Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band VIII. Jahrgang 1878.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1878.

In Commission bei G. Franz.

Sitzungsberichte

der

königl. bayer. Akademie der Wissenschaften.

Sitzung vom 2. März 1878.

Mathematisch-physikalische Classe.

Herr G. Bauer spricht: „Ueber Systeme von Curven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem bei Curven 2. Ordnung führt."

Clebsch hat in einer Abhandlung „Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen 2. Ordnung"[1]) auch die Frage erörtert nach dem Ort der Punkte, für welche die an eine Curve 2. Ordnung gezogenen Normalen ein constantes Doppelverhältniss haben und wurde dabei auf ein System von Curven 6. Ordnung von besonderen Eigenthümlichkeiten geführt.

Bevor ich noch von dieser Arbeit Kenntniss genommen, hatte ich diese Frage ebenfalls behandelt, und es sei mir gestattet, einige ergänzende Bemerkungen zu dieser Aufgabe beizubringen, insbesondere noch auf ein zweites System von Curven 6. Ordnung hinzuweisen, welches mit dem ersten

---

1) Crelles Journ. Bd. 62. S. 64.

System in enger Verbindung steht und wegen seiner Eigenthümlichkeiten an sich bemerkt zu werden verdient.

1. Legen wir, wie Clebsch in der erwähnten Abhandlung gethan, den von Cayley erweiterten Begriff von „Normale" zu Grunde [2]), so lautet die Aufgabe von einem Punkte M Normale an einen Kegelschnitt zu ziehen: „Es soll an einen Kegelschnitt $U = o$ eine Tangente T so gezogen werden, dass die von dem Berührungspunkt der Tangente nach einem festen Punkt M gezogene Gerade N durch den Pol der Tangente T, in Bezug auf einen zweiten Kegelschnitt $V = o$ genommen, gehe."

Zerfällt der Kegelschnitt V in die zwei unendlich entfernten Kreispunkte, so gehen die Geraden N in die eigentlichen Normalen von U über.

Beziehen wir die zwei Curven 2. Ordnung U und V auf das ihnen gemeinsame Polardreieck und setzen demnach

$$V = x^2 + y^2 + z^2 = o$$
$$U = ax^2 + by^2 + cz^2 = o\,.$$

Sind sodann x' y' z' die Cordinaten des Berührungspunkts der Tangente T, so folgt aus dem Umstande, dass die Polare dieses Punktes, sowie die Polare des Punktes M, in Bezug auf V genommen, sich auf der Tangente T schneiden sollen,

$$X = \lambda ax' + \mu x', \quad Y = \lambda by + \mu y', \quad Z = \lambda cz' + \mu z'$$

wo X, Y, Z die Coordinaten des gegebenen Punktes M, λ, μ unbestimmte Factoren sind. Die Werthe von x', y', z' aus diesen Gleichungen entnommen und in $U = o$ eingesetzt, geben

$$\frac{aX^2}{(a\lambda + \mu)^2} + \frac{bY^2}{(b\lambda + \mu)^2} + \frac{cZ^2}{(c\lambda + \mu)^2} = o$$

eine Gleichung 4. Grads in $\frac{\lambda}{\mu}$, durch welche die vier Tan-

2) Sur les normales d'une conique. Crelle's Journ. Bd. 56. S. 182.

genten T, welche der Anforderung genügen, bestimmt sind.

Druckt man $\frac{\lambda}{\mu}$ durch $\frac{x'}{z'}$ aus, so geht diese Gleichung über in

$$\begin{aligned} a(a-b)^2 Z^2 . x'^4 + 2a(a-b)(b-c)XZ . x'^3 z' + K . x'^2 z'^2 \\ + 2c(a-b)(b-c)XZ . x' . z'^3 + c(c-b)^2 X^2 . z'^4 = o \end{aligned} \quad (1$$

wo $\quad a(b-c)^2 X^2 + b(c-a)^2 Y^2 + c(a-b)^2 Z^2 = K \quad$ (2

gesetzt ist. Die Vertauschung von a und b, X und Y, x' und y' liefert die entsprechende Gleichung in y', z'.

