

Sitzungsberichte
der
mathematisch-physikalischen Classe
der
k. b. Akademie der Wissenschaften
zu **München.**

Band XIX. Jahrgang 1889.

München.
Verlag der K. Akademie.
1890.

In Commission bei G. Franz.

Sitzung vom 2. März 1889.

1. Herr P. GROTH legt eine von Herrn EUGEN BLASIUS verfasste Abhandlung: „über die Beziehungen zwischen den Theorien der Krystallstructur und über die systematische Eintheilung der Krystalle“ vor.

2. Herr W. v. GÜMBEL spricht „über das Erdbeben in Neuburg a. D. vom 22. Februar dieses Jahres“.

Ueber die Beziehungen zwischen den Theorien der Krystallstructur und über die systematische Eintheilung der Krystalle;

von Eug. Blasius.

(Eingelaufen 2. März.)

Einleitung:

Historische Uebersicht.

In den letzten Jahren ergaben sich verschiedene Umstände, die von Bedeutung für die Theorie der Krystallstructur sind. Namentlich stellte sich heraus, dass die Theorie von Herrn Sohncke, so wie sie in seinem Werke „Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur“ 1879 niedergelegt war, erweiterungsfähig ist, und dass ihr Ausbau, wenn nicht nothwendig, so doch höchst geeignet erscheint, um einige

unbequeme Ausnahmefälle zu beseitigen. Ausserdem hat noch gelegentlich der Discussion, die über diesen Gegenstand stattfand, Herr Wulff eine weitere Theorie entwickelt, die jetzt neben der erweiterten Sohncke'schen der älteren Frankenheim-Bravais'schen Theorie gegenübersteht.

Zum Verständniss der folgenden Betrachtungen wird es nothwendig sein, auf den wesentlichen Gedankengang der drei Theorien einzugehen.¹⁾ Es sollen dann die Beziehungen zwischen denselben angewandt werden, um die eine für die andere nutzbar zu machen und Mängel zu beseitigen, die, wie wir sehen werden, fast überall noch vorhanden sind.

Bravais veröffentlichte seine Theorie in mehreren sehr umfangreichen Abhandlungen.²⁾ In einem wichtigen Punkte stimmten seine Resultate mit früher veröffentlichten Ansichten von Frankenheim überein, nämlich soweit sie sich auf die sogenannten parallelepipedischen Raumgitter bezogen. Diese, die man am kürzesten als Gesammtheit der Schnittpunkte dreier Systeme von parallelen äquidistanten Ebenen definiren kann, bringen verschiedene Eigenschaften der Krystalle recht gut zum Ausdruck. So ist vor allen Dingen eine solche Structur in demselben Sinne homogen, wie die Krystalle, kein Punkt lässt sich von den übrigen unterscheiden. In

1) Diese Erörterungen sind mit Rücksicht auf Leser, welche die eine oder andere der in Betracht kommenden Arbeiten nicht kennen, sehr ausführlich geworden. Derjenige, welcher mit der bezüglichen Literatur vertraut ist, kann die Seiten 48—55 überschlagen.

2) Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. Journal de mathématiques pures et appliquées par Liouville. T. 14. p. 141—180. 1849. (Dazu: Note sur les polyèdres symétriques de la géométrie p. 137—140.)

Mémoire sur les systèmes formés par des points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace. Journ. d. l'École Polytechnique 33. cahier. T. XIX. 2. p. 1—128. 1850.

Études cristallographiques. Journ. d. l'École Polytechnique 34. cahier p. 1—176. 1851.

denselben Richtungen und Entfernungen, in denen von einem Punkte aus gesehen andere Punkte des Systems liegen, sind auch von einem andern Punkte aus solche vorhanden, und doch sind die verschiedenen Richtungen im Raume nicht untereinander gleichwerthig, wie in einem isotropen Körper. Nur die Raumgitterstructur genügt diesen Anforderungen. Der Umstand, dass zugleich die Structur noch eine der wesentlichsten und auffallendsten Eigenschaften der Krystalle erklärt, nämlich den Zonenzusammenhang der Flächen, oder was das gleiche ist, das Gesetz von der Rationalität der Indices, ist noch besonders hervorzuheben. Die einzige Annahme, die hierbei noch nothwendig ist, ist die, dass eine Krystallfläche eine solche Ebene ist, die drei nicht in einer Geraden liegende Punkte enthält. Da dies der einzige Fall ist, in dem eine Ebene unendlich viele Punkte des Gitters nach verschiedenen Richtungen, d. h. nicht auf einer Geraden gelegen, enthalten kann, so wird man der Annahme einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit zusprechen.

Die Raumgitter als gemeinsame Grundlage der Frankenheim-Bravais'schen Theorie können 14 voneinander unterscheidbare Formen annehmen. Diese zerfallen ihrer Symmetrie nach in 7 Gruppen, entsprechend den Krystall-Systemen, wobei das rhomboëdrische als ein besonderes System und nicht als Hemiëdrie des hexagonalen aufgefasst wird. Abgesehen von der rhomboëdrischen Form, die ja von vielen Autoren für eine hemiëdrische gehalten wird, ist in der Theorie von Frankenheim-Bravais, soweit sie sich auf die Raumgitter stützt, für die Hemiëdrien und verwandte Erscheinungen keine Erklärung möglich; denn wenn auch mehrere von den 14 Formen in ein System gehören, wie z. B. im regulären (3) und im rhombischen (4), so unterscheiden sich diese nicht voneinander wie hemiëdrische oder tetartoëdrische Formen, sondern stellen sämmtlich den holoëdrischen Typus des betreffenden Krystallsystems dar.

Bravais half sich also hierfür, indem er auf die Form der Moleküle zurückging, durch die er die einfachen Punkte im Raumgitter ersetzte, so dass an die Stelle eines Punktes der Schwerpunkt eines mehr oder weniger symmetrischen Moleküles trat. Auf diese Weise ergeben sich natürlich leicht Anordnungen, welche den sämtlichen bekannten Unterabtheilungen der Systeme entsprechen. Man braucht ja nur, wie Delafosse es gethan hat, den Molekülen die Gestalt zu geben, die ein Krystall der betreffenden Abtheilung selbst haben soll. Allerdings verdeutlicht uns dies Verfahren nur Hemiëdrien u. s. w., die wir auf anderem Wege schon gefunden haben, so dass unzweifelhaft der von Bravais selbst eingeschlagene Weg der wissenschaftlichere ist, nämlich die möglichen Symmetriearten der Moleküle durch allgemeine geometrische Betrachtungen in erschöpfender Weise aufzusuchen.

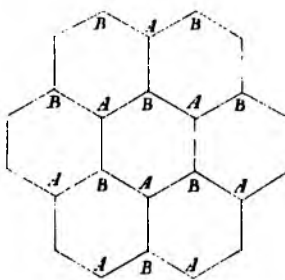
Viele Jahre später erkannte Herr Sohncke, dass die Art und Weise, wie Bravais die Raumgitter als Structurform für die Krystalle aufgestellt hatte, nicht einwurfsfrei sei. Er fand, dass der Gittertheorie eigentlich zwei Sätze zu Grunde liegen, nämlich:

„dass die Punktvertheilung in einem unbegrenzt gedachten krystallinischen Punkthaufen um jeden Massenpunkt dieselbe ist, wie um jeden anderen“
und zweitens:

„dass alle Moleküle einander parallel liegen.“

Die Formulirung des ersten Satzes kann nicht leicht zu Missverständnissen führen. Die Bedeutung des zweiten müssen wir uns etwas genauer ansehen. Da die Form der Moleküle bei der Bravais'schen Theorie erst in zweiter Linie in Betracht kommt, so bezieht sich der Satz, der ja zur Ableitung der Raumgitter dient, nicht auf die Form, sondern auf die gegenseitige Lage der Moleküle, und zwar soll er aussagen, dass das Strahlensystem, welches wir von irgend einem Punkte

aus nach allen übrigen ziehen, nicht nur congruent ist demjenigen von irgend einem andern Punkte aus, sondern dass die homologen Strahlen zweier solcher Systeme auch parallel sind. Ein Beispiel, wo die Bedingung des ersten Satzes erfüllt ist, die des zweiten nicht, bieten uns in der Ebene die Ecken von lückenlos aneinandergelegten regulären Sechsecken (Fig. 1). Alle Punkte A und B zeigen um sich herum die gleiche Anordnung der übrigen, aber die abwechselnden Punkte (A) zeigen diese Anordnung nicht in paralleler Stellung, wie die andern (B). Das System entspricht auch in der That keinem Raumgitter. Die Bedeutung der beiden Grundsätze kann man sich auch auf die Weise klar machen, dass man sich das ganze System beweglich denkt. Kann man nun dasselbe auf einem ihm identischen Systeme so verschieben, dass nicht nur ein beliebiger Punkt P des beweglichen mit einem beliebigen Punkte des festen Systems zur Deckung kommt, sondern auch alle übrigen Punkte des einen mit solchen des andern, so genügt das System (wie das in Fig. 1 gegebene) dem ersten Satze. Kann man dies alles aber ohne Drehung nur durch eine Parallelverschiebung des beweglichen Systems erreichen, so genügt das System zugleich dem zweiten Satze.



(Fig. 1.)

Herr Sohncke legte sich nun die Frage vor, ob man nicht die Beschränkung, die in dem zweiten Satze liegt, fallen

lassen könne und gründete seine umfangreiche Theorie ausschliesslich auf den ersten Satz. Herr Wiener hatte schon vorher auf solche Systeme aufmerksam gemacht, ohne sich indessen eingehender mit deren Theorie zu befassen. Herr Sohncke konnte 65¹⁾ verschiedene Formen unterscheiden und zwar fanden sich darunter Beispiele, nicht nur für die Holoëdrien, sondern auch für die Hemiëdrien und Tetartoëdrien, so dass die Form der Moleküle nur zur Erklärung von Hemi-morphismen herbeigezogen werden musste. Eine einzige bekannte Tetartoëdrie, die rhomboëdrische des hexagonalen Systems hat ebenfalls keinen Vertreter unter den Sohncke'schen Punktsystemen. Auf diesen Fall machte erst vor kurzem Herr Wulff²⁾ aufmerksam.

Eine unmittelbare Consequenz aus dem Grundsatz, auf dem sich die Sohncke'sche Theorie aufbaut, ist die, dass die Moleküle nicht in dem Sinne untereinander gleichwerthig sind, wie in der Frankenheim-Bravais'schen Theorie. Im Allgemeinen lassen sich nämlich in den Sohncke'schen Punktsystemen Punkte unterscheiden, wie in dem obigen Beispiele die Punkte A und B, um welche die Anordnung der übrigen in parallelen Richtungen nicht gleich ist, weil die Bedingung des zweiten Satzes nicht erfüllt ist. Man kann ohne Zweifel gegen solche Systeme geltend machen, dass sie eigentlich dem Begriffe, den wir uns von der Homogenität eines Krystalls gebildet haben, widersprechen; denn legen wir z. B. kleine Kugeln um kleinere Punktgruppen einer solchen Anordnung, so werden durchaus nicht, wie wir es bei den Krystallen voraussetzen, die Eigenschaften derselben in parallelen Richtungen gleich sein. Erst wenn wir Theile, die eine im Verhältniss zum Molekular-Abstand be-

1) Zwei von den ursprünglichen 66 Formen sind nach Schönflies identisch.

2) L. Wulff. Ueber die regelmässigen Punktsysteme, *Ztschr. f. Kryst.* Bd. XIII p. 503—566, 1888.

deutende Grösse haben, durch eine umhüllende Fläche herausausschneiden, wird man annehmen dürfen, dass es keinen Einfluss auf die Eigenschaften des dadurch umgrenzten Theiles hat, wenn wir die Fläche mit sich selbst parallel beliebig verschieben. Obwohl nun Herr Sohncke diesen Umstand in seiner Theorie nicht übersehen hatte, kam doch vor einiger Zeit Herr Wulff darauf zurück und benutzte ihn gegen dieselbe. Er hielt sich besonders an die Vorstellung vom Krystallwachsthum. Setzen sich die einzelnen materiellen Punkte nacheinander am Krystall ab, so kann sich an irgend einer Stelle der Krystalloberfläche ebensogut ein Punkt A als ein Punkt B (Fig. 1) befinden. Ganze Flächen können zeitweilig lauter Punkte A, dann lauter B enthalten. Da die Anordnung der einen gegen die übrigen zwar dieselbe ist, wie die der anderen, aber nicht in parallelen Richtungen dieselbe ist, so könnte man im einen und im anderen Falle in parallelen Richtungen verschiedene Eigenschaften an der Oberfläche des Krystalls erwarten, während man doch thatsächlich annimmt, in bestimmten Richtungen der Oberfläche seien die Eigenschaften immer dieselben, mag der Krystall klein oder gross sein. Für Herrn Sohncke löst sich dieser scheinbare Widerspruch dadurch, dass auf die physikalischen Eigenschaften, die wir zu untersuchen im Stande sind, nicht nur einzelne Moleküle, sondern so viele Moleküle nach allen Richtungen einen Einfluss haben, dass die äussersten gar nicht gegen die übrigen in Betracht kommen. Herr Wulff aber schloss, dass beim Wachsen sich so viele Moleküle zugleich auf jeder Krystallfläche absetzen, dass die Anordnung der äussersten Schicht immer wieder dieselbe wird. Denkt man sich diesen Vorgang auf verschiedenen anderen Krystallflächen, so wird man zu der Annahme gezwungen, dass sich eine bestimmte Gruppe von Molekülen bei dem Bau des Krystalls immer gleichzeitig anlagert. Die Theorie, die Herr Wulff nun aufstellt, verschmilzt Theile der Bravais'schen

mit solchen der Sohncke'schen Theorie. Sie entnimmt der ersteren die Raumgitter und der letzteren Punktgruppen, welche an die Stelle der einzelnen Punkte in den Raumgittern gesetzt werden. Kurz, Herr Wulff setzt an die Stelle der Bravais'schen Molekel eine Punktgruppe und leitet diese theilweise aus den Sohncke'schen Punktsystemen ab. Gegen die Zerlegung seiner Systeme in Punktgruppen hatte sich Herr Sohncke übrigens ausdrücklich gewahrt, er nennt sie stets in hohem Grade willkürlich, oft aber sogar geradezu unnatürlich.¹⁾ Das letzte Urtheil bezieht sich namentlich auf die Schraubensysteme. Herr Wulff, der wie bemerkt die Aufstellung von Punktgruppen als eine Nothwendigkeit ansah, musste daher die Schraubensysteme verwerfen. Er führte allerdings auch noch weitere Gründe gegen die Schraubenstructuren und einige andere an. Indessen hat Herr Sohncke auch die Richtigkeit dieser Gründe nicht anerkannt, sondern begegnete ihnen mit demselben Argument, durch welches er die vorher besprochenen Einwände des Herrn Wulff widerlegte. Wir können sie hier übergehen, weil sie im Folgenden nicht direkt in Betracht kommen. Wichtiger als diese Einwände schien Herrn Sohncke die von Herrn Wulff bewiesene Thatsache, dass sich nicht nur Hemimorphien, sondern auch die rhomboëdrische Tetartoëdrie des hexagonalen Systems nur, wenn man die Form der Moleküle zu Hülfe nimmt, durch die Sohncke'schen Punktsysteme erklären lassen. Dieser Umstand veranlasste Herrn Sohncke, seine Theorie zu erweitern und zwar so, dass der Grundsatz an die Spitze gestellt wurde:

„Ein Krystall (unendlich ausgedehnt gedacht) besteht aus einer endlichen Anzahl (1, 2, 3, . . . n) ineinandergestellter, regelmässiger, unendlicher Punktsysteme, welche sämmtlich gleich grosse und gleich gerichtete Deckschiebungen be-

1) l. c. p. 179.

sitzen. Diese ineinander stehenden Theilsysteme sind im Allgemeinen nicht congruent, auch sind die Bausteine des einen im Allgemeinen andere als die des anderen. Doch ist Congruenz der Bausteine der verschiedenen Theilsysteme nicht ausgeschlossen.*

Ganz unabhängig von den Arbeiten des Herrn Wulff und fast gleichzeitig mit denselben war Herr Haag¹⁾ auf dieselbe Erweiterung der Sohncke'schen Theorie gekommen, hatte sie aber nur an dem regulären System durchgeführt und weniger eingehend formulirt. Natürlich konnte er noch nicht den von Herrn Wulff neu entdeckten Ausnahmefall berücksichtigen, während Herr Sohncke nachwies, dass durch die neue Annahme nicht nur dieser (die rhomboëdrische Tetartoëdrie), sondern auch alle übrigen Ausnahmefälle der früheren Theorie (verschiedene Hemimorphien) beseitigt werden.

