Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXIV. Jahrgang 1894.

München.
Verlag der K. Akademie.
1895.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Bemerkungen über zahlentheoretische Eigenschaften der Legendre'schen Polynome.

Von Gustav Bauer.

(*Eingelaufen 4. August.*)

Das Legendre'sche Polynom n^{ten} Grades sei nach Legendrescher Bezeichnung durch X_n bezeichnet; dann ist X_n Coefficient von z^n in der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \cdots$$

und es berechnet sich hieraus

$$X_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right) \qquad \text{I.}$$

Diese Formel kann als Definition von X_n für jeden Werth von x gelten. Nun sagt Heine in seinem „Handbuch der Kugelfunktionen" 1. Aufl. 1861, S. 7: „Nach der Bemerkung von Euler in einem Briefe an Goldbach, dass in der Entwicklung von $\sqrt[n]{1-n^2 a}$ nach aufsteigenden Potenzen von a alle Coefficienten von a ganze Zahlen werden, erkennt man sofort, dass X_n nur eine Potenz von 2 zum numerischen Nenner hat", indem er beifügt, dass ihm diese Eigenschaft der Polynome X_n von mir mitgetheilt worden sei.[1])

1) In der 2. Auflage seines Handbuchs, I. Th. S. 14, kommt Heine auf diese Eigenschaft der Polynome X_n zurück. Man kann hinzufügen,

Diese Bemerkung in Bezug auf die Coefficienten der Form I und der bekannte Satz, dass alle Polynome X_n für $x=1$ den Werth 1 annehmen, ist, so viel ich weiss, das einzige, was bisher in zahlentheoretischer Beziehung von diesen Polynomen bekanntgegeben wurde.

Es soll nun hier zunächst gezeigt werden, dass diese Polynome auch die bemerkenswerthe Eigenschaft besitzen, dass, wenn x irgend eine ungerade ganze Zahl ist, sie selbst ungerade ganze Zahlen sind.

2. Die Polynome X_n genügen bekanntlich der Differentialgleichung

$$(1-x^2)\frac{d^2 X_n}{d x^2} - 2x\frac{d X_n}{d x} + n(n+1) X_n = 0 \qquad \text{II.}$$

Differentiirt man diese Gleichung wiederholt und setzt sodann in diesen Gleichungen $x=1$, so ergiebt sich sofort die Relation

$$\frac{d^m X_n}{d x^m} = \frac{n(n+1)-m(m-1)}{2m}\cdot\frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}}$$
$$= \frac{(n-m+1)(n+m)}{2m}\,\frac{d^{m-1} X_n}{d x^{m-1}}$$

und hiemit, da $X_n = 1$ für $x=1$,

$$\frac{d X_n}{d x} = \frac{n(n+1)}{2},\quad \frac{d^2 X_n}{d x^2} = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 3},$$
$$\frac{d^3 X_n}{d x^3} = \frac{(n-2)(n-1)\cdots(n+3)}{2\cdot 4\cdot 6} \quad \text{u. s. f.}$$

Mittels dieser Werthe erhält man die Entwicklung

$$X_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}(x-1) + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 4}\frac{(x-1)^2}{1\cdot 2}$$
$$+\cdots+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots 2n}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\cdot\frac{(x-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n},$$

---

sagt er hier, „dass sämmtliche Coefficienten mit 4^n multiplicirt ganze Zahlen sind". Diese Angabe ist nicht genau. Denn man beweist leicht mittelst dem in n^0 4 angegebenen Verfahren, dass die Coefficienten der Formel I höchstens 2^{n-1} im Nenner haben.

welche sich auch schreiben lässt

$$X_n = 1 + \frac{n\,(n+1)}{1^2}\,\frac{x-1}{2} + \frac{(n-1)\,n\,(n+1)\,(n+2)}{1^2 \cdot 2^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{(n-2)\,(n-1)\cdots(n+3)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^3 + \cdots \tag{1}$$

Die Coefficienten von $\left(\frac{x-1}{2}\right)^k$ in dieser Entwicklung wollen wir mit $A_n^{(k)}$ bezeichnen, so dass

$$X_n = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x-1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \cdots + A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n, \tag{1'}$$

wo allgemein

$$A_n^{(k)} = \frac{(n-k+1)\,(n-k)\cdots\,(n+k)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}. \tag{2}$$