Andererseits gibt die Gleichsetzung der Werthe von $\frac{\lambda}{\mu}$, wie sie aus obigen Gleichungen sich ergeben, folgende Bedingungsgleichung zwischen den x' y' z'

$$(a-b)Z . x'y' + (b-c)X . y'z' + (c-a)Y . z'x' = o \quad (3$$

Aus den Coefficienten der Gleichung 1) und ihrer entsprechenden in y' z' lassen sich nun mit Beihilfe der Gleichung 3.) die Coefficienten der Gleichung der vier Tangenten T, d. i. der Gleichung

$$\Pi(ax_i'x + by_i'y + cz_i'z) = o, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

berechnen und man erhält so für die Gleichung der vier Tangenten

$$\begin{aligned} a^4 . bc(c-b)^2 X^2 . x^4 + a^3 b . 2bc(c-a)(c-b)XY . x^3 y \\ + a^2 b^2 . cK . x^2 y^2 + ab^3 . 2ac(c-a)(c-b)XY . xy^3 \\ + b^4 . ac(c-a)^2 Y^2 . y^4 + \ldots . = o \end{aligned} \quad (4$$

worin die nicht ausgeschriebenen Glieder in x, z; y, z und z^4 sofort durch Vertauschung der Buchstaben zu ergänzen sind.

Vergleicht man die Gleichung einer Tangente T_i

$$a x_i'x + by_i'y + cz_i'z = o$$

mit der Gleichung der entsprechenden Geraden N_i durch den Pol von T_i in Bezug auf V und den Punkt (XYZ) gehend,

$$ax_i'(Yz - Zy) + by_i'(Zx - Xz) + cz_i'(Xy - Yx) = o$$

9*

so ersieht man, dass man aus der Gleichung der Tangenten 4) sogleich auch die Gleichung der vier Geraden N_1 erhält, indem man nur

$$\begin{array}{llll} & x & y & z \\ \text{durch} & Yz-Zy & Zx-Xz & Xy-Yx \end{array}$$

ersetzt.[3])

---

3) Will man diese Gleichungen anwenden auf die eigentlichen Normalen des Kegelschnitts

$$ax^2 + by^2 + c = o$$

bezogen auf die Hauptaxen desselben, so hat man nur in obigen Formeln in den Differenzen $a-c$, $b-c$ überall $c = o$ zu setzen und $Z = z = 1$.

In diesem Falle gibt dann Gleichung 4) beschränkt auf die ausgeschriebenen Glieder in x, y die Gleichung der vier Durchmesser parallel zu den Tangenten an den Fusspunkten der vier durch den Punkt (X, Y) gehenden Normalen, nämlich

$$a^2 b X^2 x^4 + 2a^2 b XY . x^3 y + K . x^2 y^2 + 2ab^2 XY . xy^3 + ab^2 Y^2 . y^4 = o \quad \text{(A}$$

Die Gleichung der vier Normalen erhält man hieraus, indem man $Y-y$ statt x und $x-X$ statt y setzt. Sie wird mithin

$$\left.\begin{array}{r} a^2 b X^2 (y-Y)^4 - 2a^2 b\, XY\, (y-Y)^3 (x-X) + K (y-Y)^2 (x-X)^2 \\ - 2ab^2\, XY\, (y-Y)(x-X)^3 + ab^2 Y^2 (x-X)^4 = o \end{array}\right\} \text{(B}$$

$$\text{wo} \qquad K = ab^2 X^2 + ba^2 Y^2 + c\,(a-b)^2$$

Diese Gleichungen lassen sich unter eine einfache Form bringen; erstere ist nämlich

$$ab\,(Xx + Yy)^2 (ax^2 + by^2) + c(a-b)^2 x^2 y^2 = o \qquad \text{(A}^1$$

und die Gleichung der vier Normalen

$$ab\,(Xy - Yx)^2 [b\,(x-X)^2 + a\,(y-Y)^2] + c\,(a-b)^2 (x-X)^2 (y-Y)^2 = o \qquad \text{(B}^1$$

Die vier Durchmesser A) conjugirt zu denjenigen, welche nach den Fusspunkten der Normalen laufen, schneiden den Kegelschnitt in zwei Punktquadrupeln, deren Normalen wieder in je einem Punkt zusammenlaufen. Aus A[1]) ergibt sich, dass diese Punktquadrupeln auf gleichseitigen Hyperbeln liegen, welche durch den Mittelpunkt und die unendlich entfernten Punkte der Axen des Kegelschnitts gehen u. s. w.*) Ebenso folgt aus B[1])

---

*) S. die betreffenden Sätze von Steiner „Ueber algebraische Curven und Flächen." Journ. v. Crelle. Bd. 49. S. 133.

