereits in Bezug auf den Papiereingang, der in der X-Richtung 2,13%, in der Y-Richtung 0,72% beträgt, reduziert. Die Bildweite des Apparates ist 148,4 mm. Die Koordinaten der Bildpunkte, auf das den Umfassungslinien der Photographie parallele Koordinatensystem durch den Mittelpunkt bezogen, sind in Tabelle II zusammengestellt. (Vergl. Fig. 4.)

<sup>1)</sup> Die Höhen der Punkte 7 und 8 sind geschätzt.

Tabelle II.

	$x$	$y$
1	+ 26,3	- 20,9
2	+ 5,8	- 4,2
3 A	+ 5,0	+ 5,3
4	+ 12,6	+ 7,6
5	- 6,7	+ 14,5
6	- 2,5	+ 16,5
7	- 1,6	+ 27,1
8	- 49,1	- 5,4
9	- 49,0	+ 6,9
10	- 45,8	+ 8,9
11	- 42,1	+ 13,0
12	+ 23,1	+ 2,1
13	+ 10,8	+ 14,7

Fig. 4.



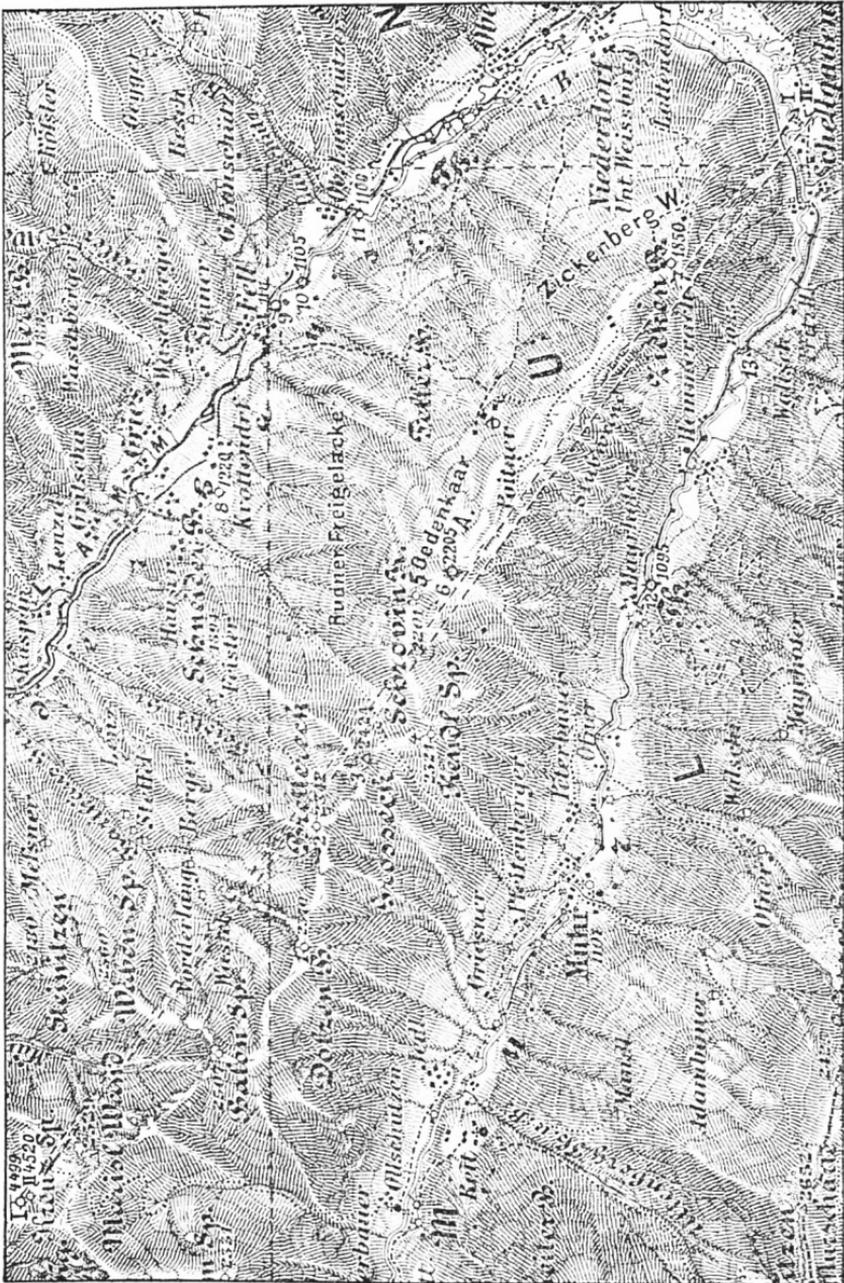
Gebirgskamm zwischen Cederhaustal und Murtal in Salzburg.  
 Aus 4520 m Höhe aufgenommen von Prof. K. Heinke am 21. Febr. 1903.

