Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXV. Jahrgang 1895.

München.
Verlag der K. Akademie.
1896.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Sitzung vom 7. Dezember 1895.

1. Herr H. Seeliger legt unter Besprechung des Inhalts eine Abhandlung des Herrn Professors Dr. R. Lehmann-Filhés in Berlin: „Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft“ vor.

2. Herr W. Dyck bringt eine Abhandlung des Herrn Privatdozenten Dr. Eduard von Weber: „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen“ in Vorlage, welche sich an die in der Februar-Sitzung d. J. mitgetheilte Untersuchung anschliesst.

3. Herr C. v. Voit theilt die Hauptresultate einer in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Alexander Ellinger ausgeführten Untersuchung: „Ueber den Nährwerth des Antipeptons“ mit.

Ueber die Säcularstörung der Länge des Mondes unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft.

Von **R. Lehmann-Filhés.**

(Eingelaufen 7. Dezember.)

Seitdem Laplace im VII. Capitel des X. Buches der Mécanique céleste eine Untersuchung über die Wirkung einer „transmission successive de la pesanteur“ mitgetheilt hat, sind kritische Discussionen des Newton'schen Gravitationsgesetzes für lange Zeit von der Tagesordnung verschwunden. Erst in neuerer Zeit hat man derartige Fragen, über deren Wichtigkeit wohl kein Streit sein kann, wieder mehr in's Auge gefasst, indem man einerseits die Folgen einer etwaigen endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation für

die planetarischen Bewegungen auf Grund verschiedener Hypothesen erörtert, andererseits in Erwägung gezogen hat, ob die Intensität der Kraft nicht in einer anderen Form als Function des Abstandes der sich anziehenden Massentheilchen gegeben werden muss, als es durch Newton geschehen ist.

Besonders die letztere Frage hat vor etwa einem Jahre eine sehr bedeutsame Förderung erfahren durch Seeliger's Aufsatz „Ueber das Newton'sche Gravitationsgesetz" (Astr. Nachrichten Nr. 3273). Eine weitere sehr umfassende Bereicherung der diesen Gegenstand betreffenden Literatur ist erfolgt durch die soeben erschienene Schrift von Carl Neumann, „Allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen." Ueber den Inhalt dieses höchst wichtigen Werkes gab schon eine ohne Zweifel von C. Neumann selbst verfasste Anzeige in den „Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig", 28. Jahrgang, Nr. 5 eine vorläufige Orientirung.

Ueber die zuerst genannte Frage, die nach der zeitlichen Fortpflanzung der Gravitation, liegt gleichfalls eine ansehnliche Literatur vor. In dieses Gebiet gehören auch die Untersuchungen über den Einfluss, welchen z. B. die relative Geschwindigkeit der sich anziehenden Punkte auf Grund des Weber'schen oder Riemann'schen Gesetzes auf die planetarischen Bewegungen ausübt. Eine sehr schätzbare Zusammenstellung der wichtigsten einschlägigen Arbeiten ist erst kürzlich in dem Aufsatze von S. Oppenheim „Zur Frage nach der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation", Jahresbericht über das k. k. Akademische Gymnasium in Wien für das Schuljahr 1894—95, gegeben worden.

Die vorhandenen Untersuchungen beziehen sich alle in erster Linie auf die Bewegung eines Planeten um die Sonne, und eine Anwendung der für diese gefundenen Formeln auf die Bewegung des Mondes, wie sie S. Oppenheim auf S. 18 seiner Schrift bei Besprechung der von v. Hepperger in den

Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, 1888 veröffentlichten Arbeit „Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation“ von dessen Ausdruck für die Säcularstörung der Länge eines Planeten gemacht hat, führt zu keinem richtigen Resultat.

Der Verfasser der vorliegenden Untersuchung hat bereits im Jahre 1884 in Nr. 2630 der Astr. Nachrichten eine Untersuchung über die Bewegung eines Planeten unter der Annahme einer sich nicht momentan fortpflanzenden Schwerkraft veröffentlicht. Die der Rechnung zu Grunde gelegte, später auch von v. Hepperger in Anwendung gebrachte Hypothese ist die, dass die Gravitation ähnlich wie das Licht von dem Kraftcentrum ausstrahlt, und dass die Gravitationsstrahlen sich wie die Lichtstrahlen mit constanter Geschwindigkeit gradlinig im Raume verbreiten. Bei der Begegnung mit einem Massenpunkte ist also seit dem Ausgange des betreffenden Impulses eine, wenn auch noch so kurze Zeit vergangen, in welcher der anziehende Punkt im Allgemeinen seinen Ort geändert hat. Hierdurch entstehen dann Bewegungsstörungen gegenüber dem Fall einer sich momentan ausbreitenden Kraft, welche eine gewisse Analogie zu den Aberrationserscheinungen besitzen.

Diese Hypothese ist als eine rein mathematische aufzufassen, indem irgend eine Vorstellung über die physikalische Natur der Gravitation, wie wir sie z. B. bei Laplace finden, darin nicht ausgesprochen ist.

Die Durchführung der erörterten Hypothese ist nun jedenfalls eine unvollständige, so lange sie nicht auf denjenigen Himmelskörper, dessen Bewegung uns wegen seiner grossen Nähe ihre Eigenthümlichkeiten am deutlichsten erkennen lässt, angewendet ist. Auch unter Zugrundelegung anderer Hypothesen, z. B. des Weber'schen Gesetzes, ist die Mondbewegung bisher noch nicht genauer untersucht worden, offenbar deshalb, weil, wie v. Hepperger am Schlusse seiner

Abhandlung ganz richtig bemerkt, die Entwickelungen „in Folge der krummlinigen Bewegung der Erde und der durch die Sonne bewirkten Störungen mit grossen Schwierigkeiten verbunden“ sind.