1. Vergleich der Theorien von Bravais und Wulff.

Es ist nicht leicht, sich über den jetzigen Stand der Frage zu orientiren, und daran ist namentlich Schuld, dass man auf gewisse Beziehungen zwischen den Theorien noch nicht hingewiesen hat, die für eine richtige Anwendung irgend einer von ihnen von der allergrössten Bedeutung sind. Man hat in den bisherigen Arbeiten besonders die Gegensätze betont, während man, indem man die Unterschiede erst im Anschluss an die gemeinsamen geometrischen und mechanischen Grundlagen erörtert, fast ohne Mühe Schlüsse ziehen kann, welche über die Resultate jeder einzelnen Theorie hinaus gehen. Die Theorien sollen also so behandelt werden, dass sie einander nicht ausschliessen, sondern in wesentlichen Punkten ergänzen und berichtigen.

1) Prof. Fr. Haag, die regulären Krystallkörper. Eine geometrisch-krytallographische Studie. Programm des k. Gymnasiums in Rottweil, 1887.

Merkwürdigerweise ist bei der Discussion der verschiedenen Theorien bisher auf einen Umstand nicht hingewiesen worden, der für ihre Beziehungen untereinander, sowie für den Ausbau einer allgemein gültigen Theorie äusserst wichtig ist. Dieser Umstand betrifft die Art und Weise, wie Bravais seine Polyëder oder Moleküle auffasst und die verschiedenen Formen derselben ableitete. Bravais sagt gleich im ersten Satze seines „Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique“:

„Dans les recherches que nous allons faire sur les polyèdres, nous ferons abstraction de leurs faces et de leurs arêtes pour ne considérer que leurs sommets, de sorte que tout polyèdre sera pour nous une agrégation de points distincts, de nombre limité, et distribués d'une certaine manière autour de leur centre de gravité.“

Wir sehen also:

Bravais' Polyëder waren genau solche Punktgruppen, wie die Wulff'schen. Der einzige Unterschied liegt in der Ableitung.

Während Bravais sich die Frage stellte, welche Arten der Symmetrie kann eine solche Punktgruppe überhaupt haben und durch seine Arbeit eine erschöpfende Antwort auf diese Frage gab, entwickelte Herr Wulff eine Anzahl der möglichen Formen aus den Sohncke'schen Punktsystemen und erfand selbst andere, um Lücken auszufüllen. Man wird dem Weg, den Bravais einschlug, unbedingt den Vorzug geben. Ganz abgesehen von dem, was Herr Sohncke, wie wir oben pag. 54 schon erwähnten, von vornherein gegen die Zerlegung seiner Systeme in Punktgruppen vorbrachte, fehlt bei der Methode des Herrn Wulff der Nachweis, dass alle möglichen Fälle erschöpft sind. Bei Herrn Wulff dienen die Punktgruppen dazu, um das System der Hemiëdrien und Tetartoëdrien, welches er auf andere Weise abgeleitet hat, zu exemplificiren. Auf Grund des Vorstehenden ist es nun doch noch nicht möglich, die Theorie von Herrn Wulff zu

verwerfen. Es könnte recht gut sein, dass die Arbeit, die Bravais für seine Abhandlung über die Symmetriearten der Polyëder ausgeführt hat, bei Herrn Wulff in seinen Abhandlungen über die verschiedenen Hemiëdrien u. s. w. enthalten wäre. Man könnte sogar darin, dass Herr Wulff die Systeme und ihre Unterabtheilungen vor und unabhängig von den Punktanordnungen, von der eigentlich sogenannten Krystallstructur behandelt, einen Vorzug seiner Methode sehen; denn dem praktischen Krystallographen ist das Verfahren, welches Herr Wulff dabei anwendet, geläufig und er gelangt dabei ohne Einführung neuer Begriffe zu Resultaten, welche die Bravais'sche Theorie erst nach einer langen und dem Krystallographen weniger leicht verständlichen Ableitung erreicht. Die Wulff'sche Theorie der regelmässigen Punktsysteme darf in diesem Lichte besehen nur als eine Ergänzung seiner Theorie der Krystallsysteme betrachtet werden. Eigentlich ist es ganz gleichgültig, ob man von dem holoëdrischen Punktgitter ausgeht und allmählig durch Bevorzugung von Flächen und Flächengruppen die Symmetrie verringert und nachher Punktgruppen sucht, die so eingesetzt werden, dass nur die verminderte Symmetrie übrig bleibt, oder ob man die Symmetrie der Punktgruppe selbst mehr und mehr herabsetzt und immer die entsprechende Flächencombination aufsucht. Das eine ist das Verfahren von Herrn Wulff, das andere dasjenige von Bravais. Sind beide ohne Beschränkung durchgeführt, so kann man gar keinen Unterschied in den Resultaten erwarten. Sehr auffallend ist es daher, dass die Resultate bisher noch nicht miteinander verglichen worden sind. Es ergibt sich durch einen solchen Vergleich, dass in der That Unterschiede vorhanden sind und dass hieran namentlich eine Beschränkung Schuld ist, welche die Bravais'sche Theorie enthält, und welche, trotzdem sie recht wichtig ist, später, wie es scheint, nicht mehr erwähnt wurde. Wir werden auf diese Beschränkung und ihre Bedeutung

nach einigen kurzen Bemerkungen über die verschiedenen Resultate der beiden Theorien näher eingehen.

Bravais unterscheidet im monoklinen System drei Arten von möglichen Typen, solche, die ein Centrum der Symmetrie, eine zweizählige Symmetrieaxe und eine Symmetrieebene, und solche die entweder nur die Symmetrieaxe oder nur die Symmetrieebene besitzen. Herr Wulff hat ganz kürzlich Beobachtungen an Zuckerkrystallen gemacht, die dafür sprechen, dass Zucker vorerst als monoklin aber tetartoëdrisch anzusehen ist. Allerdings sei die Möglichkeit noch nicht ausgeschlossen, dass er triklin und hemimorph ist. Diese monokline Tetartoëdrie ist aber unter den drei monoklinen Typen von Bravais nicht vertreten, denn ihr fehlen alle drei genannte Symmetriecharaktere. Für den Fall, dass durch die genaueren Winkelmessungen an den Zuckerkrystallen das monokline System ausgeschlossen werden sollte, kann man auch bei Bravais die Abtheilung, zu der die Krystalle gehören, vorfinden. Mag sich diese Frage aber entscheiden wie sie will, wir müssen anerkennen, dass in der Schluss-tabelle¹⁾ der Bravais'schen Arbeit ein Fall nicht vorgesehen ist, der von Herrn Wulff als möglich angesehen wird und für den er sogar ein Beispiel anführen kann. Ein einziger Fall dieser Art würde zwar genügen, um die Aufmerksamkeit auf diesen Punkt zu lenken und das Bedürfniss nach einer Erklärung hervortreten zu lassen, man kann aber mit Leichtigkeit mehr als einen einzigen anführen und obwohl es nicht unser Ziel ist, dieselben alle aufzuzählen, so mag noch kurz das rhombische System und seine Unterabtheilungen erwähnt werden. Bravais unterscheidet hier drei Abtheilungen. Die erste entspricht der Holoëdrie, die zweite der sphenoidischen Hemiëdrie und die dritte der Hemimorphie. Dagegen führt Herr Wulff noch ausser einer weiteren He-

1) Etudes cristallographiques Tableau VIII p. 172.

miëdrie (der monoklinen), Tetartoëdrie und sogar die Möglichkeit einer Ogdoëdrie an, also ausser den von Bravais in seiner Tabelle gegebenen Fällen eine ganze Reihe. Von Wichtigkeit ist es, dass sich der eine dieser Fälle in der Natur verwirklicht. Am Milchzucker ist nämlich zugleich Hemi-morphie und sphenoidische Hemiëdrie constatirt, wodurch eine Symmetrieform entsteht, die nach der Bravais'schen Tabelle im rhombischen Systeme nicht vorkommt. Wir haben diese Beispiele auf's Gerathewohl herausgegriffen und können daraufhin behaupten.