Fig. 5.

- X

+ Y

- Y



+ X

Zunächst wurde auf graphischem Wege eine näherungsweise Position I (Fig. 5) des Standpunktes mit den Koordinaten  $x = -9617$ ,  $y = 2203$ ,  $z = 4499$  bestimmt, wobei der Umstand benützt wurde, dass auf der Photographie ein vom Äquator des Ballons herabhängendes Windtau abgebildet ist, dessen Richtung man als annähernd vertikal ansehen konnte. Bei dieser Gelegenheit wurde auch eine genäherte Lage für die Neigung des Apparates (Richtungscosinus der optischen Axe:  $\alpha = 0,7435$ ,  $\beta = -0,5240$ ,  $\gamma = -0,4160$ , Neigung derselben gegen die Horizontale  $-24^{\circ}58'$ ) ermittelt; der Horizont wurde vorläufig parallel der einen Rahmenseite angenommen. Auf dem Wege der darstellenden Geometrie liessen sich alsdann die Richtungscosinus der 13 Strahlen bezogen auf das Koordinatensystem der Karte mit einer Genauigkeit von etwa 0,001 ermitteln; sie sind in der Tabelle III zusammengestellt:

Tabelle III.

	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	+ 0,5794	- 0,6189	- 0,5303
2	+ 0,7105	- 0,5480	- 0,4415
3 A	+ 0,7355	- 0,5585	- 0,3835
4	+ 0,7090	- 0,6010	- 0,3690
5	+ 0,7978	- 0,5065	- 0,3270
6	+ 0,7870	- 0,5320	- 0,3125
7	+ 0,7988	- 0,5490	- 0,2460
8	+ 0,8740	- 0,2310	- 0,4275
9	+ 0,9005	- 0,2510	- 0,3550
10	+ 0,8978	- 0,2725	- 0,3460
11	+ 0,8981	- 0,2990	- 0,3225
12	+ 0,6507	- 0,6457	- 0,3995
13	+ 0,7285	- 0,6030	- 0,3250

Aus den Näherungskordinaten des Standpunktes I und den Koordinaten der Fixpunkte (Tabelle I) ergaben sich alsdann die in Tabelle IV verzeichneten Komponenten der Vektoren  $\mathfrak{A}_i$ :

1) Die Horizontalprojektion der optischen Axe vor der Ausgleichung ist in Fig. 5 mittels einer gestrichelten Linie durch den Punkt I angegeben.

Tabelle IV.

	X	Y	Z	Z korrigiert
1	+ 2413	- 2508	- 2129	- 2130
2	+ 3529	- 2628	- 2157	- 2159
3 A	+ 4158	- 3079	- 2075	- 2077
4	+ 4372	- 3664	- 2178	- 2180
5	+ 5648	- 3533	- 2298	- 2301
6	+ 5871	- 3865	- 2294	- 2298
7	+ 8748	- 5839	- 2649	- 2657
8	+ 6597	- 1730	- 3279	- 3283
9	+ 8375	- 2263	- 3388	- 3394
10	+ 8576	- 2505	- 3394	- 3400
11	+ 9188	- 2993	- 3399	- 3406
12	+ 5760	- 5678	- 3404	- 3409
13	+ 7913	- 6474	- 3414	- 3422

Die Z-Komponenten der 4. Kolonne sind in Bezug auf Erdkrümmung und mittlere Refraktion verbessert.

Das Koeffizientenschema der Normalgleichungen 6, das mit Hilfe von Tafeln berechnet wurde, wird folgendes:

$$\begin{array}{rccccccc}
 + 304,18 & + 303,84 & + 236,22 & 0 & + 36,170 & - 47,380 & - 0,796 \\
 & + 665,31 & - 134,21 & - 36,170 & 0 & - 80,743 & + 0,322 \\
 & & + 760,24 & + 47,380 & + 80,743 & 0 & - 6,344 \\
 & & & + 5,0804 & + 4,6474 & + 3,6582 & - 0,410 \\
 & & & & + 9,7420 & - 2,3056 & - 0,620 \\
 & & & & & + 11,1779 & - 0,044 \\
 & & & & & & + 0,1283
 \end{array}$$

Für die Koordinaten wurde dabei der Kilometer als Einheit gewählt.