Wenn hier in dieser Richtung ein erster Schritt, der hoffentlich Nachfolge finden wird, gemacht wird, so ist von vornherein zu beachten, dass das Verfahren bei der ungemeinen Complication der Aufgabe nur ein approximatives sein kann. Auch ist das Thema insofern eingeschränkt worden, als vorzugsweise die Säcularstörung der Länge zum Gegenstande der Untersuchung gemacht wurde, wozu der Umstand, dass ein Theil der säcularen Beschleunigung des Mondes durch die Theorie noch nicht erklärt ist, aufzufordern schien. Dass hierbei der Radiusvector und die Länge auch in allgemeiner Weise untersucht werden mussten, liegt in der Natur der Sache.

Das Resultat ist ein negatives, da nicht eine Beschleunigung, sondern eine Verzögerung der Mondbewegung gefunden wird, deren Betrag nochdazu zu Annahmen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation nöthigte, welche wenig plausibel erscheinen.

Derartige Rechnungsergebnisse dürfen nach Ansicht des Verfassers nicht dahin führen, die Behandlung der betreffenden Fragen überhaupt aufzugeben. Vielmehr sollte man die Untersuchungen auf verschiedenen Grundlagen weiterführen, „nicht etwa“, wie C. Neumann in der erwähnten Anzeige seines Buches sagt, „in der Hoffnung, dass eine solche Theorie sofort zu physikalisch wichtigen Aufschlüssen führen werde, sondern nur in dem Bestreben, den ganzen Kreis der hierher gehörigen Vorstellungen zu ordnen, zu erweitern und vielleicht für künftigen Gebrauch nutzbar zu machen.

I. Aufstellung der Differentialgleichungen.

Wir nehmen ein im Raume festes Coordinatensystem an, in Bezug auf welches der Schwerpunkt der Erde zur Zeit t die Coordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 habe. Ein Element dm_0 der Erdmasse habe in Bezug auf den Schwerpunkt die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ und den Abstand ϱ_0 von demselben, so dass

$$\varrho_0^2 = \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 \qquad 1)$$

Das Massenelement der Erde wirkt anziehend auf das Massenelement dm des Mondes, dessen ganze Masse m heisse. In Bezug auf das feste Coordinatensystem habe dm die Coordinaten ξ', η', ζ', in Bezug auf den Schwerpunkt der Erde x', y', z'. Der Abstand zwischen dm und dm_0 heisse δ, zwischen dm und dem Schwerpunkt der Erde dagegen r', sodass

$$\left.\begin{aligned} \delta^2 &= (x' - \mathfrak{x}_0)^2 + (y' - \mathfrak{y}_0)^2 + (z' - \mathfrak{z}_0)^2 \\ &= (\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)^2 + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)^2 + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)^2 \end{aligned}\right\} \quad 2)$$

Wenn die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Gravitation fortpflanzt, durch $\frac{1}{\theta}$ bezeichnet wird, so ist die Zeit, zu welcher der auf dm wirkende Impuls von dm_0 ausging, gleich $t - \theta\delta$, und zu dieser Zeit waren die Coordinaten von dm_0

$$\xi_0 + \mathfrak{x}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt^3} + \ldots$$

$$\eta_0 + \mathfrak{y}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt^3} + \ldots$$

$$\zeta_0 + \mathfrak{z}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt} + \frac{\theta^2\delta^2}{1\cdot 2} \cdot \frac{d^2(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt^2} - \frac{\theta^3\delta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \frac{d^3(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt^3} + \ldots$$

Da nun aber jedenfalls $\theta\delta$, d. h. die Zeit, während welcher die Gravitation die Strecke δ durcheilt, eine sehr kleine Grösse ist, so genügt es, nur die erste Potenz der-

selben zu berücksichtigen, d. h. für die Coordinaten von dm_0 folgende Werthe anzunehmen:

$$\xi_0 + \mathfrak{x}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\xi_0 + \mathfrak{x}_0)}{dt}$$

$$\eta_0 + \mathfrak{y}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\eta_0 + \mathfrak{y}_0)}{dt}$$

$$\zeta_0 + \mathfrak{z}_0 - \theta\delta \cdot \frac{d(\zeta_0 + \mathfrak{z}_0)}{dt}$$

Der Abstand zwischen dm und dem durch vorstehende Coordinaten bestimmten Orte von dm_0 ist hiernach

$$\delta - \theta\delta\left[\frac{\partial\delta}{\partial(\xi_0+\mathfrak{x}_0)} \cdot \frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial(\eta_0+\mathfrak{y}_0)} \cdot \frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + \frac{\partial\delta}{\partial(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)} \cdot \frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]$$

oder mit Hülfe von 2)

$$\delta + \theta\left[(\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right],$$

und hiernach wird die der ξ-Achse parallele Componente der von dm_0 auf dm geäusserten Beschleunigung:

$$-k^2 dm_0 \frac{\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0 + \theta\delta\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt}}{\left\{\delta + \theta\left[(\xi' - \xi_0 - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (\eta' - \eta_0 - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (\zeta' - \zeta_0 - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]\right\}^3}$$

oder, wenn auch hier wieder θ^2, θ^3, ... vernachlässigt werden und $\xi' - \xi_0 = x'$, $\eta' - \eta_0 = y'$, $\zeta' - \zeta_0 = z'$ gesetzt wird:

$$-k^2 dm_0 \left\{\frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^3} + \frac{\theta}{\delta^2}\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt}\right.$$

$$\left. - 3\theta \cdot \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^4}\left[(x' - \mathfrak{x}_0)\frac{d(\xi_0+\mathfrak{x}_0)}{dt} + (y' - \mathfrak{y}_0)\frac{d(\eta_0+\mathfrak{y}_0)}{dt} + (z' - \mathfrak{z}_0)\frac{d(\zeta_0+\mathfrak{z}_0)}{dt}\right]\right\}$$