Viele Unterabtheilungen der Systeme, die Herr Wulff aufstellt, sind nicht in der Theorie von Bravais enthalten.

Dies Ergebniss scheint auf den ersten Blick um so unverständlicher, als man entweder Uebereinstimmung erwarten konnte, oder etwaige Lücken in den Resultaten des Herrn Wulff, da bei Bravais die Theorie der Symmetrie der Polyëder nach den drei Elementen, Centrum, Axe und Ebene der Symmetrie vollständig erschöpfend durchgeführt sein soll, während Herr Wulff selbst nicht behauptet, dass seine Theorie in dieser Hinsicht vollständig sei. Es liegt auch nicht, wie man zunächst denken könnte, ein Versehen von Bravais vor. Im Gegentheil, die Lücken, die wir gefunden haben, erklären sich dadurch, dass Bravais die Wichtigkeit eines Prinzipes erkannte, welches nach ihm mit Stillschweigen übergangen worden ist, und das doch, wie wir sehen werden, nicht nur für die Theorie der Krystallstructur im engeren Sinne, sondern für die Krystallographie überhaupt und namentlich die System-Eintheilung der Krystalle von fundamentaler Bedeutung sein muss. Wir wollen zuerst sehen, wie sich die Eintheilung der Krystalle in Systeme ohne die Einführung dieses Prinzipes gestaltet. Leider ist dieses Gebiet in keinem sehr erfreulichen Zustande. Die besten Autoren widersprechen einander und Niemand wundert sich darüber, dass von Zeit

zu Zeit ein Beobachter einen Fall entdeckt, der sich nicht einfach einer bekannten Abtheilung der Systeme einreihen lässt. Als wichtigstes Merkmal bei der Eintheilung der Krystalle können die Raumgitter gelten, da allein durch die gegenseitige Neigung der Flächen, natürlich vorausgesetzt, dass die Messungen von idealer Genauigkeit und bei mehreren Temperaturen durchgeführt seien, der Charakter des zugehörigen Raumgitters in Bezug auf Symmetrie feststeht. So kann man ohne jede Rücksicht auf die sonstigen physikalischen Eigenschaften und auf die Häufigkeit und Bedeutung der einzelnen Flächen für jeden Krystall die Symmetrie seines Raumgitters und damit sein System bestimmen, allerdings nicht so leicht das Raumgitter selbst. In dem Falle, dass mehrere Gitter zugleich die Symmetrie eines Systems besitzen, kann auf diesem Wege nicht entschieden werden, welches darunter das richtige ist. Für unseren Zweck ist das übrigens auch gar nicht nöthig.

Alle Autoren sind darüber einig, dass man durch Reduction der Symmetrie von den betreffenden Holoëdrien auf die zugehörigen Unterabtheilungen kommt. Prinzipiell werden weder die Symmetrieachsen des Gitters, noch die Ebenen noch das Centrum der Symmetrie bei dieser Ausschliessung geschont, und doch können so Formen entstehen, die kaum ein Krystallograph für möglich halten würde. Wählen wir einen extremen Fall als Beispiel. Es soll ein reguläres Punktgitter vorliegen, oder mit anderen Worten, die Winkelmessungen führen auf ein Flächennetz, das sich auf drei gleich lange, zu einander senkrechte krystallographische Axen beziehen lässt. Es sei in die Punkte des Gitters ein asymmetrisches Polyëder oder Molekül gedacht, sogar ein solches, das kein Centrum der Symmetrie besitzt. Das Resultat ist ein dem regulären System angehöriger Krystall, der optisch zweiaxig und in Bezug auf alle anderen physikalischen Eigenschaften von einem asymmetrischen, sogar noch hemimorphen

Krystalle nicht zu unterscheiden sein könnte. Nur müssten die Ausdehnungen in allen Richtungen die gleichen sein, damit das Flächennetz auch bei anderen Temperaturen dasselbe bliebe. Man müsste sich dazu vorstellen, dass die Anordnung nach einem Punktgitter des regulären Systems auch die gleiche Wärmeausdehnung in drei zu einander senkrechten Richtungen mit sich bringt, dass aber bei den übrigen Eigenschaften die Form des Moleküles eine Rolle spielt. So unwahrscheinlich ein solcher Krystall auch sein mag, so lässt sich doch ein Beweis, dass er unmöglich ist, kaum führen. Trotzdem erwähnt Herr Wulff diese Form ebensowenig wie Bravais. Bei Bravais finden wir aber ein genaues Eingehen auf die Frage, warum er diese Abtheilung und andere ausschliesst, während bei Herrn Wulff die Grenze der möglichen und unmöglichen Systeme offenbar gegen die Bravais'sche verschoben ist, wie aus dem Satze folgt, den wir oben erwiesen haben, indessen ohne, dass die Grenze theoretisch irgendwie sicher festgestellt zu sein scheint. Man kann ohne Zweifel der Wulff'schen Theorie den Mangel einer ausgesprochenen Grenzbedingung zum Vorwurfe machen, ebenso wie manches Andere, wenn man sie mit der eleganten Bravais'schen Theorie vergleicht. Dies wird aber reichlich wieder aufgewogen, wenn sich Fälle, wie beim Rohrzucker und Milchzucker herausstellen, die überhaupt in der Bravais'schen Theorie nicht enthalten sind. Diejenigen Unterabtheilungen der Systeme, die Herr Wulff nur als theoretisch möglich hinstellt, und die wir nicht in der Bravais'schen Theorie vorfinden, würden der Letzteren gegenüber keine grosse Bedeutung beanspruchen, da Bravais die geometrische Möglichkeit von vielen Abtheilungen kannte, die er trotzdem aus seiner Zusammenstellung ausschloss.

Durch den Nachweis der Tetartoëdrie am monoklinen Rohrzucker und am rhombischen Milchzucker wird die Bravais'sche Theorie unhaltbar.