Die Auflösung nach der Gauss'schen Methode der successiven Elimination ergab bei Benützung eines 50 cm langen Rechenschiebers nachstehende Werte für die Unbekannten:

$$\begin{array}{ll}
 u = - 0,0403 \pm 0,0033 & x = + 0,0408 \pm 0,0195 \\
 v = + 0,0257 \pm 0,0024 & y = + 0,0786 \pm 0,0254 \\
 w = + 0,0145 \pm 0,0023 & z = + 0,0212 \pm 0,0233
 \end{array}$$

Die beige-schriebenen mittleren Fehler sind aus den Gewichtskoeffizienten

$$\begin{aligned}
 [\alpha\alpha] &= 0,03816, & [\beta\beta] &= 0,02108, & [\gamma\gamma] &= 0,01886, \\
 [\delta\delta] &= 1,368, & [\varepsilon\varepsilon] &= 2,310, & [\varphi\varphi] &= 1,943,
 \end{aligned}$$

und der reduzierten Fehlerquadratsumme 0,00921, sowie der Anzahl 33 der überschüssigen Fehlergleichungen gerechnet. Die Ausrechnung der Gleichung 8 für das Minimum der Summe der Fehlerquadrate ergab in genügender Übereinstimmung 0,0103. Zur Probe wurden auch noch die 39 Fehlergleichungen, die sich aus den Gleichungen 11 ergeben mit den Korrektionswerten ausgerechnet und hiernach die Summe der Fehlerquadrate in ebenfalls entsprechender Übereinstimmung zu 0,00978 gefunden. Hiernach sind die Koordinaten der endgiltigen, in Fig. 5 mit II bezeichneten Lage des Ballonortes:  $x = -9576 \pm 20$  m;  $y = 2282 \pm 25$  m;  $z = 4520 \pm 23$  m.

Die Komponenten des Drehvektors  $\mathfrak{U}$  bewirken eine Veränderung der Hauptvertikalen und damit des Koordinatensystems auf der Bildebene, die man in folgender Weise erhält: Man sucht im Strahlenbündel jenen Strahl, der nach der Drehung um den Vektor  $\mathfrak{U}$  in die Vertikale übergeht. Dieser gibt die Lage der Vertikalen nach der Ausgleichung an. Bezeichnen wir denselben mit  $\mathfrak{b}_0 = \alpha_0 \mathfrak{i} + \beta_0 \mathfrak{j} + \gamma_0 \mathfrak{k}$ , so ist dadurch die Gleichung gegeben:  $\mathfrak{b}_0 + \mathfrak{U} \times \mathfrak{b}_0 = -\mathfrak{k}$ , woraus mit Vernachlässigung von Gliedern 2. Ordnung  $\alpha_0 = v$ ,  $\beta_0 = -u$ ,  $\gamma_0 = -1$  sich ergibt. Der Schnittpunkt dieses Strahles  $\mathfrak{b}_0$  mit der Bildebene gibt den verbesserten Nadir auf dem Bilde. Wird dieser mit  $\mathcal{A}$  verbunden, so erhält man die verbesserte Hauptvertikale, welche in Figur 4 punktiert eingetragen ist. Die Figur zeigt, dass die Richtung der neuen Hauptvertikale sehr gut zur Richtung des Windtaues stimmt, wie eine nach dem verbesserten Nadir gezogene, punktierte Linie, die sich fast mit dem Bilde des Windtaues deckt, ausweist. Zum Schlusse sei noch eine Zusammenstellung der Koordinaten  $(x, y, z)$  der Fixpunkte und jener  $(x', y', z')$  der Endpunkte der kürzesten Abstände auf den Strahlen nach der Ausgleichung gegeben. Die Komponenten der kürzesten Abstände sind mit  $f_x f_y f_z$  bezeichnet.

Tabelle V.

	$x$	$x'$	$f_x$	$y$	$y'$	$f_y$	$z$	$z'$	$f_z$
1	-- 7204	-- 7210	-- 6	-- 305	-- 319	-- 14	+ 2370	+ 2378	+ 8
2	-- 6088	-- 6093	-- 5	-- 425	-- 454	-- 29	+ 2342	+ 2367	+ 25
3 $\Delta$	-- 5459	-- 5470	-- 11	-- 876	-- 872	+ 4	+ 2424	+ 2396	-- 28
4	-- 5245	-- 5231	+ 14	-- 1461	-- 1433	+ 28	+ 2321	+ 2295	-- 26
5	-- 3969	-- 3949	+ 20	-- 1330	-- 1307	+ 23	+ 2201	+ 2213	+ 12
6	-- 3746	-- 3746	0	-- 1662	-- 1670	-- 8	+ 2205	+ 2217	+ 12
7	-- 869	-- 880	-- 11	-- 3636	-- 3665	-- 29	+ 1850	+ 1872	+ 22
8	-- 3020	-- 3025	-- 5	+ 473	+ 500	+ 27	+ 1220	+ 1192	-- 28
9	-- 1242	-- 1247	-- 5	-- 60	-- 66	-- 6	+ 1111	+ 1101	-- 10
10	-- 1041	-- 1047	-- 6	-- 302	-- 320	-- 18	+ 1105	+ 1105	0
11	-- 429	-- 422	+ 7	-- 790	-- 779	+ 11	+ 1100	+ 1112	+ 12
12	-- 3857	-- 3852	+ 5	-- 3475	-- 3465	+ 10	+ 1095	+ 1088	-- 7
13	-- 1704	-- 1699	+ 5	-- 4271	-- 4263	+ 8	+ 1085	+ 1076	-- 9