Wir werden nun zunächst in diesen Ausdruck die von der Rotation der Erde herrührenden Werthe von $\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{y}_0}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{z}_0}{dt}$

einsetzen. Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeiten um die drei Coordinatenaxen mit φ_0, χ_0, ψ_0, so ist

$$\frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} = \chi_0 \mathfrak{z}_0 - \psi_0 \mathfrak{y}_0$$

$$\frac{d\mathfrak{y}_0}{dt} = \psi_0 \mathfrak{x}_0 - \varphi_0 \mathfrak{z}_0$$

$$\frac{d\mathfrak{z}_0}{dt} = \varphi_0 \mathfrak{y}_0 - \chi_0 \mathfrak{x}_0$$

Indem wir beachten, dass

$$\mathfrak{x}_0 \frac{d\mathfrak{x}_0}{dt} + \mathfrak{y}_0 \frac{d\mathfrak{y}_0}{dt} + \mathfrak{z}_0 \frac{d\mathfrak{z}_0}{dt} = 0$$

ist, erhalten wir für obige Beschleunigungscomponente folgenden Werth:

$$- k^2 dm_0 \left\{ \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^3} + \frac{\theta}{\delta^2} \frac{d\xi_0}{dt} + \frac{\theta}{\delta^2} (\chi_0 \mathfrak{z}_0 - \psi_0 \mathfrak{y}_0) \right. \qquad 3)$$

$$- 3\theta \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^4} \left[(x' - \mathfrak{x}_0) \frac{d\xi_0}{dt} + (y' - \mathfrak{y}_0) \frac{d\eta_0}{dt} + (z' - \mathfrak{z}_0) \frac{d\zeta_0}{dt} \right]$$

$$\left. + 3\theta \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^4} \left[\mathfrak{x}_0 (\chi_0 z' - \psi_0 y') + \mathfrak{y}_0 (\psi_0 x' - \varphi_0 z') + \mathfrak{z}_0 (\varphi_0 y' - \chi_0 x') \right] \right\}$$

Um die Einwirkung der ganzen Erde zu erhalten, haben wir den Ausdruck 3) über die ganze Erdmasse m_0 zu integriren. Aus 1) und 2) folgt:

$$\delta^2 = r'^2 - 2 (x' \mathfrak{x}_0 + y' \mathfrak{y}_0 + z' \mathfrak{z}_0) + \varrho_0^2,$$

woraus, wenn wir nur noch die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Mondparallaxe mitnehmen:

$$\frac{1}{\delta^n} = \frac{1}{r'^n} \left[1 + n \frac{x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0}{r'^2} - \frac{n}{2} \frac{\varrho_0^2}{r'^2} + \frac{n(n+2)}{2} \cdot \frac{(x'\mathfrak{x}_0 + y'\mathfrak{y}_0 + z'\mathfrak{z}_0)^2}{r'^4} \right] \qquad 4)$$

Wir nehmen nun an, dass die Erde eine aus homogenen concentrischen Schalen zusammengesetzte Kugel ist, so dass der Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt und alle Durchmesser

Hauptträgheitsaxen sind. Wir haben dann nach bekannten Sätzen:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \mathfrak{x}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{y}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0\, dm_0 = 0\\
&\int \mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0 \mathfrak{x}_0\, dm_0 = \int \mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0\, dm_0 = 0\\
&\int \mathfrak{x}_0^2\, dm_0 = \int \mathfrak{y}_0^2\, dm_0 = \int \mathfrak{z}_0^2\, dm_0 = \frac{A_0}{2}\\
&\int \varrho_0^2\, dm_0 = \frac{3}{2} A_0\\
&\int (x' \mathfrak{x}_0 + y' \mathfrak{y}_0 + z' \mathfrak{z}_0)^2\, dm_0 = \frac{r'^2}{2} A_0.
\end{aligned}\right\} \quad 5)$$

wenn mit A_0 das Trägheitsmoment der Erde in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe bezeichnet wird.

Mit Hülfe von 4) erhalten wir hieraus folgende Relationen, in denen nicht über Glieder zweiter Ordnung hinsichtlich der Mondparallaxe hinausgegangen ist:

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dm_0}{\delta^n} = \frac{1}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-1)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{\mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} \cdot x'; \int \frac{\mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} y'; \int \frac{\mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{nA_0}{2r'^{n+2}} z'\\
&\int \frac{\mathfrak{x}_0^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{A_0}{2r'^n}; \int \frac{\mathfrak{y}_0 \mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \int \frac{\mathfrak{z}_0 \mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \int \frac{\mathfrak{x}_0 \mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = 0\\
&\int \frac{x' - \mathfrak{x}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{x'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{y' - \mathfrak{y}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{y'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{z' - \mathfrak{z}_0}{\delta^n} dm_0 = \frac{z'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-3)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right]\\
&\int \frac{(x' - \mathfrak{x}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{x'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n}\\
&\int \frac{(y' - \mathfrak{y}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{y'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n}\\
&\int \frac{(z' - \mathfrak{z}_0)^2}{\delta^n} dm_0 = \frac{z'^2}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] + \frac{A_0}{2r'^n}
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int \frac{(y'-\mathfrak{y}_0)(z'-\mathfrak{z}_0)}{\delta^n}\, dm_0 &= \frac{y'z'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
\int \frac{(z'-\mathfrak{z}_0)(x'-\mathfrak{x}_0)}{\delta^n}\, dm_0 &= \frac{z'x'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)(y'-\mathfrak{y}_0)}{\delta^n}\, dm_0 &= \frac{x'y'}{r'^n}\left[m_0 + \frac{n(n-5)}{4}\frac{A_0}{r'^2}\right] \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{x}_0}{\delta^n}\, dm_0 &= x'^2\,\frac{n A_0}{2r'^{n+2}} - \frac{A_0}{2r'^n} \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{y}_0}{\delta^n}\, dm_0 &= x'y'\,\frac{n A_0}{2r'^{n+2}} \\
\int \frac{(x'-\mathfrak{x}_0)\,\mathfrak{z}_0}{\delta^n}\, dm_0 &= x'z'\,\frac{n A_0}{2r'^{n+2}}
\end{aligned}\right\} \quad 6)$$