Setzt man in dieser Reihe $-x$ statt x, so hat man zugleich

$$(-1)^n X_n = 1 - A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - + \cdots \tag{3}$$

und wenn man in 1) $x+2$ statt x setzt,

$$X_{n(x+2)} = 1 + A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \cdots \tag{4}$$

Also ist auch

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} + (-1)^n X_n\right) &= 1 + A_n^{(2)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 \\ &\quad + A_n^{(4)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^4 + \cdots \\ \frac{1}{2}\left(X_{n(x+2)} - (-1)^n X_n\right) &= A_n^{(1)}\left(\frac{x+1}{2}\right) \\ &\quad + A_n^{(3)}\left(\frac{x+1}{2}\right)^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Aus Gleichung 3) folgt sofort für $x = 1$, dass die Coefficienten A_n der Relation genügen

$$1 - A_n^{(1)} + A_n^{(2)} - + \cdots \pm A_n^{(n)} = (-1)^n \qquad (6)$$

3. Es soll nun bewiesen werden, dass die Coefficienten A_n sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.[1])

Hiezu haben wir zunächst zu fragen, wie oft eine gegebene Primzahl θ in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots N$ enthalten ist. Diese Frage ist schon von Legendre[2]) beantwortet. Ist nämlich $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$ die grösste ganze Zahl, welche in dem Bruch $\frac{N}{\theta}$ enthalten ist, so ist die gesuchte Zahl, d. i. der Exponent der höchsten Potenz von θ, welche in $1 \cdot 2 \cdots N$ enthalten ist, durch die Formel gegeben

$$\sigma = E\left(\frac{N}{\theta}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^2}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^3}\right) + \cdots,$$

wo die Reihe fortzusetzen ist, bis der Nenner θ^i grösser als N wird.

Theilt man nun N in zwei oder mehrere ganze Zahlen, z. B. in die drei Zahlen n, n', n'', sodass $N = n + n' + n''$,

---

1) Setzt man in den Gleichungen 1) 3) $x = \cos\alpha$, $\frac{1-x}{2} = \sin^2\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1+x}{2} = \cos^2\frac{1}{2}\alpha$, so werden dieselben

$$X_n(\cos\alpha) = 1 - A_n^{(1)}\sin^2\frac{1}{2}\alpha + A_n^{(2)}\sin^4\frac{1}{2}\alpha - + \cdots$$

$$(-1)^n X_n(\cos\alpha) = 1 - A_n^{(1)}\cos^2\frac{1}{2}\alpha + A_n^{(2)}\cos^4\frac{1}{2}\alpha - + \cdots$$

In dieser Form sind die Gleichungen längst bekannt und schon von Dirichlet gegeben worden (Crelle J. Bd. XVII). Aber man scheint nicht bemerkt zu haben, dass die Coefficienten dieser Reihen sämmtlich ganze Zahlen sind, was allerdings auch wenig Interesse bietet, so lange man die Polynome X nur für Werthe von $x < 1$ betrachtet.

2) Legendre, Théorie des Nombres, 3me éd. 1830, T. I p. 10.

so ist klar, dass $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ nicht kleiner sein kann als $E\left(\frac{n}{\theta^i}\right) + E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right) + E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$; wohl aber kann es grösser als diese Summe sein; denn bleiben bei der Division von n, n', n'' durch θ^i die Reste α, β, γ und ist $\alpha+\beta+\gamma > \theta^i$, so wird $E\left(\frac{N}{\theta^i}\right)$ um 1 oder auch 2 grösser sein, als diese Summe. Hieraus folgt, dass für irgend eine Primzahl θ

$$\Sigma E\left(\frac{N}{\theta^i}\right) \geqq \Sigma E\left(\frac{n}{\theta^i}\right) + \Sigma E\left(\frac{n'}{\theta^i}\right) + \Sigma E\left(\frac{n''}{\theta^i}\right)$$

die Summen auf die Potenzen von θ ausgedehnt, die in N enthalten sind.

Hieraus folgt unmittelbar der Satz[1]): I n d e m A u s d r u c k

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\cdots}, \quad \text{wo } N = n + n' + n'' + \cdots,$$

ist jede in dem Nenner enthaltene Primzahl wenigstens ebenso oft im Zähler enthalten als im Nenner und der Ausdruck stellt mithin eine ganze Zahl dar.