Wenn wir für den Augenblick den Beweis dieser Formen für erbracht anerkennen, so müssen wir doch hervorheben, dass zwar die Theorie von Bravais damit stürzt, dass aber, und dies ist von sehr wesentlicher Bedeutung, von den Methoden Bravais' nur die Bestimmung der Grenze der möglichen gegen die unmöglichen Formen fehlerhaft zu sein braucht. Die Grenzbestimmung gründet sich im Gegensatz zu dem übrigen Hauptinhalte der Theorie auf mechanische, nicht wie jener auf rein geometrische Betrachtungen. Nachdem Bravais einerseits im Besitze aller symmetrischen Polyëder andererseits im Besitze aller Gitter war, erkannte er, dass wenn man in jedes der letzteren nacheinander alle die ersteren einsetzt, bedeutend mehr Abtheilungen sich ergaben, als damals in der Natur Vertreter fanden. Er schloss in Folge dessen und auf Grund einer mechanischen Ueberlegung, dass die Form der Polyëder das Gitter bestimme, so dass die grösstmögliche Uebereinstimmung zwischen dem Symmetriecharakter des Polyëders und dem des Gitters besteht. Mag man von der Bravais'schen Ableitung auch nicht ganz befriedigt sein, jedenfalls verdient sie in hervorragendem Maasse unsere Beachtung, denn auch bis in die neueste Zeit sind ihre Consequenzen nicht durch die Erfahrung widerlegt worden. Muss man diese Ableitung aber fallen lassen, so fällt damit nur die Grenzbestimmung von Bravais, oder mit anderen Worten, wenn wir die Tetartoëdrien des Rohrzuckers und des Milchezuckers für erwiesen halten, so sind wir zwar gezwungen, die Bravais'sche Theorie zu erweitern, dagegen ist es eine ganz andere Frage, ob wir deshalb weise daran thun, ihre Methoden zu verlassen, um an deren Stelle die Wulff'schen zu setzen. Bis jetzt ist die Bravais'sche Untersuchung über die Form der Polyëder oder wie wir sie mit gleichen Rechte nennen können über die Symmetrie der Punktgruppen die einzige abgeschlossene Arbeit über diesen Gegenstand. Wir

können also, da bisher keine Fehler in derselben nachgewiesen worden sind, schliessen, dass wir alle möglichen auf den Charakter der Symmetrieebenen, Axen und des Symmetriecentrums gegründeten Unterabtheilungen der Systeme mit Sicherheit durch Erweiterung der Bravais'schen Theorie ableiten können, wenn wir in jedes Punktgitter die sämmtlichen Bravais'schen Polyöder einsetzen.

Sind Fälle in der Natur erwiesen, die nicht in den Rahmen der Bravais'schen Theorie fallen (wie die Tetartoëdrien im rhombischen und monoklinen System), so kann und muss die Einschränkung, welche Bravais in seiner Theorie annimmt, fallen gelassen werden und seine Theorie ist so zu erweitern, dass nicht nur einzelne, sondern alle Polyöder in jedes Punktgitter eingesetzt werden. Auf diese Weise muss eine erschöpfende Theorie aller auf die drei Elemente der Symmetrie (Ebenen, Axen und Centrum) gegründeten Abtheilungen der Systeme entstehen.

Die Arbeit, die Bravais'sche Theorie durch Eliminiren einer Beschränkung derart zu erweitern, ist auf jeden Fall lohnend, wir haben sie aber für den Zweck des vorliegenden Aufsatzes nicht nöthig und lassen sie deshalb, und weil sie doch ziemlich umfangreich ist, vorläufig bei Seite. Es genügt, darauf aufmerksam zu machen, welcher Weg dabei eingeschlagen werden muss. Nur noch ein Punkt bleibt zu erörtern, der von Bedeutung ist und zu Schwierigkeiten führen kann. Herr Wulff hat nämlich Abtheilungen unterschieden, ich nenne nur seine drei Tetartoëdrien im regulären System, die sich nicht durch die drei Kennzeichen der Symmetrie trennen lassen. Solche Abtheilungen sind der Bravais'schen Theorie, selbst der erweiterten fremd. Obwohl manche Annahmen des Herrn Wulff nicht recht begründet sind und auch hier der Beweis, dass alle Fälle derart er-

schöpft sind, nicht vorliegt, so darf man gewiss verlangen, dass auf sie Rücksicht genommen wird. Wir werden daher zu dem Schlusse geführt.

Man darf sich weder auf die erweiterte Bravais'sche Theorie allein, noch auf die Wulff'sche Theorie allein stützen, wenn man allen theoretisch möglichen Fällen Rechnung tragen will.

Damit ist nun nicht gesagt, dass nicht eine jede von ihnen zu dem gleichen Umfange ergänzt werden kann, aber soweit sie jetzt entwickelt sind, sind beide nicht vollständig. Um die geometrischen Möglichkeiten ganz zu erschöpfen, müsste die Bravais'sche Theorie in zwei Richtungen erweitert werden.

1) Wir müssten, wie wir oben schon angaben, die Beschränkung, die Bravais selbst einführte, fallen lassen. Dann haben wir eine Eintheilung der Krystalle, die auf Grundlage der drei Symmetriemerkmale (Centrum, Axe und Ebene) beruht und alle Fälle umschliesst.

2) Fälle, die sich nach diesen allgemeinen und fundamentalen Merkmalen nicht unterscheiden lassen, wie die drei Tetartoëdrien des regulären Systems u. dgl. m., können doch auf andere Weise und unter anderen Annahmen noch Differenzen unter sich darbieten. Die Möglichkeit dieser Differenzen muss ebenfalls mit in Betracht gezogen werden.

Die Wulff'sche Theorie muss ebenfalls entweder noch eine Grenzbedingung erhalten, ähnlich der Bravais'schen, aber umfassender, da diese schon an einzelnen Punkten überschritten ist, oder sie muss auch alle Fälle hinzunehmen, auf die wir durch die erweiterte Bravais'sche Theorie stossen und die Herr Wulff zum grossen Theile (das reguläre Punktgitter mit dem asymmetrischen Moleküle ist ein Beispiel) nicht berücksichtigt. Handelt es sich streng genommen nur um die geometrisch möglichen Fälle, so ist sogar an keine Grenzbestimmung zu denken.

Die überaus grosse Zahl von Fällen, die sich auf diese Weise nur durch vollständige Berücksichtigung der nach den drei Symmetrieelementen unterscheidbaren Formen ergibt, ist ebenso wichtig wie unbequem. Heute noch mehr wie vor 40 Jahren muss es auffallen, dass viele Abtheilungen nicht in der Natur vorzukommen scheinen. Das System unserer besten Autoren ist nur ein kleiner Theil der erweiterten Theorien. Die Grenzbedingung von Bravais beseitigte diesen Zwiespalt. Seine frühere Theorie mit der Grenzbedingung umfasst noch heute alle bekannt gewordenen Fälle mit Ausnahme einer ganz minimalen Zahl, und deckt sich fast vollständig mit der Eintheilung, welche jeder Mineraloge anzuwenden gewohnt ist. Vergleicht man auf Grund des in 40 Jahren bedeutend angewachsenen Materials die Bravais'sche Theorie mit der Erfahrung, so bleibt die Uebereinstimmung immer noch eine fast vollkommene. Man kann sich einer solchen Bestätigung der Bravais'schen Grenzbedingung gegenüber kaum des Verdachtes erwehren, dass sich auch die beiden Ausnahmefälle, die einzigen, die ich gefunden habe, am Ende anders werden erklären lassen. Man wird, wenn man den Vergleich zwischen der Bravais'schen Theorie und der Erfahrung durchführt, erst so recht auf den Werth der Grenzbedingung aufmerksam, ebenso wie Bravais seinerzeit durch das Gesetzmässige, was sich in der Gesamtheit der Beobachtungen ausdrückte, wohl erst auf seinen Versuch einer Erklärung und dadurch zu der Grenzbestimmung kam. Die Grenzbedingung ist für die systematische Eintheilung der Krystalle von fundamentaler Bedeutung. Ehe wir eine andere als die Bravais'sche Erklärung dafür haben, dass so viele geometrisch mögliche Formen in der Natur nicht vorkommen, müssen wir sehr vorsichtig sein, wenn wir diese aufgeben. Prüft man nun die Fälle, die mit den Bravais'schen Anschauungen nicht im Einklange stehen, so findet man nicht nur wenige, sondern auch nicht