2. Das Doppelverhältniss dieser vier Geraden N_i deren Gleichungen sich auch in der Form (3)

$$\frac{(b-c)x}{x'} + \frac{(c-a)y}{y'} + \frac{(a-b)z}{z'} = o$$

schreiben lässt ist offenbar gleich dem Doppelverhältniss der vier Geraden $ax'x + by'y = o$, welche durch die Gleichung 4) beschränkt auf die ausgeschriebenen Glieder in x, y dargestellt werden. Nun ergeben sich die Invarianten dieser biquadratischen Form

$$I = a_0a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2 = \frac{3}{6^2} . K^2$$

$$J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_4a_1^2 - a_2^3$$

$$= -\frac{1}{6^3}a^3b^3K^3 + \frac{1}{4}a^4b^4c(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2.X^2Y^2Z^2$$

„die Normalen, welche von einem Punkt (XY) und seinem diametral entgegengesetzten an einen Kegelschnitt gehen, sind (für alle Kegelschnitte mit denselben Axen) parallel zu den Durchmessern, welche nach den Durchschnittspunkten der festen Hyperbeln

$$xy \pm (Xy - Yx) = o$$

mit dem reciproken Kegelschnitt $K = o$ gehen."

Noch mag eine Eigenschaft der Normalen, die sich aus Gleichung B) ergibt, erwähnt sein. Die Summe der Wurzeln $\frac{y-Y}{x-X}$ dieser Gleichung ist nämlich $= 2\frac{Y}{X}$ und die Summe ihrer reciproken Werthe $= 2\frac{X}{Y}$; d. h. sind $\alpha_1 \ldots \alpha_4$ die Winkel, welche die vier Normalen mit einer Axe des Kegelschnitts bilden, Θ der Winkel, welchen der Radius rector ihres Durchschnittspunkt (XY) mit derselben Axe bildet, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2 + \operatorname{tg}\alpha_3 + \operatorname{tg}\alpha_4 = 2\operatorname{tg}\Theta$$
$$\operatorname{ctg}.\alpha_1 + \operatorname{ctg}\alpha_2 + \operatorname{ctg}\alpha_3 + \operatorname{ctg}\alpha_4 = 2\operatorname{ctg}\Theta$$

Diese Summen hängen mithin allein von dem Durchmesser ab, auf welchem der Punkt (X, Y) liegt. Sind zwei der Normalen gegeben, so sind die beiden andern durch diese Gleichungen bestimmt.

Setzen wir also die absolute Invariante, von welcher das Doppelverhältniss der vier Geraden abhängt

$$\frac{I^3}{J^2} = k \qquad (5.$$

so erhalten wir eine Gleichung 12. Grads in X, Y, Z, welche aber vermöge des Umstandes, dass für die betrachtete Form I ein vollständiges Quadrat ist, in zwei Gleichungen 6. Grades zerfällt. Man erhält daher zwei Curven 6. Ordnung als Ort der Punkte (XYZ), für welche die vier Geraden N_i ein constantes Doppelverhältniss haben, deren Gleichung

$$K^3 - m \,.\, 27\, a\, b\, c\, (a-b)^2\, (b-c)^2\, (c-a)^2\, X^2 Y^2 Z^2 = o \qquad (I.$$

ist, wo

$$m = 2\,\frac{\pm\sqrt{\frac{k}{27}}}{1 \pm \sqrt{\frac{k}{27}}}.$$

Diess ist das System von Curven, welches von Clebsch a. a. O. gefunden wurde. Einem gegebenen Doppelverhältniss entsprechen im allgemeinen zwei Werthe von m, also zwei Curven. Alle Curven bilden einen Büschel mit sechs gemeinsamen Spitzen (wovon zwei imaginär) in den Punkten, in welchen der Kegelschnitt $K = o$ das U und V gemeinsame Polardreieck schneidet. Dieser Kegelschnitt K dreifach gezählt, stellt selbst eine Curve des Büschels dar und entspricht dem äquianharmonischen Verhältniss. Ebenso entspricht dem harmonischen Verhältniss ($J = o$, also $k = \infty$) nur eine Curve für $m = 2$.