Der Coefficient $A_n^{(k)}$ kann nun auf diese Form gebracht werden, nämlich

$$A_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$$

Es ist hier $N = n + k$, und diese Zahl ist in die 3 Theile $n-k$, k, k, zerlegt. Also ist $A_n^{(k)}$ eine ganze Zahl.

4. In dem besonderen Falle, wenn $\theta = 2$, ist für $N = 2^p$ die Zahl $\sigma = 2^p - 1$. Nun kann aber irgend eine Zahl N in der Form

$$N = 2^p + 2^q + 2^r + \cdots, \qquad p > q > r \cdots$$

dargestellt werden, und die Anzahl der Faktoren 2, welche in dem Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots N$ enthalten sind, ist also $N - h$,

1) Unter $N!$ ist hier das Produkt $1\cdot2\cdot3\cdots N$ zu verstehen.

wenn h die Anzahl der Glieder 2^p, $2^q \cdots$ in N ist (Legendre a. a. O. p. 12).

Frägt man nun, wie oft der Faktor 2 in

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!} \qquad (N = n + n' + n'')$$

vorkommt, so ersieht man, dass der ungünstigste Fall eintritt, wenn n, n', n'' selbst Potenzen von 2 sind, $n = 2^p$, $n' = 2^q$, $n'' = 2^r$, also $N = 2^p + 2^q + 2^r$; in diesem Falle ist der Faktor 2 nämlich im Zähler und im Nenner $N - 3$ mal enthalten und die Zahl $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ enthält den Faktor 2 gar nicht, und ist also eine ungerade Zahl. Eine Ausnahme hievon tritt ein, wenn zwei der Zahlen n, n', n'' oder auch alle drei gleich sind; denn ist $n' = n'' = 2^q$, so ist $N = 2^p + 2^{q+1}$ und der Faktor 2 ist dann in dem Produkt $1 \cdot 2 \cdots N$ noch $N - 2$ mal enthalten, während er im Nenner $n!\,n'!\,n''!$ nur $N - 3$ mal enthalten ist. Aber man sieht, dass ähnliches eintritt, sowie überhaupt zwei der Zahlen n, n', n'' gleich sind. Ist $n' = n'' = 2^v + 2^w + \cdots$ und i die Anzahl dieser Glieder 2^v, $2^w \cdots$ so wird $N!$ die Zahl 2 wenigstens i-mal öfter enthalten, als der Nenner $n!\,n'!\,n''! \cdots$ und man kann daher obigen Satz dahin ergänzen:

Sind in dem Ausdruck

$$\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!\ldots} \qquad (N = n + n' + n'' + \cdots)$$

zwei (oder mehrere) der Zahlen n, n', n'', $\cdots$ gleich, so ist derselbe eine ganze gerade Zahl.

Dieser Fall tritt ein bei dem Coefficienten $A_n^{(k)} = \frac{(n+k)!}{(n-k)!\,k!\,k!}$ und folglich ist dieser Coefficient immer eine gerade Zahl.

5. Setzt man in den Gleichungen 1) 3) für x irgend eine ungerade ganze Zahl, $x = 2y + 1$, so werden dieselben

$$\left.\begin{aligned} X_{n(2y+1)} &= 1 + A_n^{(1)} y + A_n^{(2)} y^2 + \cdots + A_n^{(n)} y^n \\ (-1)^n X_{n(2y+1)} &= 1 - A_n^{(1)}(y+1) + A_n^{(2)}(y+1)^2 + \cdots \\ & \pm A_n^{(n)}(y+1)^n \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

woraus die in Nr. 1 angegebene Eigenschaft dieser Polynome X_n hervorgeht, dass sie ganze ungerade Zahlen werden, wenn für x irgend eine ungerade Zahl $2y+1$ gesetzt wird. Zugleich ersieht man, dass dieselben sowohl nach Potenzen von y, als auch nach Potenzen von $y+1$ in ganzzahlige Reihen entwickelt werden können.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich ferner, dass für $x = 2y+1$

$$X_n - X'_n$$

für irgend welche Indices n, n' immer durch y theilbar ist, und ebenso, dass, je nachdem n, n' gleichartig oder ungleichartig sind, im ersten Falle

$$X_n - X'_n,$$

im zweiten

$$X_n + X'_n$$

durch $y+1$ theilbar sind.