einmal recht schlagende. Die Schuld hierbei liegt nicht an der Beobachtung, sondern an der Schwierigkeit des Falles. Herr Wulff hat an Rohrzuckerkrystallen einer Herkunft gefunden, dass zwei bisher für gleichwerthig gehaltene Flächen nie zusammen vorkamen und ist der Ansicht, dass keine andere Erklärung als die durch Tetartoëdrie hier zulässig sei. Es gibt nun offenbar kaum einen Fall, in dem die Zufälligkeiten eine grössere Rolle spielen können als gerade hier. Man erwartet ja durchaus nicht, dass immer von jeder Fläche die gleichberechtigten vollzählig vorhanden sind, ebensowenig wie dass ein Krystall in den gleichberechtigten Richtungen von gleicher Dicke ist. Handelt es sich um eine Hemiëdrie, die eine grössere Anzahl von Flächen betrifft, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass Zufälligkeiten eine Rolle spielen, kleiner, als wenn bloss zwei Flächen vorhanden sind. Es kann also in der Deutung der Beobachtung in letzterem Falle recht viel Subjectives liegen. Es liegt mir nun durchaus fern, die Richtigkeit der Beobachtungen von Herrn Wulff anzuzweifeln. Es ist sogar wichtig, dass dieselben und ihre Tragweite nicht in Vergessenheit gerathen, es ist aber auch andererseits wichtig hervorzuheben, dass sie sich doch schliesslich durch Zufälligkeiten erklären könnten. Der zweite Fall ist der des Milchwuckers. Dieser ist sphenoidisch-hemiëdrisch und zugleich hemimorph. Wie wir schon oben erwähnten, sind nach der Ansicht von Bravais nur drei Fälle im rhombischen System möglich, nämlich Holoëdrie, sphenoidische Hemiëdrie und Hemimorphie, aber durchaus keine Combination der beiden letzteren. Beim Milchwucker ist eine Täuschung durch Zufälligkeiten der Krystallisation schon weniger wahrscheinlich. Die einzige Rettung wäre, dass er sich als monosymmetrisch herausstellt. Da wir die bisherigen Beobachtungen nicht verdächtigen, ist er einstweilen als ein Argument gegen die Bravais'sche Beschränkung aufzufassen. Wenn man weiter bedenkt, dass seit jeher einige

Formen unter der grossen Menge aufgestellt wurden, die nicht recht in das System passten und die sich nach einiger Zeit entweder anders erklärten oder zu einer Erweiterung unserer theoretischen Anschauung führen, so wird man wohl folgende Stellung zu den Ausnahmefällen einnehmen.

Jedenfalls muss man es für bedeutungsvoll halten, dass die Fälle, welche gegen die Bravais'sche Theorie angeführt werden können, gering an Zahl sind (wir finden nur zwei), und dass ferner bei dem einen Zufälligkeiten eine sichere Beurtheilung in hohem Grade erschweren. Die Bravais'sche Theorie verdient selbst mit der darin enthaltenen Beschränkung immer noch als ein Fundament der theoretischen Krystallographie angesehen zu werden. Daneben ist es wünschenswerth, dass die Fälle, die gegen die Beschränkung sprechen, nicht in Vergessenheit gerathen und dass sorgfältig nach weiteren Fällen gesucht wird.

Dies sind die Resultate, zu denen wir durch einen Vergleich der Theorie von Bravais mit derjenigen von Herrn Wulff und mit den Resultaten der Beobachtung geführt werden. Wir wenden uns zu dem zweiten Theile unserer Aufgabe, nämlich zu den Folgerungen, die wir durch Hinzuziehen der Theorie von Herrn Sohncke zu den beiden anderen ableiten können.

2. Vergleich der Theorien von Bravais und Sohncke.

Auch hier ist wieder der Umstand massgebend, dass nach Bravais' eigener Auffassung und nach seiner bestimmten Erklärung seine Polyëder als Punktgruppen aufzufassen sind. Wird nun ein und dieselbe bestimmte Punktgruppe an Stelle der verschiedenen Punkte eines Gitters und zwar in paralleler Stellung eingesetzt, so dass der Schwerpunkt der Gruppe an die Stelle des Punktes tritt, so lässt sich leicht erkennen,

dass alle homologen Punkte der Gruppe auf einem, dem ursprünglichen congruenten und parallel gestellten Gitter liegen. Verbindet man nämlich einen bestimmten Punkt A der Gruppe durch eine gerade Strecke mit dem Schwerpunkte S derselben und führt die gleiche Construction in den übrigen Gruppen jedesmal mit den homologen Punkten ($A_1, A_2, A_3 \dots A_n$) und den betreffenden Schwerpunkten ($S_1, S_2, S_3 \dots S_n$) aus, so kann, da sich immer dieselbe Strecke in paralleler Lage ergibt, durch eine einfache Parallelverschiebung um die Grösse dieser Strecke (AS) das System der Schwerpunkte in das der Punkte A übergeführt werden. Da die ersteren zusammen ein Gitter bilden, so thun es also auch die letzteren. Dasselbe gilt von jedem anderen Punkte B und seinen homologen. Wenn daher Bravais die einzelnen Punkte seiner Gitter durch Gruppen ersetzt, so erhält er dadurch ein System von congruenten parallel ineinandergestellten Gittern. Vergleicht man nun dieses mit der Definition, die Herr Sohncke in seiner erweiterten Theorie gibt,¹⁾ nämlich:

„Ein Krystall (unendlich ausgedehnt gedacht) besteht aus einer endlichen Anzahl parallel ineinander stehender congruenter Raumgitter“,

so findet man, dass beide Auffassungen geometrisch ganz identisch sind. Dieses Resultat ist sehr auffallend, da man mit Recht gewohnt war, schon die frühere Theorie von Herrn Sohncke für allgemeiner zu halten, als die Theorie von Bravais. Nun soll die erweiterte Theorie von Herrn Sohncke sich mit der von Bravais decken! Dieser Widerspruch erklärt sich nun sehr leicht, wenn man folgende Umstände bedenkt. Die Frankenheim-Bravais'schen Gitter galten für das eigentlich Wesentliche der Bravais'schen Theorie. Bravais selbst erwähnt ferner nur an wenigen

1) Zeitschr. f. Kryst. 15, p. 433, 1888.

Stellen die Identität seiner Moleküle mit Punktgruppen; und endlich erhalten wir aus der Bravais'schen Theorie, indem wir die Moleküle als Punktgruppen auffassen, zwar Punktanordnungen, die identisch sind mit denen der erweiterten Sohncke'schen Theorie, aber Herr Sohncke ersetzt die Punkte einer solchen Anordnung wieder durch Moleküle, während Bravais an dieser Stelle nicht über die Annahme von Punkten hinausging. Der wesentliche Theil der Sohncke'schen Theorie bleibt übrigens derjenige über die Punkt-anordnungen; denn die Gestalt der Moleküle kommt thatsächlich möglichst wenig in Betracht.¹⁾ Die Art und Weise, wie wir von der Bravais'schen auf die erweiterte Sohncke'sche Theorie übergegangen sind, ist identisch mit einem Verfahren, welches Herr Sohncke selbst anwandte, um die jetzige Theorie aus der früheren abzuleiten,²⁾ man hat nämlich nur die ursprünglich ein Krystallmolekül zusammensetzenden Atome als selbständige Bestandtheile des Systems aufzufassen und ihre Abstände zu variiren.

Die enge Beziehung zwischen den beiden Theorien ist nun nicht bloss von theoretischem Interesse, sondern direkt von praktischer Bedeutung. Für die erweiterte Theorie von Herrn Sohncke liegt nämlich noch keine methodische Bearbeitung vor. Es genügte, Herrn Sohncke, als er sie aufstellte, zu beweisen, dass die Ausnahmefälle seiner früheren Theorie eine Erklärung finden. Jetzt aber, da es feststeht, dass sie in geometrischer Beziehung mit der Theorie von Bravais übereinstimmt, können wir die grosse Arbeit, welche

1) Sohncke, Erweiterung der Theorie der Krystallstructur, p. 440.

„Nach der jetzigen erweiterten Theorie finden alle bekannten (und auch alle als geometrisch möglich vorausgesehenen) Krystallgestalten ohne jede Ausnahme ihre unmittelbare Erklärung in der Structur, ohne dass man zum Verständniss irgend einer besonderen geometrischen Eigenthümlichkeit auf die geometrische Beschaffenheit der Krystallbausteine zurückzugreifen braucht.“

2) l. c. p. 441—442.

in den Abhandlungen von Bravais steckt, für sie verwerthen. Namentlich für diejenigen Theile der Theorie, welche den in der Natur vorkommenden Formen entsprechen, liegt dadurch eine gründliche Bearbeitung vor.