Für die Lage der optischen Axe nach der Ausgleichung, die in Fig. 5 mittels einer gestrichelten Linie durch Punkt II dargestellt ist, findet man die Richtungscosinus:  $a = 0,7404$ ,  $\beta = -0,5300$ ,  $\gamma = -0,4140$  und den Neigungswinkel gegen die Horizontale zu  $-24^{\circ}46'$ . Die durchschnittlichen Koordinatendifferenzen der Tabelle V betragen in der  $X$ -Richtung 8 m, in der  $Y$ -Richtung 16 m, in der  $Z$ -Richtung 15 m; vor der Ausgleichung waren die betreffenden Werte 39 m, 49 m, 55 m. Im allgemeinen entsprechen die übrig bleibenden Widersprüche bei der Ausgleichung den Anforderungen, die man an eine topographische Karte im Massstab 1:75000 zu stellen geneigt ist, wenigstens soweit als die Horizontalpositionen in Frage kommen. Die kleineren Koordinatenunterschiede in der  $X$ -Richtung erklären sich einfach aus dem Umstand, dass die Strahlen des Bündels gegen die  $X$ -Axe nur wenig geneigt sind und die übrig bleibenden kürzesten Abstände daher annähernd senkrecht zur  $X$ -Axe stehen. Bemerkenswert sind die grossen Fehler bei den Höhen, soweit wenigstens die Berggipfel in Frage kommen. Für die Talpunkte sind sie nicht auffällig, da die Höhe bei Punkt 8 nur auf Schätzung zwischen den Höhenlinien beruht und leicht um mehr als 10 m falsch sein kann. Auf ähnliche Weise liesse sich auch die Differenz bei Punkt 7

erklären, dessen Höhe ebenfalls nur ziemlich unsicher geschätzt ist. Dagegen sind die grossen und ihrem Vorzeichen nach entgegengesetzten Differenzen bei Punkt 2 und 3, wobei Punkt 3 noch dazu ein trigonometrischer Punkt ist, schwer zu erklären. Dieselben traten schon bei der graphischen Näherungsbestimmung sehr störend auf und es liess sich auch durch Weglassung des Punktes 2 keine bessere Uebereinstimmung erzielen. Die verhältnismässig grosse Unsicherheit in der Bestimmung des Ballonortes, die in den mittleren Fehlern der Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  im Betrage von 20 m, 25 m, 23 m zum Ausdruck kommt, ist wesentlich auf diesen Umstand zurückzuführen. Ungünstig für die Genauigkeit der Rekonstruktion des Ballonortes ist ausserdem noch der Umstand, dass das Bildfeld des benützten Apparates klein ist, und von demselben in der Horizontalrichtung nur etwa  $30^\circ$ , in der Vertikalrichtung kaum  $20^\circ$  zur Ausnützung kommen kann. Die ausgedehnte Schneebedeckung der Landschaft erschwert im Verein mit dem Nebelschleier die genaue Identifikation des Bildes mit der Karte. Für Aufnahmen während der Sommerszeit, die mit einem photogrammetrischen Apparat von etwa  $50^\circ$  Bildfeld in der Horizontalrichtung und  $35^\circ$  in der Vertikalrichtung bei gutem Wetter gemacht werden, würden die Verhältnisse bei weitem günstiger liegen. Allerdings würde dann voraussichtlich die Unzulänglichkeit des Kartenmaterials noch auffallender zutage treten, als es bei diesem Beispiel schon der Fall ist. Es darf nicht verschwiegen werden, dass diesem Teil der Spezialkarte der österreichisch-ungarischen Monarchie Aufnahmen aus dem Anfang der 70 er Jahre zu Grunde liegen, die mit ziemlich primitiven Hilfsmitteln ausgeführt wurden, und bei denen der genauen Darstellung des Hochgebirges noch kein erheblicher Wert beigelegt wurde. Abgesehen von den erwähnten Unstimmigkeiten in den Höhen und der durch den Zeichenschlüssel bedingten Unbeholfenheit der Felsdarstellung ist die Wiedergabe des Gebirgszuges in der Karte als durchaus entsprechend zu bezeichnen.