Aus den Gleichungen 5) folgt für $x = 2y-1$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(X_{n(2y+1)} + (-1)^n X_{n(2y-1)}\right) \\ &\quad = 1 + A_n^{(2)} y^2 + A_n^{(4)} y^4 + \cdots \\ &\frac{1}{2}\left(X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}\right) \\ &\quad = A_n^{(1)} y + A_n^{(3)} y^3 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

woraus ersichtlich, dass auch

$$X_{n(2y+1)} - (-1)^n X_{n(2y-1)}$$

immer durch y theilbar ist.

Wenn nun aber x eine gerade Zahl ist, so zeigen die Gleichungen 1) und 3), dass sich X_n nur ausnahmsweise auf eine ganze Zahl reduciren wird.[1]) Da das höchste Glied der Reihe 1) $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ ist, so steht darin 2^n im Nenner; aber

$$A_n^{(n)}=\frac{(2\,n)!}{n!\,n!}$$

hat, wenn $n=2^p+2^q\,2^r+\cdots$ mit i-Gliedern ist und also $2\,n=2^{p+1}+2^{q+1}+2^{r+1}+\cdots$, nach Nr. 4 $(2\,n-i)-(n-i)-(n-i)=i$ Faktoren 2, so dass in $A_n^{(n)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ nur noch 2^{n-i} im Nenner bleibt. Nur wenn n eine Potenz von 2 ist, also $i=1$, bleibt noch 2^{n-1} im Nenner. Das vorletzte Glied $A_n^{(n-1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-1}$ kann in jedem Falle höchstens 2^{n-2} im Nenner behalten; das drittletzte höchstens nur 2^{n-3} u. s. f. Man sieht also, dass, wenn x eine gerade Zahl ist, X_n höchstens den Nenner 2^{n-1} haben kann; dies wird aber nur eintreten, wenn n eine Potenz von 2 ist; in allen andern Fällen hat X_n, wenn x eine ganze gerade Zahl ist, 2^{n-2} oder eine niedrigere Potenz von 2 im Nenner.

6. Da, wenn n gerade, X_n nur gerade Potenzen von x enthält, und dasselbe von $\frac{X_n}{x}$ gilt, wenn n ungerade, so lassen sich diese Polynome auch nach Potenzen von x^2-1 entwickeln. Man erhält für gerade n

$$X_n=1+a_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)+a_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2+\cdots \\ +a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}, \tag{9}$$

wo

$$a_n^{(1)}=\frac{n\,(n+1)}{1^2},\quad a_n^{(2)}=\frac{(n-2)\,n\cdot(n+1)\,(n+3)}{1^2\cdot 2^2},\ \ldots$$

---

1) Dies tritt z. B. ein für $n=3$.

allgemein

$$a_n^{(k)} = \frac{(n-2k+2)(n-2k+4)\cdots n\cdot(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2},$$

Für ungerade n

$$\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right) + b_n^{(2)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^2 + \cdots + b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{x^2-1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} \tag{10}$$

wo

$$b_n^{(1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{1^2},\ b_n^{(2)} = \frac{(n-3)(n-1)\cdot(n+2)(n+4)}{1^2\cdot 2^2},\cdots$$

allgemein

$$b_n^{(k)} = \frac{(n-2k+1)(n-2k+3)\cdots(n-1)\cdot(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots k^2}$$

Die Coefficienten a, b in diesen Reihen sind ebenfalls sämmtlich ganze und gerade Zahlen, wie sogleich gezeigt werden soll.