Mit Hülfe dieser Relationen erhält man als Integral von 3):

$$-k^2\left\{\frac{m_0 x'}{r'^3} + \left(m_0 - \frac{A_0}{r'^2}\right)\frac{\theta}{r'^2}\frac{d\xi_0}{dt}\right. \qquad 7)$$

$$\left. -3\left(m_0 - \frac{A_0}{r'^2}\right)\theta\,\frac{x'}{r'^4}\left(x'\frac{d\xi_0}{dt} + y'\frac{d\eta_0}{dt} + z'\frac{d\zeta_0}{dt}\right) - \frac{A_0\theta}{2r'^4}(\chi_0 z' - \psi_0 y')\right\}$$

Wir haben hieraus die Componente der bewegenden Kraft zu berechnen, welche die Erde auf den ganzen Mond ausübt. Zu diesem Zweck ist der vorstehende Ausdruck 7) mit dem Massenelement des Mondes zu multipliciren und über die ganze Mondmasse zu integriren. Wir nennen die geocentrischen Coordinaten des Mondschwerpunktes x, y, z; die auf diesen Schwerpunkt bezogenen Coordinaten des Massenelementes $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; den Abstand des letzteren vom Schwerpunkte ϱ. Dann ist in 7) einzusetzen

$$x' = x + \mathfrak{x},\ y' = y + \mathfrak{y},\ z' = z + \mathfrak{z},$$

$$r'^2 = (x+\mathfrak{x})^2 + (y+\mathfrak{y})^2 + (z+\mathfrak{z})^2 = r^2 + 2(x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z}) + \varrho^2,$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\varrho^2 = \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2.$$

Hieraus folgt nach Analogie von 4)

$$\frac{1}{r'^n} = \frac{1}{r^n}\left[1 - n\frac{x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z}}{r^2} - \frac{n}{2}\frac{\varrho^2}{r^2} + \frac{n(n+2)}{2}\frac{(x\mathfrak{x} + y\mathfrak{y} + z\mathfrak{z})^2}{r^4}\right],$$

wobei Glieder von der dritten Ordnung in Bezug auf den scheinbaren Mondradius vernachlässigt sind.

Man kann hieraus eine Anzahl von Reductionsgleichungen herleiten, die, vom Vorzeichen der Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ abgesehen, den Formeln 5) und 6) analog sind, wobei der Mond, wie vorher die Erde, als eine aus concentrischen homogenen Schalen zusammengesetzte Kugel angesehen wird, deren Gesammtmasse m und deren Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe A heissen möge.

Durch Integration erhält man demnach aus 7):

$$-k^2\left\{\frac{mm_0}{r^3}x + \left(mm_0 - \frac{mA_0 + m_0A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi_0}{dt}\right. \qquad 8)$$

$$\left. -3\left(mm_0 - \frac{mA_0 + m_0A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi_0}{dt} + y\frac{d\eta_0}{dt} + z\frac{d\zeta_0}{dt}\right) - \frac{mA_0\theta}{2r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)\right\}$$

wobei die Producte der Trägheitsmomente vernachlässigt sind.

Dies ist die ξ-Componente der bewegenden Kraft, welche die Erde auf den Schwerpunkt des Mondes ausübt. Für den Einfluss der Sonne kommt natürlich ein ähnliches Glied hinzu, in welchem wir folgende Bezeichnungen anwenden wollen:

Es sei m_1 die Masse, A_1 das auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe bezogene Trägheitsmoment der Sonne, welche wir wie Erde und Mond als eine aus homogenen concentrischen Schalen zusammengesetzte Kugel ansehen. Die Coordinaten des Schwerpunktes (Mittelpunktes) in Bezug auf das im Raume feste Coordinatensystem seien ξ_1, η_1, ζ_1, die geocentrischen Coordinaten desselben Punktes x_1, y_1, z_1; der Abstand der Mittelpunkte von Erde und Sonne heisse r_1.

Die heliocentrischen Coordinaten des Mondmittelpunktes werden demnach $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$. Der Abstand des letzteren vom Sonnenmittelpunkte heisse $\varDelta$. Endlich seien φ_1, χ_1, ψ_1 die Winkelgeschwindigkeiten der Sonnenrotation um die drei Coordinatenaxen.

Hiernach wird die Componente der von Erde und Sonne auf den Mond ausgeübten bewegenden Kraft, wenn wir für den Augenblick die auf das feste Coordinatensystem bezogenen Coordinaten des Mondmittelpunktes ξ, η, ζ nennen:

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2\xi}{dt^2} = &-k^2\Big\{\frac{m\,m_0}{r^3}x + \left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi_0}{dt} \\
&-3\left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi_0}{dt} + y\frac{d\eta_0}{dt} + z\frac{d\zeta_0}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{m\,A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)\Big\} \\
&-k^2\Big\{\frac{m\,m_1}{\varDelta^3}(x - x_1) + \left(m\,m_1 - \frac{m\,A_1 + m_1 A}{\varDelta^2}\right)\frac{\theta}{\varDelta^2}\frac{d\xi_1}{dt} \\
&-3\left(m\,m_1 - \frac{m\,A_1 + m_1 A}{\varDelta^2}\right)\frac{\theta(x-x)}{\varDelta^4}\left((x-x_1)\frac{d\xi}{dt} + (y-y_1)\frac{d\eta}{dt} + (z-z_1)\frac{d\zeta}{dt}\right) \\
&\qquad - \frac{m\,A_1}{2}\frac{\theta}{\varDelta^4}\Big(\chi_1(z - z_1) - \psi_1(y - y_1)\Big)\Big\} \qquad 9)
\end{aligned}
$$

Da wir nun die geometrische Bewegung des Mondes zu untersuchen haben, so muss auch $\frac{d^2\xi_0}{dt^2}$ gebildet und von $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ abgezogen werden, wodurch $\frac{d^2x}{dt^2}$ erhalten wird.