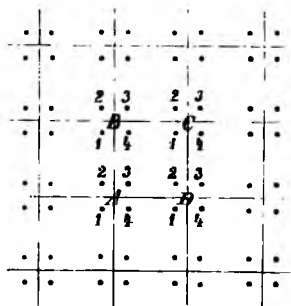
Da die geometrischen Bedingungen der erweiterten Sohncke'schen Theorie und der Bravais'schen Theorie bezüglich der Punktanordnung übereinstimmen, so sind wir im Stande, die geometrischen Resultate der letzteren direkt in der ersteren zu verwerthen.

Einige Umstände hierbei erfordern nun noch ein besonderes Eingehen. Wir dürfen nämlich irgend ein Bravais'sches Gitter nehmen und eine Punktgruppe von einer der von Bravais gegebenen Symmetrie-Formen einsetzen, so erhalten wir sicher ein System, welches der erweiterten Sohncke'schen Theorie entspricht und dessen Symmetriecharakter sich auf einfache Weise ergibt. Diese Methode ist leicht durchzuführen. Anders ist es, wenn eine solche Anordnung von Punkten von vornherein gegeben wäre und wir sollten rückwärts die Punktgruppe, die derselben zu Grunde gelegen hat, herausfinden. Es sind dann mehrere Möglichkeiten gegeben. Wir erhalten nämlich eine Punktgruppe, wenn wir von jedem der n ineinander gestellten Gitter einen Punkt herausgreifen. Aber die Auswahl kann auf unendlich verschiedenartige Weisen stattfinden. Nehmen wir nur an, es wären uns $n-1$ Punkte der ursprünglichen Gruppe gegeben, so bleibt ein Gitter übrig. Irgend einen Punkt desselben können wir zu der Gruppe hinzuziehen. Man kann auf diese Weise zu Gruppen von verschiedener Symmetrie gelangen und daher ist Vorsicht geboten, wenn man auf diesem Wege über die Symmetrie der Punktanordnung etwas erfahren will. Glücklicherweise ist diese Aufgabe viel weniger wichtig als die umgekehrte, nämlich für jeden Symmetriecharakter eine Punktanordnung zu finden.

Von grösserer Bedeutung ist ein anderer Punkt, der mit dem eben besprochenen enger zusammenhängt, als man auf den ersten Blick glauben möchte. Es ist dies die Frage, welche Stellung die frühere Sohncke'sche Theorie zu der jetzigen einnimmt. Die erweiterte Theorie von Herrn Sohncke muss, da sie mit der (erweiterten) Theorie von Bravais geometrisch übereinstimmt, für alle auf die drei Symmetriemerkmale (Centrum, Axe und Ebene) gegründete Abtheilungen der Krystallsysteme völlig aufkommen. Sie muss mit jener sogar sehr viele Abtheilungen ergeben, für welche in der Natur noch keine Vertreter gefunden sind. Wozu ist unter solchen Umständen die frühere Sohncke'sche Theorie nöthig und wie kommt es, dass sie, da sie doch ein Theil der erweiterten Sohncke'schen Theorie ist, trotzdem in der Bravais'schen Theorie nicht erwähnt ist? Wir antworten: Geometrisch genommen muss sie in der Bravais'schen Theorie enthalten sein, da sie einen Theil der geometrisch mit dieser äquivalenten, erweiterten Sohncke'schen Theorie ausmacht, aber sie steckt nur implicite darin. Wie dies möglich ist, lässt sich folgendermassen erkennen. Wir haben oben schon gesehen, dass es, wenn eine Punktanordnung aus n ineinandergestellten Gittern oder einem Gitter von n -Punkten besteht, nicht möglich ist, eindeutig die Gruppe von n -Punkten, welche der Construction zu Grunde gelegen hat, abzuleiten. Wenn schon $n - 1$ Punkte der Gruppe richtig bestimmt wären, so kann der n^{te} Punkt geometrisch irgend ein Punkt eines ganzen Gitters sein. Wir wissen nicht, welchen davon wir der Gruppe zutheilen, oder auch umgekehrt, wir wissen nicht, zu welcher Gruppe wir einen bestimmten Punkt des Gitters rechnen sollen.

Die Symmetrie der Anordnung wird aus der Symmetrie der Punktgruppe und derjenigen des Gitters zusammen abgeleitet. Da wir aber durch verschiedene Auswahl des n^{ten} Punktes auch eine verschiedene Symmetrie der Punkt-

gruppe erhalten können, so werden wir aus ein und derselben geometrischen Anordnung durch verschiedene Auswahl der Gruppe Typen der Krystallstructur von verschiedener Symmetrie bekommen. Wählen wir dann z. B. eine Gruppe aus, die weniger Symmetriecharaktere mit dem Gitter gemeinsam hat, als eine andere, so kann ein gewisser Gegensatz bestehen zwischen der rein geometrischen Symmetrie der ganzen Anordnung, die keine Verbindung der Punkte unter sich enthält, und der Symmetrie, welche auf der Annahme solcher Verbindungen zu Gruppen, also einer physikalischen Annahme beruht. Man kann sich ohne Schwierigkeit diese Verhältnisse an einem besonderen Falle klar machen. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Verhältnisse in der Ebene. Das dem Gitter in der Ebene entsprechende Netz sei ein quadratisches. Die Punktgruppe bestehe ebenfalls aus den Ecken eines Quadrates, welches den Quadraten des Netzes parallel gestellt sei.



(Fig. 2.)

Sei nun die Anordnung gegeben, so können wir zu Gruppen zusammenfassen die Punkte $A_1 A_2 A_3 A_4$, oder $B_1 A_2 A_3 A_4$, oder $C_1 A_2 A_3 A_4$ u. s. w. u. s. w. Allerdings muss es etwas wunderbar erscheinen, dass der sehr entwickelte geometrische Symmetriecharakter der ganzen Anordnung gewahrt bleiben soll, während durch die Zusammen-

gehörigkeit der Punkte die Symmetrie so sehr heruntergedrückt wird, wie in einigen der obigen Fälle. Für die höhere Symmetrie der Anordnung ohne Rücksicht auf die Verbindungen ist kein rechter Grund vorhanden. Doch lässt sich gegen solche Annahmen ein Beweis, genau genommen, nicht führen. Dieser Einfluss der Gruppenbildung auf die Symmetrie ist ein Moment, auf welches man Rücksicht nehmen muss. Besonders ist zu betonen, dass die Gruppenbildung die Symmetrie der Anordnung nicht erhöhen kann. Am natürlichsten erscheint daher wohl eine solche Verbindung zu Gruppen, durch welche die Symmetrie der Anordnung dieselbe bleibt, wie ohne Verbindungen. Unter Berücksichtigung anderer Factoren, z. B. der grösseren oder geringeren Nähe der Punkte und dergleichen, kann man aber unter Umständen auch eine andere Gruppenbildung für die naturgemässere halten. Endlich kann noch der Fall eintreten, dass keines dieser Kriterien den Ausschlag zwischen zwei verschiedenen Eintheilungen in Gruppen ergibt. Speziell gegen solche Fälle, bei denen die Gruppeneintheilung sich nicht natürlich macht, hat sich Herr Wulff gewandt. Ein Beispiel für diese Art von Systemen in der Ebene ist etwa Fig. 1. Man erkennt hier keine Gruppen, die naturgemäss zusammengehören. Es lassen sich derartige Beispiele häufen, es ist aber von grösserem Interesse zu sehen, wie sie sich construiren lassen. Wir nehmen einen Fall aus dem rhombischen System. Das Gitter sei durch Anordnung nach rechtwinkligen Parallelepipeden entstanden, die Punktgruppe bestehe aus den Ecken von jenen ähnlichen und parallel gestellten Parallelepipeden. Wir fügen noch ein Gitter von Punkten hinzu, dessen Grundpunkt sich auf einer der Kanten des Grundparallelepipeds des ersten Gitters bewegen mag. Dieser Grundpunkt wird, wenn er nicht gerade in die Mitte der Kante fällt, dem ganzen System den Charakter der Hemimorphie geben. Fällt er gerade in die Mitte, so ist