Setzt man $x = 2y+1$, so wird $\frac{x^2-1}{4} = y(y+1)$ und man erhält also, wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, folgende ganzzahlige Reihenentwicklungen nach Potenzen von $y(y+1)$[1]:

---

1) Für $x = \cos\alpha$ erhält man aus den Gleichungen 9) 10) für gerade n

$$X_n(\cos\alpha) = 1 - a_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + a_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^n$$

für ungerade n

$$X_n(\cos\alpha) = \cos\alpha\left\{1 - b_n^{(1)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2 + b_n^{(2)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^4 - + \cdots \pm b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

Diese einfachsten ganzzahligen Entwicklungen von $X_n(\cos\alpha)$ sind, so viel ich weiss, bisher noch nicht gegeben worden.

für gerade n

$$X_n = 1 + a_n^{(1)} y (y+1) + a_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}} (y+1)^{\frac{n}{2}} \tag{11}$$

für ungerade n

$$\frac{X_n}{x} = 1 + b_n^{(1)} y (y+1) + b_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}} (y+1)^{\frac{n-1}{2}} \tag{12}$$

Entwickelt man in 11) die Potenzen von $(y+1)$ und vergleicht sodann die Reihe mit der Reihe 7) so ergiebt sich

$$a_n^{(1)} = A_n^{(1)}, \quad a_n^{(2)} = A_n^{(2)} - a_n^{(1)} = A_n^{(2)} - A_n^{(1)},$$

und allgemein

$$\left.\begin{aligned} A_n^{(2k)} &= a_n^{(k)} + \tbinom{k+1}{k-1} a_n^{(k+1)} + \tbinom{k+2}{k-2} a_n^{k+2} + \cdots + \tbinom{2k-1}{1} a_n^{(2k-1)} + a_n^{(2k)} \\ A_n^{(2k-1)} &= \tbinom{k}{k-1} a_n^{(k)} + \tbinom{k+1}{k-2} a_n^{(k+1)} + \cdots + \tbinom{2k-2}{1} a_n^{(2k-2)} + a_n^{(2k-1)} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Da in diesen Recursionsformeln der höchste Coefficient a immer den Faktor 1 hat, so berechnet sich hieraus $a_n^{(2k)}$, resp. $a_n^{(2k-1)}$ durch eine Reihe der A_n mit ganzen Coefficienten. Also sind auch die a ganze gerade Zahlen.

Die Vergleichung der Coefficienten von y^n und y^{n-1} in den beiden Reihen 7) und 11) liefert

$$a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} = A_n^{(n)}, \quad \frac{n}{2} a_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} = A_n^{(n-1)},$$

woraus

$$A_n^{(n-1)} = \frac{n}{2} A_n^{(n)} \tag{15}$$

sich ergiebt. Das Bildungsgesetz der A_n zeigt, dass diese Relation in der That stattfindet, und zwar für gerade und ungerade n. Es ist also auch $A_n^{(n-1)}$ immer durch n theilbar. Dies ist aber nur ein specieller Fall des allgemeinen Gesetzes, dass $A_n^{(k-1)}$ immer durch k theilbar ist. (Nr. 7.)

Ebenso giebt die Vergleichung der Reihe 12) mit der Reihe 7) Recursionsformeln für die Berechnung der b_n aus den A_n; dieselben sind wegen des Faktors $x = 2y + 1$ etwas complicirter als die Formeln 13) haben aber mit diesen die Eigenschaft gemein, dass der höchste Coefficient b_n in denselben den Faktor 1 hat. Man erhält also für die Coefficienten b_n ebenfalls eine Reihe der A_n mit ganzen Coefficienten. Also sind auch die b_n ganze gerade Zahlen.

Speciell ergiebt sich

$$b_n^{(1)} = A_1 - 2$$

und aus der Vergleichung der Coefficienten von y^{n-1} und y_n

$$n\, b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = A_{n-1}^{(n-1)}, \quad 2\, b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = A_n^{(n)}$$

Hieraus folgt zunächst wieder die Relation 14); ferner für den letzten Coefficienten b_n

$$b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} = \frac{1}{2} A_n^{(n)} \tag{15}$$

Hiebei ist zu bemerken, dass, wie wir in Nr. 5 sahen, $A_n^{(n)}$ immer den Faktor 2 mehrfach enthält, ausgenommen, wenn n eine Potenz von 2 ist. Dieser Fall ist aber hier ausgeschlossen, da in der Reihe 12) n eine ungerade Zahl ist; also ist $b_n^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}$ auch eine gerade Zahl.