Man findet, wenn φ, χ, ψ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit der Mondrotation bedeuten:

$$
\begin{aligned}
m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = &-k^2\Big\{-\frac{m\,m_0}{r^3}x + \left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{d\xi}{dt} \\
&-3\left(m\,m_0 - \frac{m\,A_0 + m_0 A}{r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{d\xi}{dt} + y\frac{d\eta}{dt} + z\frac{d\zeta}{dt}\right) \\
&\qquad + \frac{m_0 A}{2}\cdot\frac{\theta}{r^4}(\chi z - \psi y)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$- k^2 \left\{ - \frac{m_0 m_1}{r_1^3} x_1 + \left(m_0 m_1 - \frac{m_0 A_1 + m_1 A_0}{r_1^2} \right) \frac{\theta}{r_1^2} \frac{d\xi_1}{dt} \right.$$

$$- 3 \left(m_0 m_1 - \frac{m_0 A_1 + m_1 A_0}{r_1^2} \right) \frac{\theta x_1}{r_1^4} \left(x_1 \frac{d\xi_1}{dt} + y_1 \frac{d\eta_1}{dt} + z_1 \frac{d\zeta_1}{dt} \right)$$

$$\left. + \frac{m_0 A_1}{2} \cdot \frac{\theta}{r_1^4} (\chi_1 z_1 - \psi_1 y_1) \right\} \qquad 10)$$

Bildet man nun aus 9) und 10) die Differenz

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} - \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2},$$

so erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_0}{r^3} x = \frac{\partial \Omega}{\partial x} + X, \qquad 11)$$

wo

$$\Omega = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right) \qquad 12)$$

In dem Ausdrucke für X, der alle mit θ multiplicirten Glieder umfasst, wollen wir für die Componenten der absoluten Geschwindigkeiten der Sonne constante Werthe annehmen, indem wir setzen

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \alpha \ , \ \frac{d\eta_1}{dt} = \beta \ , \ \frac{d\zeta_1}{dt} = \gamma.$$

Dies ist allerdings nicht völlig streng; denn wenn die Geschwindigkeitscomponenten des Schwerpunktes des ganzen Systems die constanten Werthe α, β, γ haben, so ist

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \left(1 + \frac{m_0}{m_1} + \cdot \cdot \right) \alpha - \frac{m_0}{m_1} \frac{d\xi_0}{dt} - \cdot \cdot,$$

wo jeder Planet zu berücksichtigen ist. Setzen wir in X einfach $\frac{d\xi_1}{dt} = \alpha$, so vernachlässigen wir damit entweder Glieder von der Ordnung der Producte der Planetenmassen oder von der Ordnung des Quotienten einer Planetenmasse dividirt durch r_1^4. Beide Vernachlässigungen bedürfen keiner Rechtfertigung.

Ferner beachten wir, dass

$$\xi_0 = \xi_1 - x_1,\ \eta_0 = \eta_1 - y_1,\ \zeta_0 = \zeta_1 - z_1;$$
$$\xi = \xi_1 + x - x_1,\ \eta = \eta_1 + y - y_1,\ \zeta = \zeta_1 + z - z_1.$$

Hiernach findet sich

$$\left.\begin{aligned}
X = & -k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\alpha - k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}\alpha \\
& + k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}\alpha \\
& + k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dr_1}{dt} + k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{m_0mr^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dx}{dt} \\
& + 3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& - 3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta x}{r^4}\left(x\frac{dx_1}{dt}+y\frac{dy_1}{dt}+z\frac{dz_1}{dt}\right) \\
& - 3k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta x}{r^3}\frac{dr}{dt} \\
& + 3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta(x-x_1)}{\Delta^4}[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)] \\
& - 3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta x_1}{r_1^4}(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) \\
& + \frac{k^2A}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi z-\psi y) + \frac{k^2A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}(\chi_0 z-\psi_0 y) \\
& - \frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)(\chi_1 z_1-\psi_1 y_1) + \frac{k^2A_1}{2}\frac{\theta}{\Delta^4}(\chi_1 z-\psi_1 y)
\end{aligned}\right\}\ 13)$$

Durch cyklische Vertauschung innerhalb der drei Buchstabengruppen x, y, z; α, β, γ; φ, χ, ψ erhält man aus X auch die Componenten Y und Z der von der nicht momentanen Fortpflanzung der Gravitation herrührenden störenden Kraft.

Die Differentialgleichungen der geocentrischen Bewegung des Mondes lauten also:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+k^2(m+m_0)\frac{x}{r^3}&=\frac{\partial\Omega}{\partial x}+X\\ \frac{d^2y}{dt^2}+k^2(m+m_0)\frac{y}{r^3}&=\frac{\partial\Omega}{\partial y}+Y\\ \frac{d^2z}{dt^2}+k^2(m+m_0)\frac{z}{r^3}&=\frac{\partial\Omega}{\partial z}+Z\end{aligned}\right\}\quad 14)$$

Wir werden dieselben jedoch für unsere Zwecke transformiren. Zunächst erhalten wir leicht

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}-2k^2\frac{m+m_0}{r}+k^2\frac{m+m_0}{a}\qquad 15)$$
$$=2\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\Omega}{\partial y}dy+\frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right)+2\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

wo $k^2\frac{m+m_0}{a}$ die Integrationsconstante ist und die Integrale als untere Grenze die Osculationsepoche haben.