Für $k = 27$ verschwindet die Discriminante der biquadratischen Form; zwei der Geraden N fallen zusammen. Diesem Falle entspricht die Curve $m = 1$ (Evolute) und die Curve $m = \infty$, welche in die Geraden $X = o$, $Y = o$, $Z = o$, doppelt gezählt, zerfällt.

Bei dem Problem angewandt auf eigentliche Normalen verlaufen im allgemeinen die beiden Curven, welche einem Werthe von k entsprechen, für $k > 27$, wobei ein Werth vom m zwischen 1 und 2 liegt, der andere > 2 ist, in ganz ähnlicher Form wie die Evolute, die eine auf der einen, die andere auf der andern Seite der harmonischen Curve ($m = 2$). Ist aber $k < 27$, so ändert sich die Form der Curve, indem die eine der beiden Curven (für $m > o$ u < 1) zwischen Evolute und dem Kegelschnitt K sich hinzieht, und die andere ($m < o$) ausserhalb K vier flügelartige Züge bildet, indem für $m < o$ die Spitzen sich nach der äusseren Seite des Kegelschnitts K sich öffnen, während sie für positive m nach innen gerichtet sind.

Die Curve $m = 1$, welche der Evolute entspricht, hat, wie schon Clebsch a. a. O. gezeigt, vier imaginäre Doppelpunkte; die übrigen Curven des Systems haben ausser den 6 Spitzen keine Doppelpunkte. Sie sind mithin vom Geschlechte $p = 4$, 12. Classe, haben 24 Wendepunkte und 27 Doppeltangenten. Man sieht sogleich, dass bei den Curven für $m < 1$ acht reelle Wendepunkte auftreten müssen, da diese Curven, deren Spitzen nach der innern Seite des Kegelschnitts K sich öffnen, im Innern dieses Kegelschnitts verlaufen und sich demselben immer mehr anschmiegen, je kleiner m wird. Und diess ist auch die grösste Anzahl von reellen Wendungen, welche bei diesen Curven vorkommen kann, da nach der von Herrn Klein gegebenen Formel[4])

$$n + w' + 2t'' = k + r' + 2d'',$$

wo n die Ordnung, k die Classe, w' die Zahl der reellen Wendungen, r' die Zahl der reellen Spitzen, t'' die der isolirten reellen Doppeltangenten, d'' die der isolirten reellen Doppelpunkte ist, in unserm Falle

$$w' + 2t'' = 10$$

4) Sitz.-Ber. der phys.-med. Soc. z. Erlangen. 13. Dec 1875; Math. Annalen Bd. X. S. 199.

sich ergibt und eine isolirte reelle Doppeltangente immer vorhanden ist, nämlich die Seite des Polardreiecks, auf welcher die zwei imaginären Spitzen liegen. Für die Curven $m > 1$, welche keine reellen Wendungen besitzen, sind mithin ausser dieser noch 4 reelle isolirte Doppeltangenten vorhanden.

3. Joachimsthal gab in seinen bekannten Aufsätzen über die Normalen der Kegelschnitte[5]) eine einfache Construction für die Aufgabe, wenn die Normalen an zwei Punkten P, Q eines Kegelschnitts gegeben sind, die zwei anderen Normalen zu bestimmen, welche durch den Durchschnitt der beiden ersten gehen. Sind nämlich p, q die Coordinaten des Pols der Geraden PQ, so schneidet die Gerade $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + 1 = o$ den Kegelschnitt in den zwei Punkten, deren Normalen sich mit den Normalen in P und Q in einem Punkte schneiden.

