Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVII. Jahrgang 1887.

München.
Verlag der K. Akademie.
1888.

Commission bei G. Franz.

(tab. 28), welche zu *C. spinosa* L. (tab. 26, 27) gehören; ferner *C. terniflora* DC. (tab. 39), wie schon oben p. 372 erwähnt, zu *C. horrida* L. f. (tab. 38, 39) gehörig.

Weggeblieben ist die früher von Vesque (Ann. sc. n. p. 102, n. 47) in Betracht gezogene *Capparis petiolaris* H. B. K., wie es auf Tab. L. heisst „ob specimen pessime servatum", und aus anderen *Cappareen*-Gattungen: *Morisonia multiflora* Tr. et Pl. (Ann. p. 58, n. 2) und *Roydsia suaveolens* Roxb. (Ann. p. 127, n. 1 „Hort. bot. Assam.; Anderson"). Das Uebergehen dieser beiden Pflanzen erklärt sich durch den Umstand, dass sie von Vesque schon früher (l. c.) als in ihren anatomischen Charakteren nur unerheblich verschieden von den dargestellten Arten der gleichen Gattungen *M. americana* L. und *R. parviflora* Griff. bezeichnet worden sind.

Nur scheinbar, d. h. nur im Register ist weggeblieben *Cadaba rotundifolia* Forsk. (sieh Tab. XVIII.).

Es mag mir gestattet sein, am Schlusse dieser Mittheilung meiner besonderen Freude darüber Ausdruck zu geben, dass die anatomische Methode, welche die von ihr gehegten, an anderem Orte[1]) ausgesprochenen Erwartungen schon weit übertroffen hat, sowohl was ihre Leistungen als was die Gewinnung von Anhängern betrifft, in Herrn Vesque einen so eifrigen und geschickten Förderer gefunden hat, wie er in den zu dieser Mittheilung Veranlassung gewordenen Abhandlungen sich darstellt. Möge er die Wissenschaft bald mit neuen solchen Arbeiten bereichern!

---

1) Sieh Radlkofer: Ueber die Methoden in der botanischen Systematik, insbesondere die anatomische Methode. Akademische Festrede. München 1883.

Ueber die für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindenden algebraischen Beziehungen.

Von Leo Königsberger in Heidelberg.

(Eingelaufen 6. November.)

Ich erlaube mir im Folgenden die wesentlichsten Resultate aus einer demnächst im Journal für Mathematik erscheinenden ausführlicheren Arbeit über die Bedingungen mitzutheilen, unter denen für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung irgend welche algebraische Beziehungen zwischen den Fundamentalintegralen und deren Ableitungen bestehen, und welche zugleich die allgemeine Form dieser algebraischen Beziehungen feststellen.

Um zunächst gewisse specielle Formen solcher Beziehungen in's Auge zu fassen, schicke ich einige allgemeine Bemerkungen voraus, die auch für die Theorie der algebraischen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung von Interesse sind. Aus dem Satze, dass, wenn für eine algebraische Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\overset{(m)}{y} = f\left(x, y, y', \ldots \overset{(m-1)}{y}\right)$$

zwischen zwei Integralen y_1 und y_2, von denen das erstere nicht schon einer Differentialgleichung niederer Ordnung Genüge leistet, eine algebraische Beziehung

$$y_2 = \omega\left(x, y_1, y'_1 \ldots \overset{(m-1)}{y_1}\right)$$

besteht, diese erhalten bleibt, wenn für y_1 ein willkührliches anderes und für y_2 ein passendes anderes Integral derselben Differentialgleichung substituirt wird, ergiebt sich in bekannter Bezeichnung iterirter Functionen das folgende Theorem:

Wenn für eine algebraische Differentialgleichung ein Integral eine algebraische Function ω eines anderen Integrales η_1, dessen Ableitungen und der unabhängigen Variabeln ist, so lassen sich die unendlich vielen Integrale der Differentialgleichung in Gruppen von der Form ordnen

$$(A) \ldots \left| \begin{array}{l} \eta_1, \omega(x, \eta_1, \eta'_1, \ldots), \omega^2(x, \eta_1, \eta'_1, \ldots), \ldots \\ \eta_2, \omega(x, \eta_2, \eta'_2, \ldots), \omega^2(x, \eta_2, \eta'_2, \ldots), \ldots \\ \eta_3, \omega(x, \eta_3, \eta'_3, \ldots), \omega^2(x, \eta_3, \eta'_3, \ldots), \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

die im Allgemeinen unendlich viele Elemente enthalten werden; ist die Differentialgleichung irreductibel, so werden die Gruppen entweder die Form (A) haben, oder, wenn die Anzahl der Elemente **einer** Gruppe eine endliche ist die Gestalt

$$\begin{array}{c} \eta_1, \omega(x, \eta_1, \eta'_1, \ldots), \omega^2(x, \eta_1, \eta'_1, \ldots), \ldots \omega^{\delta-1}(x, \eta_1, \eta'_1, \ldots) \\ \text{worin } \omega^\delta(x, \eta_1, \eta'_1, \ldots) = \eta_1 \\ \eta_2, \omega(x, \eta_2, \eta'_2, \ldots), \omega^2(x, \eta_2, \eta'_2, \ldots), \ldots \omega^{\delta-1}(x, \eta_2, \eta'_2, \ldots) \\ \text{worin } \omega^\delta(x, \eta_2, \eta'_2, \ldots) = \eta_2 \\ \eta_3, \omega(x, \eta_3, \eta'_3, \ldots), \omega^2(x, \eta_3, \eta'_3, \ldots), \ldots \omega^{\delta-1}(x, \eta_3, \eta'_3, \ldots) \\ \text{worin } \omega^\delta(x, \eta_3, \eta'_3, \ldots) = \eta_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

wobei jede Gruppe gleich viel und unter einander verschiedene Elemente enthält, und die Anzahl der Gruppen selbst unendlich gross ist.

Daraus wird gefolgert,

dass für eine homogene lineare irreductible Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, von welcher ein Integral eine algebraische Function eines anderen und dessen Ableitungen ist, sich die Integrale derart in eine endliche Anzahl von Gruppen

$$\begin{array}{l} \eta_1, \omega(x, \eta_1, \eta'_1, ..), ... \omega^{\lambda-1}(x, \eta_1, \eta'_1, ...) \\ \eta_2, \omega(x, \eta_2, \eta'_2, ..), ... \omega^{\lambda-1}(x, \eta_2, \eta'_2, ...) \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \eta_\delta, \omega(x, \eta_\delta, \eta'_\delta, ..), ... \omega^{\lambda-1}(x, \eta_\delta, \eta'_\delta, ...) \end{array}$$

vertheilen lassen, dass $\delta < m$, die Elemente einer Gruppe linear von einander unabhängig sind und eine höhere Iterirung als die $\lambda - 1^{te}$ nur eine lineare Function der Elemente derselben Gruppe liefert.

Diese Sätze werden auf einige spezielle Fälle angewandt, und die Sätze von Abel über die algebraische Auflösbarkeit von Gleichungen in Analogie gebracht mit der Zurückführbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen auf solche der Fuchs'schen Klasse.[1])

Ich gehe sodann dazu über, die oben aufgeworfene Frage ganz allgemein anzugreifen. Zunächst wird der folgende Satz bewiesen, welcher der ganzen weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt wird:

Wenn für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung, in welcher der Coefficient der zweiten Ableitung Null ist, eine algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen besteht, so existirt ausser derjenigen,

1) Vergl. eine demnächst in den mathematischen Annalen erscheinende Arbeit.

welche stets die Determinante eines Fundamentalsystems einer Constanten gleich macht, immer noch eine von diesen beiden unabhängige algebraische Relation zwischen eben diesen Grössen,

und aus diesem lässst sich schliessen,

dass, wenn für eine Differentialgleichung dritter Ordnung der angegebenen Art eine solche algebraische Beziehung besteht, nothwendig auch für die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (in der Normalform) eine algebraische Relation existirt zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen mit Adjungirung jenes einen zu Hülfe genommenen Integrales und dessen Ableitungen;

die Eigenschaft dieser letzteren Beziehung, wenn nur drei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung dritter Ordnung algebraisch homogen unter einander verbunden sind, ist leicht festzustellen.