Ferner geben die Gleichungen 14)

$$\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2}+k^2\frac{m+m_0}{r}=\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x}+y\frac{\partial\Omega}{\partial y}+z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$
$$+(xX+yY+zZ)\qquad 16)$$

Weil nun aber $r^2=x^2+y^2+z^2$, also

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}=\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}+\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2},$$

so erhält man durch Addition von 15) und 16)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2}-k^2\frac{m+m_0}{r}+k^2\frac{m+m_0}{a}$$
$$=2\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx+\frac{\partial\Omega}{\partial y}dy+\frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right)+\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x}+y\frac{\partial\Omega}{\partial y}+z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$
$$+2\int(Xdx+Ydy+Zdz)+(xX+yY+zZ)$$

Betrachten wir allein die durch die endliche Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation hervorgebrachte Störung, so erhalten wir, wenn δ jene Störung andeutet:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2 \frac{m+m_0}{r^3}(r\,\delta r) \tag{17}$$

$$= 2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right) + \delta\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$
$$+ 2\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + (xX + yY + zZ)$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von Ω lässt sich indessen diese Gleichung noch auf eine andere Form bringen.

Da bis zu den Gliedern von der Ordnung $\frac{r^2}{r_1^3}$ incl.

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{r_1}\left[1 + \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{3}{2}\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{r_1^4}\right],$$

so ist

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2} + \frac{3}{2}\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{r_1^4}\right],$$

oder, da das Glied $\frac{k^2 m_1}{r_1}$ weder zu $\delta\left(r\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$, noch zu $2\delta\int\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}dx + \frac{\partial\Omega}{\partial y}dy + \frac{\partial\Omega}{\partial z}dz\right)$ einen Beitrag liefert:

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[\frac{3}{2}\frac{(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2}{r_1^4} - \frac{1}{2}\frac{r_1^2}{r^2}\right].$$

Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_1}\left[3\frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^4}\cdot x_1 - \frac{x}{r_1^2}\right],$$

und analog $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$.

Ferner:

$$x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} + z\frac{\partial\Omega}{\partial z} = r\frac{\partial\Omega}{\partial r} = 2\Omega$$

Mit Rücksicht auf das Spätere sollen hier an Stelle der geocentrischen Coordinaten x_1, y_1, z_1, r_1 der Sonne die auf den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond bezogenen Sonnen-

coordinaten x_0, y_0, z_0, r_0 eingeführt werden. Man findet sofort:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot x \\ y_1 &= y_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot y \\ z_1 &= z_0 + \frac{m}{m+m_0} \cdot z. \end{aligned} \qquad 18)$$

Bezeichnen wir den Factor $\frac{m}{m+m_0}$, der etwa $\frac{1}{81}$ beträgt, durch ε und vernachlässigen ε^2, ε^3 . ., so finden wir

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{3}{2}\frac{(xx_0+yy_0+zz_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}\right]$$
$$+ \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{9}{2}\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4}\cdot r^2 - \frac{15}{2}\frac{(xx_0+yy_0+zz_0)^3}{r_0^6}\right]\varepsilon$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4}\cdot x_0 - \frac{x}{r_0^2}\right]$$
$$+ \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\frac{r^2 x_0}{r_0^4} + 6\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4} - \frac{15(xx_0+yy_0+zz_0)^2}{r_0^6}\right]\varepsilon.$$

Analog $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$ und $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$.

Wie man sieht sind die mit ε behafteten Glieder von einer höheren Ordnung als die letzten, welche wir bei der Entwickelung noch berücksichtigen wollten, weshalb wir innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenze haben:

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[\frac{3}{2}\frac{(xx_0+yy_0+zz_0)^2}{r_0^4} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_0^2}\right]$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = \frac{k^2 m_1}{r_0}\left[3\frac{xx_0+yy_0+zz_0}{r_0^4}\cdot x_0 - \frac{x}{r_0^2}\right].$$

Hiernach darf man also in der Störungsfunction und ihren Ableitungen die geocentrischen Coordinaten der Sonne durch die auf den Schwerpunkt des Systems Erde-Mond bezogenen (barycentrischen) Sonnencoordinaten ersetzen.

Wir führen nun ein

$$x = r \cos\beta \cos\lambda \qquad x_0 = r_0 \cos\beta_0 \cos\lambda_0$$
$$y = r \cos\beta \sin\lambda \qquad y_0 = r_0 \cos\beta_0 \sin\lambda_0$$
$$z = r \sin\beta \qquad z_0 = r_0 \sin\beta_0$$

wo λ und β die geocentrische Länge und Breite des Mondes, λ_0 und β_0 die barycentrische Länge und Breite der Sonne sind. Es ergiebt sich

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{4} \frac{r^2}{r_0^3} [3 \cos^2\beta - 2 + 3 \cos^2\beta \cos(2\lambda - 2\lambda_0)$$
$$+ 3 \sin 2\beta \sin 2\beta_0 \cos(\lambda - \lambda_0)],$$

wo bereits die zweite Potenz der Sonnenbreite β_0 vernachlässigt ist. Da jedoch die Störungsfunction schon einen starken Verkleinerungsfactor hat, so werden wir hier auch das Quadrat der Mondbreite sowie das Product der Breiten von Sonne und Mond vernachlässigen, so dass einfach

$$\Omega = \frac{k^2 m_1}{4} \frac{r^2}{r_0^3} [1 + 3 \cos(2\lambda - 2\lambda_0)]. \qquad 19)$$