Wie sich dieser Satz bei der hier zu Grunde gelegten allgemeineren Auffassung der Normale gestaltet, hat Cayley a. a. O. gezeigt.[6]) Die analytische Abhängigkeit zweier solcher Punktpaare eines Kegelschnitts, deren Normalen durch einen Punkt gehen, lässt sich jedoch noch auf eine andere, mehr symmetrische Weise darstellen. Sind $(x'_1\, y'_1\, z'_1)$, $(x'_2\, y'_2\, z'_2)$ die zwei ersten Punkte, (ξ, η, ζ) der Pol ihrer Verbindungslinie, (X, Y, Z) der Durchschnitt ihrer Normalen N, so ergibt sich

$$\frac{X}{Z} = -\frac{(a-b)(y'_1 z'_2 - z'_1 y'_2) x'_1 x'_2}{(b-c)(y'_1 x'_2 - x'_1 y'_2) z'_1 z'_2} = \frac{a(a-b)}{c(b-c)} \cdot \frac{x'_1 x'_2}{z'_1 z'_2} \cdot \frac{\xi}{\zeta}$$

$$\frac{Y}{Z} = \frac{b(a-b)}{c(c-a)} \cdot \frac{y'_1 y'_2}{z'_1 z'_2} \cdot \frac{\eta}{\zeta}$$

5) „Ueber Normalen der Ellipse und des Ellipsoids" Journ. v. Crelle. Bd. 26. S. 174. „De aequationibus quarti et sexti gradus, qui in theoria linearum et superficierum sec. gradus occurrunt." Ebendas. Bd. 53 S. 170.

6) S. auch Fiedlers Bearbeitung von Salmons Con. sections. S. 564.

Sind ferner $(x'_3 y'_3 z'_3)$ und $(x'_4 y'_4 z'_4)$ die zwei andern Punkte, deren „Normalen" durch denselben Punkt (X Y Z) gehen und ξ', η', ζ' die Coordinaten des Pols ihrer Verbindungslinie, so erhält man entsprechende Formeln für $\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}$. Die Verbindung beider liefert

$$\frac{X^2}{Z^2} = \frac{a^2(a-b)^2}{c^2(b-c)_2} \cdot \frac{x'_1 x'_2 x'_3 x'_4}{z'_1 z'_2 z'_3 z'_4} \cdot \frac{\xi\xi'}{\zeta\zeta'},$$

also vermöge der Gleichung 1.), deren Wurzeln die Grössen $\frac{x'_1}{z'_1}$ sind,

$$\frac{\xi\xi'}{\zeta\zeta'} = \frac{c}{a} \text{ und } \frac{\eta\eta'}{\zeta\zeta'} = \frac{c}{b}$$

Die Punkte $(\xi \eta \zeta)$ und $(\xi' \eta' \zeta')$ sind also durch folgende Gleichungen an einander gebunden

$$a\,\xi\xi' = b\,\eta\eta' = c\,\zeta\zeta' \tag{6.}$$

oder auch

$$\xi : \eta : \zeta = \frac{1}{a\xi'} : \frac{1}{b\eta'} : \frac{1}{c\,\zeta'}.$$

4. Durchläuft nun der Punkt (XYZ) eine der Curven I für welche die 4 Geraden N ein constantes Doppelverhältniss haben, so werden die Pole $(\xi\eta\zeta)$, $(\xi' \eta' \zeta')$ ein und dieselbe andere Curve beschreiben, und wird dieselbe vermöge der Relationen 6.) zwischen den Coordinaten der beiden Punkte gewisse ausgezeichnete Eigenschaften besitzen. Um die Gleichung dieser Curve zu erhalten, hat man nur die X, Y, Z in Gleichung I durch die ξ, η, ζ auszudrücken. Nun erhält man sofort für die Berührungs-Punkte der von (ξ, η, ζ) ausgehenden Tangenten

$$\frac{x'_1 x'_2}{z'_1 z'_2} = \frac{c(c\,\zeta^2 + b\,\eta^2)}{a(a\,\xi^2 + b\,\eta^2)}, \quad \frac{y'_1 y'_2}{z'_1 z'_2} = \frac{c(c\,\zeta^2 + a\,\zeta^2)}{b(a\,\xi^2 + b\,\eta^2)}$$

und hiemit nach obigen Gleichungen

$$X:Y:Z = (a-b)(c-a)\,.\,(c\zeta^2+b\eta^2)\,\xi \quad : (a-b)(b-c)\,.\,(c\zeta^2+a\xi^2)\,\eta \quad : (b-c)(c-a)\,.\,(a\xi^2+b\eta^2)\,\zeta \tag{7.}$$