7. Bildet man aus den Gleichungen 7) die Differenz $X_{n+1} - X_{n-1}$, so trennt sich in den Coefficienten der Faktor $2n+1$ los und man erhält für $x = 2y + 1$

$$\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1}) = 2y + \mathfrak{A}_n^{(2)} y^2 + \mathfrak{A}_n^{(3)} y^3 + \cdots + \mathfrak{A}_n^{(n+1)} y^{n+1} \tag{16}$$

oder auch

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{2n+1}(X_{n+1}-X_{n-1}) = 2(y+1) - \mathfrak{A}_n^{(2)}(y+1)^2 \\ + \mathfrak{A}_n^{(3)}(y+1)^3 - + \cdots \pm \mathfrak{A}_n^{(n+1)}(y+1)^{n+1},\end{aligned} \tag{17}$$

wo von $k=2$ an

$$\mathfrak{A}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-k+2)(n-k+3)\cdots(n+k-1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}.$$

Dass trotz der Abtrennung des Faktors $2n+1$ aus der Differenz $A_{n+1}^{(k)} - A_{n-1}^{(k)}$ diese Coefficienten $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ wieder ganze gerade Zahlen sind, lässt sich auf folgende Weise zeigen. Die Polynome X genügen der Relation

$$(n+1)X_{n+1} - (2n+1)xX_n + nX_{n-1} = 0 \qquad \text{III.}$$

Hieraus zieht man leicht

$$\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1}) = \frac{xX_n - X_{n-1}}{n+1}$$

Ist x eine ungerade ganze Zahl, so sind die Zähler der Brüche auf beiden Seiten ganze gerade Zahlen; und da $2n+1$ und $n+1$ keinen Faktor gemein haben, so folgt, dass

$$\begin{aligned} & X_{n+1} - X_{n-1} \quad \text{durch } 2n+1 \\ \text{und} \quad & xX_n - X_{n-1} \quad \text{durch } \quad n+1 \end{aligned}$$

theilbar sind, wenn x eine ungerade Zahl. Da also die Reihen in den Gleichungen 16), 17) für alle ganze Zahlen y ganze gerade Zahlen darstellen, so lässt sich schliessen, dass auch die Coefficienten $\mathfrak{A}$ ganze und gerade Zahlen sind.

Dies lässt sich aber auch mittelst des Satzes in Nr. 3 erweisen. Denn es ist

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{(n+k-1)!}{(n-k+1)!\,k!\,(k-1)!}$$

Nun sagt der Satz aus, dass $\frac{N!}{n!\,n'!\,n''!}$ eine ganze Zahl ist, wenn $N = n + n' + n''$. In $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist $N = n + k - 1$, aber die Summe der drei Zahlen im Nenner ist $n + k = N + 1$. Der Satz lässt sich also nicht unmittelbar anwenden. Aber wenn eine Primzahl θ die Zahl k theilt, so theilt sie $k-1$ nicht und ist also ebenso oft in $(k-2)!$ enthalten, als in $(k-1)!$; theilt θ aber k nicht, so ist θ jedenfalls ebenso oft in $(k-1)!$ enthalten als in $k!$ Man kann daher bei der Bestimmung wie oft eine Primzahl θ in $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)}$ als Faktor steht immer die Summe der drei Zahlen im Nenner um 1 verringern, d. h. auf N reduciren, und sodann wie in in Nr. 3 schliessen, dass jede Primzahl wenigstens so oft im Zähler steht als im Nenner. $\mathfrak{A}_n^{(k)}$ ist also eine ganze gerade Zahl.

Hieraus ergiebt sich auch eine Eigenschaft der Coefficienten A_n. Denn die Vergleichung der Ausdrücke für $\mathfrak{A}_n$ und A_n liefert

$$\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n^{(k)} = \frac{1}{k} A_n^{(k-1)}$$

und, da $\frac{1}{2}\mathfrak{A}_n$ eine ganze Zahl, so folgt, dass die Zahl $A_n^{(k-1)}$ durch k theilbar ist.

8. Bekanntlich giebt $\frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$ das Integral von X_n, so genommen, dass es für $x = 1$ verschwindet, d. h. es ist

$$\int_1 X_n \, dx = \frac{1}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1})$$

Die Gleichungen 16) 17) zeigen also, dass dieses Integral von X_n ebenfalls eine ganze Zahl ist (und zwar eine gerade), wenn x eine ungerade Zahl $2y+1$ ist, und geben die Entwicklung dieser Zahl nach Potenzen von y oder $y+1$.