Es bleibt nun die Frage zu erörtern, unter welchen Bedingungen für die lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (in der Normalform) eine Beziehung der angegebenen Art stattfinden kann und wenn nicht — eine eingehende Untersuchung lässt erkennen,

dass, wenn $y_1, y_2, \ldots$ Integrale algebraischer Differentialgleichungen beliebiger Ordnung bedeuten, für eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform mit algebraisch aus der unabhängigen Variabeln, den Integralen $y_1, y_2, \ldots$ und deren Ableitungen zusammengesetzten Coefficienten nie auch mit Zuziehung der eben bezeichneten Grössen ein algebraischer Zusammenhang zwischen zwei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfinden kann, wenn die Differentialgleichung eine mit Adjungirung jener Grössen irreductible ist, und die Verbindung mit dem oben ausgesprochenen Theorem liefert den Satz,

dass für eine lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung in der Normalfom nur dann eine algebraische Beziehung zwischen drei Fundamentalintegralen derselben und deren Ableitungen bestehen kann, wenn die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung (in der Normalform) eine mit Adjungirung jenes Integrales und dessen Ableitungen reductible ist.[1])

Da sich aber auch die Umkehrung dieses Satzes leicht erweisen liess, so ergab sich der folgende Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung in der Normalform ausser der Determinantenbeziehung noch eine algebraische Relation zwischen der unabhängigen Variabeln, drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen besteht, ist die, dass die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform mit Adjungirung dieses Integrales und dessen Ableitungen reductibel ist — und die gesuchten Relationen sind bekannt, wenn man die algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung aufstellen kann, denen die Integrale jener Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

1) Die Irreductibilität einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung zieht auch stets die Irreductibilität der auf die Normalform gebrachten Differentialgleichung derselben Ordnung nach sich.

Mit Hülfe aller dieser Sätze lässt sich nun aber auch für lineare Differentialgleichungen dritter Ordnung, die nicht in der Normalform gegeben sind, das nachfolgende Theorem herleiten:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Relation zwischen der unabhängigen Variabeln, drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen besteht, ist die, dass die mit Hülfe einer dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung in der Normalform mit Adjungirung dieses Integrales, dessen Ableitungen und der Exponentialfunction, deren Exponent durch die Quadratur über den ersten Coefficienten der Differentialgleichung dritter Ordnung dargestellt wird, reductibel ist, — und die gesuchten Relationen sind bekannt, wenn man die Differentialgleichung erster Ordnung aufstellen kann, denen die Integrale jener Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

Nachdem nun alles auf die Untersuchung der Irreductibilitätsbedingungen einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückgeführt worden, untersuchen wir die Eigenschaften einer solchen Differentialgleichung, deren Coefficienten algebraische Functionen von Integralen beliebiger Differentialgleichungen sind und die mit Adjungirung eben dieser Grössen reductibel sein sollen, wobei wir zum Zwecke der Untersuchung die drei Fälle von einander trennen, in denen die Differentialgleichung dadurch reductibel wird, dass sie ein in den adjungirten Grössen algebraisches Integral hat, oder zwei ihrer Integrale in einer mit Adjungirung dieser Grössen algebraischen Beziehung zu einander stehen oder endlich die Reductibilität statthat, ohne dass die Differentialgleichung eine dieser beiden Eigenschaften besitzt. Ich beschränke mich an dieser Stelle darauf, aus der in meiner Arbeit angestellten ausführlichen Untersuchung nur den Schlusssatz anzuführen:

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten algebraisch aus der unabhängigen Variabeln, Integralen algebraischer Differentialgleichungen und deren Ableitungen zusammengesetzt sind, **reductibel** ist, so hat dieselbe entweder ein in diesen Grössen algebraisch zusammengesetztes Integral, oder, wenn dies nicht der Fall ist, gibt es entweder zwei und nur zwei particuläre Fundamentalintegrale, welche linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung mit gleichartig zusammengesetzten Coefficienten genügen und zwar dann und nur dann, wenn zwei particuläre Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung in einer mit Adjungirung der bezeichneten Grössen algebraischen Beziehung zu einander stehen, wobei alle anderen Integrale gleichartigen Differentialgleichungen erster Ordnung aber höheren Grades genügen, oder es leisten, wenn eine solche algebraische Beziehung ausgeschlossen ist, sämmtliche Integrale der Differentialgleichung zweiter Ordnung linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung Genüge,

und zu gleicher Zeit folgt

als nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Differentialgleichung

$$z'' = \varphi(x, y_1, y'_1, \ldots y_2, y_2', \ldots) \cdot z$$

reductibel ist, die, dass die Differentialgleichung erster Ordnung

$$t' = t^2 - \varphi(x, y_1, y_1', \ldots y_2, y_2', \ldots)$$

ein algebraisches Integral besitzt, und zwar hat die Differentialgleichung zweiter Ordnung ein und nur ein algebraisches Integral, wenn die Differentialgleichung erster Ordnung nur **ein** algebraisches Integral besitzt, und es stehen zwei Fundamentalintegrale in algebraischer Beziehung zu einander, wenn die letztere Differentialgleichung durch zwei und nur zwei algebraische Integrale befriedigt wird, während für den Fall, dass die Differentialgleichung erster Ordnung nur algebraische Integrale besitzt, Reductibilität der Differentialgleichung zweiter Ordnung ohne Existenz algebraischer Beziehungen zwischen den Integralen selbst stattfindet.

Werden nun die oben für die Differentialgleichung dritter Ordnung ausgesprochenen Sätze mit den eben gefundenen zusammengestellt, so erhalten wir das folgende Theorem:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass für eine homogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Relation zwischen der unabhängigen Variabeln, drei Fundamentalintegralen und deren Ableitungen besteht, ist die, dass die mit Hülfe eines dieser Integrale abgeleitete lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung entweder ein mit Adjungirung dieses Integrales, dessen Ableitungen und der Exponentialfunction, deren Exponent durch die Quadratur über den ersten Coefficienten der Differentialgleichung dritter Ordnung dargestellt wird, algebraisches Integral besitzt, oder dass zwei und nur zwei Fundamentalintegrale derselben mit Adjungirung jener Grössen gleichartigen linearen homogenen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen, oder dass endlich alle ihre Integrale Differentialgleichungen der letztgenannten Art angehören.

Nachdem nun die Bedingungen gefunden, unter denen für eine lineare Differentialgleichung dritter Ordnung eine algebraische Beziehung zwischen ihren Fundamentalintegralen und deren Ableitungen stattfindet, lässt sich auch mit Hülfe der oben für die reductibeln Differentialgleichungen zweiter Ordnung aufgestellten Sätze die Form derselben angeben, und wir finden,

dass, wenn die reducirte Differentialgleichung zweiter Ordnung der irreductibeln Differentialgleichung dritter Ordnung dadurch reductibel wird, dass sie ein mit Adjungirung eines Integrales der letzteren Differentialgleichung und dessen Ableitungen algebraisches Integral besitzt, die Ableitungen dreier Fundamentalintegrale sich als algebraische Functionen eben dieser drei Integrale oder die zu einem Integrale gehörigen Fundamentalintegrale sich durch dieses Integral und dessen Ableitungen algebraisch ausdrücken lassen, während in allen anderen Fällen die Relationen die Form haben

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' = F_1\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right)\left(y_1 y_2' - y_2 y_1'\right)$$

und

$$y_1 y_3'' - y_3 y_1'' = F_2\left(x, \frac{y_1'}{y_1}, \frac{y_1''}{y_1}\right)\left(y_1 y_3' - y_3 y_1'\right)$$

worin y_1, y_2, y_3, die drei Fundamentalintegrale der Differentialgleichung dritter Ordnung und F_1, F_2 algebraische Functionen bedeuten.