Man sieht, dass diese Werthe von $\frac{X}{Z}$, $\frac{Y}{Z}$ unverändert bleiben, wenn man die ξ, η, ζ durch die ξ', η', ζ' ersetzt, (vermöge der Relationen 6). Man hat nun in Gleichung I die cubische Substitution 7.) zu machen, und erhält für den Ort des Punktes $(\xi\eta\zeta)$ eine Gleichung 18. Grads, nämlich

$$F^3 - 27\,.\,m\,abc\,.\,G^2\,\xi^2\eta^2\zeta^2 = o \tag{8.}$$

wo

$$F = a\xi^2(c\zeta^2+b\eta^2)^2 + b\eta^2(c\zeta^2+a\xi^2)^2 + c\zeta^2(a\xi^2+b\eta^2)^2$$
$$G = (a\xi^2+b\eta^2)(b\eta^2+c\zeta^2)(c\zeta^2+a\xi^2)$$

Aber diese Curve 18. Ordnung zerfällt in drei Curven 6. Ordnung. Denn es ist allgemein

$$(\alpha+\beta)^2\gamma+(\beta+\gamma)^2\alpha+(\gamma+\alpha)^2\beta = (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)+4\alpha\beta\gamma$$

Mithin ist

$$F = G + 4\,abc\,\xi^2\eta^2\zeta^2$$

und Gleichung 8.) wird

$$(G+4\,abc\,\xi^2\eta^2\zeta^2)^3 - 27\,m\,.\,abc\,G^2\,\xi^2\eta^2\zeta^2 = o \tag{8¹}$$

Sind mithin ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die Wurzeln der Gleichung

$$(\varrho+4)^3 - 27\,m\,.\,\varrho^2 = o \tag{9.}$$

so zerfällt die Curve 8.) in die drei Curven 6. Ordnung

$$G-\varrho_1\cdot abc\xi^2\eta^2\zeta^2 = o,\; G-\varrho_2\cdot abc\xi^2\eta^2\zeta^2 = o,\; G-\varrho_3\cdot abc\xi^2\eta^2\zeta^2 = o \cdot \mathrm{II}.$$

Diese drei Curven entsprechen den drei verschiedenen Arten, in welchen die vier durch einen Punkt M gehenden Geraden N_i sich in Paare abtheilen lassen, oder auch den drei fundamentalen Doppelverhältnissen, zu welchen die vier Geraden N_i Veranlassung geben. Der Pol $(\xi\eta\zeta)$ der Verbindungslinie der Fusspunkte des einen Paares der Geraden N_i und der Pol $(\xi'\eta'\zeta')$ der Verbindungslinie der Fusspunkte des andern Paars liegt immer auf derselben Curve, wie mittelst der Relationen 6) unmittelbar sich ergibt und zu jedem Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Curve ist der entsprechende $(\xi'\eta'\zeta')$ nach dem oben angeführten von Joachimsthal (resp. Cayley) gegebenen Verfahren leicht zu construiren.

5. Die Gleichungen dieser Curven lassen sich aber noch auf eine andere bemerkenswerthe Form bringen. Es ist nämlich auch

$$(\alpha+\beta)^2\gamma+(\beta+\gamma)^2\alpha+(\gamma+\alpha)^2\beta=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$$

mithin

$$F=(a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2)(ab\,\xi^2\eta^2+bc\,\eta^2\zeta^2+ca\,\zeta^2\xi^2)+3\,abc\,\xi^2\eta^2\zeta^2$$

und, da $G=F-4\,abc\,\xi^2\eta^2\zeta^2$, so nehmen die Gleichungen 10.) folgende Form an

$$(a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2)(ab\xi^2\eta^2+bc\eta^2\zeta^2+ca\zeta^2\xi^2)-(\varrho_h+1)\,abc\xi^2\eta^2\zeta^2=o \quad \text{(II}'$$