Man kann auch die Gleichungen 11) und 12) benützen, um eine Entwicklung des Integrals nach Potenzen von $y(y+1)$ zu erhalten.

Es ergiebt sich dann für $x = 2y+1$, wenn n ungerade

$$\int_1 X_n\,dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = 2y(y+1) + \mathfrak{a}_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{a}_n^{\left(\frac{n+1}{2}\right)} y^{\frac{n+1}{2}} (y+1)^{\frac{n+1}{2}} \tag{18}$$

wo

$$\mathfrak{a}_n^{(2)} = 4 \cdot \frac{(n-1)(n+2)}{1^2 \cdot 2^2}, \quad \mathfrak{a}_n^{(3)} = 6 \cdot \frac{(n-3)(n-1) \cdot (n+2)(n+4)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

und allgemein von $k = 2$ an

$$\mathfrak{a}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-2k+3)(n-2k+5) \cdots (n-1) \cdot (n+2)(n+4) \cdots (n+2k-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}$$

Wenn n gerade

$$\int_1 X_n\,dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} = (2y+1)\left\{2y(y+1) + \mathfrak{b}_n^{(2)} y^2 (y+1)^2 + \cdots + \mathfrak{b}_n^{\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}} (y+1)^{\frac{n}{2}}\right\} \tag{19}$$

wo

$$\mathfrak{b}_n^{(2)} = 4 \cdot \frac{(n-2)(n+3)}{1^2 \cdot 2^2}, \quad \mathfrak{b}_n^{(3)} = 6 \cdot \frac{(n-4)(n-2) \cdot (n+3)(n+5)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}$$

und allgemein von $k = 2$ an

$$\mathfrak{b}_n^{(k)} = 2k \cdot \frac{(n-2k+2)(n-2k+4) \cdots (n-2) \cdot (n+3)(n+5) \cdots (n+2m-1)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdots k^2}$$

Auch hier lässt sich wie oben (Nr. 6) erweisen, dass die Coefficienten $\mathfrak{a}_n^{(k)}$, $\mathfrak{b}_n^{(k)}$ sämmtlich ganze gerade Zahlen sind.

9. Da der Differentialquotient von X_n durch die Formel

$$\frac{d\,X_n}{d\,x} = (2\,n-1)\,X_{n-1} + (2\,n-5)\,X_{n-2} + \cdots$$

gegeben ist, so folgt, dass, wenn x eine ungerade Zahl ist, auch $\frac{d\,X_n}{d\,x}$ eine ganze Zahl ist, und man sieht, dass sich diese Eigenschaft auch auf die höheren Differentialquotienten von X_n überträgt.

Das Polynom X_n hat also die merkwürdige Eigenschaft, dass, wenn x eine ungerade ganze Zahl ist, nicht nur X_n selbst, sondern auch $\int_1 X_n\,d\,x$ und alle Differentialquotienten von X_n ganze Zahlen sind.

10. Es möge nun hier noch eine Tabelle der Entwicklungen von X_n nach den Gleichungen 7), 11), 12) und von $\int_1 X_n\,d\,x$ nach den Gleichungen 16—19) folgen. Es ist darin auf der linken Seite immer x durch $2\,y+1$ zu ersetzen.

$$X_1 = 1 + 2\,y$$
$$-\,X_1 = 1 - 2\,(y+1)$$
$$X_2 = 1 + 6\,y + 6\,y^2$$
$$+\,X_2 = 1 - 6\,(y+1) + 6\,(y+1)^2$$
$$X_3 = 1 + 12\,y + 30\,y^2 + 20\,y^3$$
$$-\,X_3 = 1 - 12\,(y+1) + 30\,(y+1)^2 - 20\,(y+1)^3$$
$$X_4 = 1 + 20\,y + 90\,y^2 + 140\,y^3 + 70\,y^4$$
$$+\,X_4 = 1 - 20(y+1) + 90(y+1)^2 - 140(y+1)^3 + 70(y+1)^4$$
$$X_5 = 1 + 2\cdot 15\,y + 3\cdot 70\cdot y^2 + 4\cdot 140\,y^3 + 5\cdot 126\,y^4 + 6\cdot 42\,y^5$$
$$X_6 = 1 + 2\cdot 21\,y^2 + 3\cdot 140\cdot y + 4\cdot 420\cdot y^3 + 5\cdot 630\cdot y^4 + 6\cdot 462\cdot y^5 + 7\cdot 132\cdot y^6$$
$$X_7 = 1 + 2\cdot 28\,y + 3\cdot 252\cdot y^2 + 4\cdot 1050\cdot y^3 + 5\cdot 2310\cdot y^4 + 6\cdot 2772\cdot y^5 + 7\cdot 1716\cdot y^6 + 8\cdot 429\cdot y^7$$