Da

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} dx + \frac{\partial \Omega}{\partial y} dy + \frac{\partial \Omega}{\partial z} dz + \frac{\partial \Omega}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial z_0} dz_0 = d\Omega$$

und

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial y_0} dy_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial z_0} dz_0 = \frac{\partial \Omega}{\partial r_0} dr_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_0} d\lambda_0,$$

so nimmt Gleichung 17) folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2 \frac{m + m_0}{r^3} (r\delta r) = 4\delta\Omega - 2\delta \int \left(\frac{\partial \Omega}{\partial r_0} dr_0 + \frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_0} d\lambda_0 \right)$$
$$+ 2 \int (X dx + Y dy + Z dz) + (xX + yY + zZ)$$

oder, da

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{k^2 m_1}{2} \frac{r}{r_0^3} [1 + 3 \cos(2\lambda - 2\lambda_0)],$$

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2\left\{\frac{m+m_0}{r^3} - \frac{2m_1}{r_0^3}[1+3\cos(2\lambda-2\lambda_0]\right\} r\delta r$$
$$= 4\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\delta\lambda + 4\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}\delta r_0 + 4\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}\delta\lambda_0$$
$$-2\int\left\{\frac{\partial\Omega}{\partial r_0}d\delta r_0 + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda_0}d\delta\lambda_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial r_0}dr_0\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_0}dr_0\delta\lambda\right.$$
$$+\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0^2}dr_0\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0\partial\lambda_0}dr_0\delta\lambda_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta\lambda$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Omega}{\partial r_0\partial\lambda_0}d\lambda_0\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda_0^2}d\lambda_0\delta\lambda_0\right\} \qquad 20)$$
$$+2\int(Xdx+Ydy+Zdz) + (xX+yY+zZ)$$

Die beiden ersten Gleichungen 14) geben

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = \left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right) + (xY-yX)$$
$$= \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda} + (xY-yX)$$

Da nun $\frac{xdy-ydx}{dt} = r^2\cos^2\beta\frac{d\lambda}{dt}$, so hat man

$$r^2\cos^2\beta\frac{d\lambda}{dt} = \text{Const.} + \int\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \int(xY-yX)\,dt,$$

wo die Integrationen von der Osculationsepoche beginnen.

Hinsichtlich der von der endlichen Geschwindigkeit der Gravitation herrührenden Störung hat man demnach

$$r^2\cos^2\beta\frac{d\delta\lambda}{dt} + 2\frac{d\lambda}{dt}r\cos\beta\,\delta(r\cos\beta)$$
$$= \delta\int\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \int(xY-yX)\,dt.$$

Mit Vernachlässigung der zweiten Potenz der Mondbreite kann man diese Gleichung schreiben

$$r^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2\frac{d\lambda}{dt}(r\delta r) + \int\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda}\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\delta\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_0}\delta r_0 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_0}\delta\lambda_0\right)dt$$
$$+\int(xY-yX)\,dt \qquad 21)$$

Eine scharfe Integration der Gleichungen 20) und 21) müsste natürlich durch abwechselnde Annäherungen erfolgen.

Die in den entwickelten Gleichungen auftretenden partiellen ersten und zweiten Differentialquotienten der Störungsfunction Ω sind innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenzen die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} &= -\frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial \Omega}{\partial r_1} &= -\frac{3}{4} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)] \\
\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_1} &= +\frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial r_1} &= -\frac{3}{2} k^2 m_1 \frac{r}{r_1^4} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial r_1} &= +\frac{9}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_1^2} &= +3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^5} [1 + 3\cos(2\lambda - 2\lambda_1)] \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r_1 \partial \lambda_1} &= -\frac{9}{2} k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^4} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial \lambda_1} &= +3 k^2 m_1 \frac{r}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda \partial \lambda_1} &= +3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda_1^2} &= -3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial r \partial \lambda} &= -3 k^2 m_1 \frac{r}{r_1^3} \sin(2\lambda - 2\lambda_1) \\
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \lambda^2} &= -3 k^2 m_1 \frac{r^2}{r_1^3} \cos(2\lambda - 2\lambda_1)
\end{aligned}\right\} \quad 22)$$

Ferner ergiebt sich aus 13) und den analogen Ausdrücken für Y und Z:

$$
\begin{aligned}
xX+yY+zZ = {} & 2k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& -2k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdx_1+ydy_1+zdz_1}{dt} \\
& -2k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r}\cdot\frac{dr}{dt} \\
& -k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
& +k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha x+\beta y+\gamma z) \\
23) \qquad & +3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(r^2-xx_1-yy_1-zz_1) \\
& \qquad \times[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)] \\
& -3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(xx_1+yy_1+zz_1) \\
& \qquad \times(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) \\
& -\frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[\varphi_1(zy_1-yz_1)+\chi_1(xz_1-zx_1) \\
& \qquad +\psi_1(yx_1-xy_1)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
xY-yX = {} & k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha y-\beta x) \\
& +k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha y-\beta x) \\
24) \qquad & -k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha y-\beta x) \\
& +k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdy_1-ydx_1}{dt} \\
& +k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{xdy-ydx}{dt} \\
& -3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(xy_1-yx_1)[\alpha(x-x_1) \\
& \qquad +\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)] \\
& -3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(xy_1-yx_1)(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1) \\
& +\frac{k^2A}{2}\frac{\theta}{r^4}[x(\psi x-\varphi z)-y(\chi z-\psi y)]
\end{aligned}
$$

$$+\frac{k^2 A_0}{2}\frac{\theta}{r^4}[x(\psi_0 x-\varphi_0 z)-y(\chi_0 z-\psi_0 y)]$$