$(h=1,2,3)$; oder also die Gleichungen dieses Systems von Curven sind von der Form

$$U.W=\varrho_h+1=\text{const.} \qquad \text{(II}''.$$

wo

$$U=a\xi^2+b\eta^2+c\zeta^2$$

$$W=\frac{1}{a\xi^2}+\frac{1}{b\eta^2}+\frac{1}{c\zeta^2},$$

also $U=o$ die Gleichung des gegebenen Kegelschnitts ist, $W=o$ die Gleichung derjenigen Curve 4. Ordnung ist, welche man erhält, wenn man U in Bezug auf V polarisirt und sodann in Bezug auf das U und V gemeinsame Polardreieck quadratisch transformirt.

6. Fallen zwei Gerade N_1 zusammen, so hat man entweder $m=\infty$ oder $m=1$. Im ersteren Falle besteht der Ort des Durchschnitts der Geraden N aus den drei Seiten des Polardreiecks; an die Stelle der Curven II treten sodann die 9 Geraden, bestimmt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{matrix} a\xi^2+b\eta^2=o, & b\eta^2+c\zeta^2=o, & c\zeta^2+a\xi^2=o \\ \xi=o, & \eta=o, & \zeta=o \end{matrix}\right\} \quad (10.$$

alle doppelt gezählt.

Für $m = 1$, in welchem Falle der Durchschnitt der Geraden N auf der „Evolute" sich bewegt, hat die Gleichung 9.) die Wurzel $\varrho_1 = -1$, und zwei gleiche Wurzeln $\varrho_2 = \varrho_3 = +8$. Die Curve für $\varrho_1 = -1$ zerfällt aber nach Gl. II' in die zwei Curven

$$U = o \text{ und } W = o \tag{11.}$$

Mit dem Zusammenfallen zweier Geraden N_1, fällt nämlich auch ein Pol $(\xi\eta\zeta)$ auf den Kegelschnitt U und beschreibt denselben, wenn der Durchschnitt der Geraden N die „Evolute" durchlauft. Der Pol der Verbindungslinie der Fusspunkte der beiden andern Geraden N beschreibt die Curve 4. Ordnung $W = o$. Die Pole aber der Verbindungslinien der zwei letzteren Fusspunkte mit dem Fusspunkt der zwei zusammenfallenden „Normalen" N beschreiben die Curve 6. Ordnung

$$G - 8\,abc\,\xi^2\eta^2\zeta^2 = o \tag{12.}$$

oder

$$UW = 9$$

welche doppelt zu zählen ist.

Dem harmonischen Verhältniss der Geraden N_1 entspricht der Werth $m = 2$. Eine der Wurzeln der Gleichung 9.) ist sodann $\varrho_1 = 2$, die entsprechende Curve

$$UW = 3$$

Die zwei andern Wurzeln ϱ sind $20 \pm 12\sqrt{3}$.

Dem äquianharmonischen Verhältniss der Geraden N_1 endlich entspricht der einzige Werth $m = o$; die drei Curven II fallen in eine zusammen

$$G + 4\,abc\,\xi^2\eta^2\zeta^2 = o\,.$$

oder

$$UW = -3\,.$$

Allgemein sind die 3 Wurzeln der Gleichung 9.) reell, wenn $m > 1$. In diesem Falle sind die vier Normalen und auch die drei Curven II reell; ist hingegen $m < 1$, so sind zwei Wurzeln ϱ_h imaginär, eine der Curven II ist allein reell, entsprechend dem Umstande, dass in diesem Falle zwei der Normalen N imaginär sind.