kein Grund mehr für Hemimorphie vorhanden. Aber welcher Punktgruppe können wir ihn noch zurechnen? Vorher hätte man ihn wohl in die nächstliegende aufgenommen. Jetzt liegt er nicht näher an der einen, als an der anderen, und wenn wir ihn trotzdem zu der einen oder zu der anderen rechnen, so erhalten wir wieder Punktgruppen, welche hemimorph sind, während das ganze System von einer solchen Hemimorphie geometrisch nichts erkennen lässt. Es ist also die Gruppenbildung in diesem Falle wieder sehr willkürlich und sogar eigentlich im Widerspruch mit der Symmetrie der Anordnung. Man sieht, dass solche Systeme eine direkte Folgerung aus der Bravais'schen Theorie werden, wenn wir, unter Voraussetzung der physikalischen Gleichwerthigkeit aller Punkte in der Gruppe, ihre Abstände in der letzteren variabel annehmen, so dass Punkte hierdurch in eine Beziehung zu den Nachbargruppen gerathen, die sie von vornherein nicht haben. Wenn man hierbei beachtet, dass die Gruppenbildung dann eine widernatürliche werden kann und die Symmetrie der Anordnung eine höhere als die durch die ursprünglichen Gruppen gegebene, so wird man es wohl als einen wesentlichen Fortschritt in der früheren Sohncke'schen Theorie ansehen, dass solche Fälle mit in den Kreis der Betrachtung gezogen wurden. Allerdings geschah dies, ohne dass der Beziehungen zu den Bravais'schen Anordnungen (Punktgitter mit Punktgruppe) gedacht wurde. Es geschah auch, ohne dass alle derartige Systeme behandelt wurden, denn z. B. das Beispiel aus dem rhombischen System ist keines von den Sohncke'schen Punktsystemen (der früheren Theorie). Aber es ist die Grenze, die sich Herr Sohncke gesteckt hat, eine solche, die einem sehr wichtigen Unterscheidungsmerkmal entspricht. Unser Beispiel aus dem rhombischen Systeme genügt nicht der wichtigen Bedingung, dass die Punktanordnung um alle Punkte die gleiche ist. Anordnungen, die dieser Bedingung genügen, werden natür-

lich unserem Interesse näher liegen, als andere. Ebenso sind sehr wichtig diejenigen Punktanordnungen, die neuerdings Herr Schoenflies¹⁾ untersucht hat, und bei denen die Anordnung um alle Punkte entweder gleich oder symmetrisch ist. Aus den bisher veröffentlichten Resultaten lässt sich die hohe Bedeutung derselben schon recht gut ersehen. Diese muss auch von denjenigen anerkannt werden, welche die Anordnungen von Herrn Schönflies nur als besonders wahrscheinliche Spezialfälle der erweiterten Sohncke'schen Theorie ansehen. Der Werth der früheren Sohncke'schen Theorie nimmt gewiss nicht dadurch ab, dass neue Gesichtspunkte in ihre Beziehungen zu der Bravais'schen Theorie kommen.

Einfacher wäre es ja, wenn man alle Spezialannahmen über die Bravais'schen Punktgruppen, durch welche Schwierigkeiten entstehen könnten, kurz dadurch abschneide, dass man die Abstände der Punkte in der Punktgruppe von einer geringeren Grössenordnung als die Abstände der Punktgruppen untereinander voraussetze. An Symmetrieeformen (nach der Eintheilung durch Centrum, Axen und Ebenen der Symmetrie) würde man dadurch nichts verlieren und an Einfachheit würde die Theorie bedeutend gewinnen. Jedoch sind die Gründe des Herrn Wulff gegen die Anordnungen, bei denen die Punktgruppierung unnatürlich ist, wie Herr Sohncke gezeigt hat, nicht stichhaltig und es hat sich schon herausgestellt,²⁾ dass gerade solche Systeme, wenn man auch chemische Begriffe mit berücksichtigt, eine besondere Bedeutung haben können. Ferner ist bereits durch Herrn Sohncke auf Beziehungen zwischen der Circularpolarisation und der Schraubenstructur hingewiesen worden, welche geeignet sind,

1) A. Schoenflies, Beitrag zur Theorie der Krystallstructur. Nachrichten v. der k. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen 1888, p. 483.

2) Vgl. Sohncke. Erweiterung der Theorie der Krystallstructur, pag. 142. ff.

die Wichtigkeit dieser für die frühere Theorie so charakteristischen Punktanordnungen sehr klar hervortreten zu lassen. Diese Beziehungen gewinnen noch an Bedeutung, wenn man bedenkt, dass auch Mallard, der sonst auf dem Boden der Bravais'schen Theorie steht, unabhängig von Herrn Sohncke zu ganz ähnlichen Anschauungen gekommen ist. Wir werden also, damit die Theorie keine Fälle ausschliesst, die Möglichkeit solcher Systeme auch zugestehen müssen.

Leider geht dies nicht, ohne dass sich eine neue Schwierigkeit in den Weg stellt. Wir haben gesehen, wie wichtig sowohl für die praktische Krystallographie, wie für unsere Kenntniss von den Krystallisationsgesetzen die Bravais'sche Grenzbedingung ist. Sie gründet sich aber auf die Symmetrie der Gitter einerseits und die Symmetrie der Gruppen andererseits. Es liegt auf der Hand, dass man in Fällen, wo eigentlich keine Gruppen vorliegen, auch die Grenzbedingung nicht ohne weiteres anwenden kann. Es ist zu wünschen, dass auch für diese Fälle ein Ersatz für die Grenzbedingung gefunden wird. Es nützt indessen nichts, dass man sich über das Vorhandensein einer Lücke wegtäuscht, und es geht auch nicht an, dass man, um sie zu beseitigen, eine von den Annahmen, welche sie verursachten, für falsch erklärt, wenn nicht ein wirklicher Beweis gegen sie zu Gebote steht.

Man kann hier daran denken, dass einige Arbeiten über die Symmetriearten der Krystalle existiren,¹⁾ welche von den Theorien der Krystalstructure ganz absehen, und dass möglicherweise von den Annahmen, welche in diesen gemacht werden, um die Unterabtheilungen zu trennen, im vorliegenden Falle Gebrauch gemacht werden kann. In der That ergibt schon ein oberflächlicher Vergleich der Arbeiten mit denen

1) Curie, Bull. d. l. soc. min. d. France. Bd. 7, S. 453. — Minnigerode, Nachrichten v. d. k. Ges. d. Wiss. z. Göttingen 1884. S. 195, 374, 488. — Neues Jahrb. f. Min. etc. V. Beilage Bd. S. 145. 1887.

über Krystallstruktur, dass eine eingehende Untersuchung dieser Frage sehr angebracht ist. (Die Herren Curie und Minnigerode nehmen auf die dritte Abhandlung von Bravais *Études cristallographiques* keine Rücksicht.) Hier soll nur darauf hingewiesen werden, da die Untersuchung ziemlich weitläufig wird.

Nachdem wir so zuerst die Bravais'sche mit der Wulff'schen und dann mit der erweiterten Sohncke'schen Theorie verglichen haben, bliebe uns formell noch übrig, den Vergleich zwischen den beiden letzteren anzustellen. Obwohl es nun kein Grundsatz ist, dass zwei Grössen mit einander verglichen sind, wenn sie mit einer dritten verglichen sind, so glauben wir doch im Obigen auch schon die Folgerungen gezogen zu haben, zu denen wir durch diesen dritten Vergleich noch geführt werden.

Es ist wohl dargethan, dass eine Berücksichtigung aller drei Theorien nothwendig ist, dass jede Theile enthält, die ihr eigenthümlich sind, und dass keine davon in ihrem jetzigen Zustande die beiden anderen ganz ersetzt.