* * *

$$\frac{X_1}{x} = 1$$

$$X_2 = 1 + 6\,y\,(y+1)$$

$$\frac{X_3}{x} = 1 + 10\,y\,(y+1)$$

$$X_4 = 1 + 20\,y\,(y+1) + 70\,y^2\,(y+1)^2$$

$$\frac{X_5}{x} = 1 + 28\,y\,(y+1) + 126\,y^2\,(y+1)^2$$

$$X_6 = 1 + 42\,y\,(y+1) + 378\,y^2\,(y+1)^2 + 924\,y^3\,(y+1)^3$$

$$\frac{X_7}{x} = 1 + 54\,y\,(y+1) + 594\,y^2\,(y+1)^2 + 1716\,y^3\,(y+1)^3$$

$$X_8 = 1 + 72\,y\,(y+1) + 1188\,y^2\,(y+1)^2 + 6864\,y^3\,(y+1)^3 + 12870\,y^4\,(y+1)^4$$

* * *

$$\int_1 X_1\,d\,x = \frac{1}{3}\,(X_2 - X_0) = 2\,y + 2\,y^2$$

$$-\int_1 X_1\,d\,x = 2\,(y+1) - 2\,(y+1)^2$$

$$\int_1 X_2\,d\,x = \frac{1}{5}\,(X_3 - X_1) = 2\,y + 6\,y^2 + 4\,y^3$$

$$+\int_1 X_2\,d\,x = 2\,(y+1) - 6\,(y+1)^2 + 4\,(y+1)^3$$

$$\int_1 X_3\,d\,x = \frac{1}{7}\,(X_4 - X_2) = 2\,y + 12\,y^2 + 20\,y^3 + 10\,y^4$$

$$-\int_1 X_3\,d\,x = 2(y+1) - 12(y+1)^2 + 20(y+1)^3 - 10\,(y+1)^4$$

$$\int_1 X_4\,d\,x = \frac{1}{9}\,(X_5 - X_3) = 2\,y + 20\,y^2 + 60\,y^3 + 70\,y^4 + 28\,y^5$$

$$+\int_1 X_4\,d\,x = 2(y+1) - 20(y+1)^2 + 60(y+1)^3 - 70\,(y+1)^4 + 28\,(y+1)^5$$

$$\int_1 X_5\, dx = \frac{1}{11}(X_6 - X_4) = 2y + 2\cdot 15 y^2 + 2\cdot 70 y^3 + 2\cdot 140 y^4 + 2\cdot 126 y^5 + 2\cdot 42 y^6$$

$$\int_1 X_6\, dx = \frac{1}{13}(X_7 - X_5) = 2y + 2\cdot 21 y^2 + 2\cdot 140 y^3 + 2\cdot 420 y^4 + 2\cdot 630 y^5 + 2\cdot 462 y^6 + 2\cdot 132 y^7$$

* * *

$$\int_1 X_1\, dx = 2y(y+1)$$

$$\int_1 X_2\, dx = (2y+1)\cdot 2y(y+1)$$

$$\int_1 X_3\, dx = 2y(y+1) + 10y^2(y+1)^2$$

$$\int_1 X_4\, dx = (2y+1)\,[2y(y+1) + 14y^2(y+1)^2]$$

$$\int_1 X_5\, dx = 2y(y+1) + 28y^2(y+1)^2 + 84y^3(y+1)^3$$

$$\int_1 X_6\, dx = (2y+1)[2y(y+1) + 36y^2(y+1)^2 + 132y^3(y+1)^3]$$

$$\int_1 X_7\, dx = 2y(y+1) + 54y^2(y+1)^2 + 396y^3(y+1)^3 + 858y^4(y+1)^4$$

* * *