7. Was nun die Singularitäten dieser Curven II anbetrifft, so haben sie sämmtlich die Eckpunkte A, B, C des den Kegelschnidten U und V gemeinsamen Polardreiecks zu Doppelpunkten, (wovon einer isolirt). Die Tangenten in diesen Doppelpunkten sind für alle Curven des Systems dieselben, nämlich die von diesen Punkten an den Kegelschnitt U gehenden Tangentenpaare

$$a\xi^2 + b\eta^2 = o, \quad b\eta^2 + c\zeta^2 = o, \quad c\zeta^2 + a\xi^2 = o \qquad (13.$$

welche denselben auf den gegenüberliegenden Seiten des Polardreiecks berühren. Diese Tangenten sind zugleich in diesen Doppelpunkten A, B, C Wendetangenten, so dass mithin jede dieser Geraden in dem betreffenden Doppelpunkt vier Punkte mit der Curve gemein hat, d. h. diese Punkte A, B, C sind Inflexionsknoten (flexe node, wie Cayley solche Punkte nennt). Diese Geraden berühren ausserdem die Curven 6. Ordnung sämmtlich in denselben Punkten, in welchen sie den Kegelschnitt U berühren, so dass mithin diese Curven sechs Berührungspunkte mit U haben, auf den Seiten des Polardreiecks gelegen.

Die Curven des Systems bestehen aus zwei getrennten Zügen; für $m > 1$ verlaufen die beiden Züge ausserhalb U; für $m < 1$ aber ist ein Theil ausserhalb U gelegen, der andere verlauft innerhalb.

Ausser den allen Curven gemeinsamen Doppelpunkten A, B, C kommen keine weiteren Doppelpunkte in dem System vor, ausser für $m = 1$. Es ist desshalb die Curve 12.)

$$G - 8\,abc\,\xi^2\eta^2\zeta^2 = o$$

die einzige nicht zerfallende Curve des Systems, mit mehr als drei Doppelpunkte. Sie besitzt nämlich noch die vier (imaginären) Doppelpunkte

$$a\xi^2 = b\eta^2 = c\zeta^2 \tag{14.}$$

welche den vier (imaginären) Doppelpunkten der „Evolute" entsprechen und in welchen entsprechende Punkte (ξ, η, ζ) und $(\xi' \eta' \zeta')$ zusammenfallen.

Die Curven 6. Ordnung des Systems II sind mithin mit Ausnahme der Curve 12.) von der Classe 24 und vom Geschlechte 7, während die Curve 12.) von der Classe 16 und dem Geschlechte 3 ist. Diese Charakteristiken der Curven des Systems lassen sich übrigens auch aus denen der Curven des Systems I ableiten. Da nämlich jedem Punkt (XYZ) einer Curve des Systems I, zwei Punkte $(\xi \eta \zeta)$, $(\xi' \eta' \zeta')$ auf jeder der demselben Werthe von m entsprechenden Curven des Systems II entsprechen, jedem Punkt auf einer Curve des Systems II aber ein Punkt auf der entsprechenden Curve I, so besteht zwischen den Punkten zweier entsprechender Curven der beiden Systeme eine (1,2) Correspondenz. Wenn nun auf zwei Curven vom Geschlechte p, resp. p′ eine (x,x′) Correspondenz statt hat, wenn ferner y, y′ die Anzahl der Coïncidenzpunkte auf der einen und andern Curve bezeichnen, so hat man nach Herren Zeuthen[8]) die Relation:

$$y - y' = 2x'(p-1) - 2x(p'-1)$$

Mittelst dieser Formel findet man aus dem Geschlechte der Curven I das der Curven II wie oben, wenn man nur bemerkt, dass vermöge der Gleichungen 6.) ein Zusammenfallen der Punkte $(\xi \eta \zeta)$, $(\xi' \eta' \zeta')$ nur für $m = 1$, $\varrho = 8$ eintreten kann. Für $\varrho = 8$ aber (Curve 12.) tritt der besondere Fall ein, dass jedem der vier imaginären Doppel-

8) Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes. Math. Ann. Bd. III. S. 150.

punkte 14.) einer der vier imaginären Doppelpunkte der „Evolute“ entspricht, in der Weise, dass, wenn der Punkt (XYZ) durch einen dieser letzteren hindurchgeht die zwei Punkte $(\xi\eta\zeta)$, $(\xi'\eta'\zeta')$ durch einen der erstern hindurchgehen, und zwar auf demselben Curvenzweige; und mithin ist jeder dieser Doppelpunkte 14.) als zwei eigentliche Coïncidenzpunkte zu zählen.