$$-\frac{k^2 A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[x(\psi_1 x_1-\varphi_1 z_1)-y(\chi_1 z_1-\psi_1 y_1)]$$

$$+\frac{k^2 A_1}{2}\frac{\theta}{\Delta^4}[x(\psi_1 x-\varphi_1 z)-y(\chi_1 z-\psi_1 y)]$$

$$\begin{aligned}
Xdx+Ydy+Zdz=&-k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\\
&-k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\\
&+k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^2}(\alpha dx+\beta dy+\gamma dz)\\
&+k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dxdx_1+dydy_1+dzdz_1}{dt}\\
&+k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt}\\
&+3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^3}dr(\alpha x+\beta y+\gamma z)\\
25)\quad&-3k^2(m_0-m)\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^3}dr\frac{xdx_1+ydy_1+zdz_1}{dt}\\
&-3k^2m\left(1-\frac{mA_0+m_0A}{mm_0r^2}\right)\frac{\theta}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2dt\\
&+3k^2m_1\left(1-\frac{mA_1+m_1A}{mm_1\Delta^2}\right)\frac{\theta}{\Delta^4}(rdr-x_1dx-y_1dy-z_1dz)\\
&\qquad\times[\alpha(x-x_1)+\beta(y-y_1)+\gamma(z-z_1)]\\
&-3k^2m_1\left(1-\frac{m_0A_1+m_1A_0}{m_0m_1r_1^2}\right)\frac{\theta}{r_1^4}(x_1dx+y_1dy+z_1dz)\\
&\qquad\times(\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1)\\
&+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\varphi+A_0\varphi_0}{r^4}+\frac{A_1\varphi_1}{\Delta^4}\right)(ydz-zdy)\\
&+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\chi+A_0\chi_0}{r^4}+\frac{A_1\chi_1}{\Delta^4}\right)(zdx-xdz)\\
&+\frac{k^2\theta}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{r^4}+\frac{A_1\psi_1}{\Delta^4}\right)(xdy-ydx)\\
&-\frac{k^2A_1}{2}\theta\left(\frac{1}{\Delta^4}-\frac{1}{r_1^4}\right)[\varphi_1(y_1dz-z_1dy)\\
&+\chi_1(z_1dx-x_1dz)+\psi_1(x_1dy-y_1dx)]
\end{aligned}$$

II. Die Störungen der Planetenbewegung.

In den Differentialgleichungen 20) und 21) treten die Störungen δr_0 und $\delta \lambda_0$ auf, d. h. die von der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation herrührenden Störungen des Abstandes der Sonne von dem Schwerpunkte des Systems Erde-Mond und der auf diesen Punkt bezogenen Sonnenlänge. Diese Störungen sind natürlich identisch mit denen der heliocentrischen Coordinaten jenes Schwerpunktes. Zur Berechnung dieser lassen sich die bereits entwickelten Differentialgleichungen nach einer entsprechenden Vereinfachung benutzen. Setzen wir nämlich in 9) und 10) $m_1 = 0$, so erhalten wir die Bewegung der Masse m in Bezug auf die Centralmasse m_0. Ist diese Masse ein System von Massenpunkten, so sind diese im Schwerpunkt vereinigt zu denken. Für diese setzen wir $\frac{d\xi_0}{dt} = \alpha$, $\frac{d\eta_0}{dt} = \beta$, $\frac{d\zeta_0}{dt} = \gamma$, wo α, β, γ constant sind. Hierbei sind offenbar Glieder von der Ordnung der Masse m vernachlässigt, welche wir als ausserordentlich klein im Verhältniss zu m_0 betrachten. Wir werden deshalb überhaupt Glieder mit dem Factor m weglassen.

Hiernach wird

$$\frac{d\xi}{dt} = \alpha + \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \beta + \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma + \frac{dz}{dt}$$

Unter Mitnahme der Hauptglieder erhalten wir somit:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2\left\{\frac{m_0}{r^3}x + \frac{m_0\theta\alpha}{r^2} - 3m_0\frac{\theta x}{r^4}(\alpha x + \beta y + \gamma z) - \frac{A_0\theta}{2}(\chi_0 z - \psi_0 y)\right\}$$

$$\frac{d^2\xi_0}{dt^2} = +\frac{k^2 m x}{r^3}.$$

Die Subtraction ergiebt

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(m_0 + m)\frac{x}{r^3} = -k^2\theta m_0 \frac{a}{r^2}$$
$$+ 3k^2\theta m_0(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{x}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)$$

Unter dem Centralkörper wollen wir jetzt die Sonne verstehen, so dass $m_0 = 1$ gesetzt werden kann.

Setzen wir

$$\left.\begin{aligned}
X &= -k^2\theta\frac{\alpha}{r^2} + 3k^2\theta(\alpha x+\beta y+\gamma z)\frac{x}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\chi_0 z - \psi_0 y)\\
Y &= -k^2\theta\frac{\beta}{r^2} + 3k^2\theta(\alpha x+\beta y+\gamma z)\frac{y}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\psi_0 x - \varphi_0 z)\\
Z &= -k^2\theta\frac{\gamma}{r^2} + 3k^2\theta(\alpha x+\beta y+\gamma z)\frac{z}{r^4} + \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}(\varphi_0 y - \chi_0 x),
\end{aligned}\right\} 26)$$

so werden die Differentialgleichungen der heliocentrischen Bewegung:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r^3} &= X\\
\frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r^3} &= Y\\
\frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r^3} &= Z
\end{aligned}\right\} \qquad 27)$$

Aus diesen Gleichungen folgt in bekannter Weise, wenn $\frac{k^2(1+m)}{a}$ eine Integrationsconstante bedeutet,

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} - \frac{2k^2(1+m)}{r} + \frac{k^2(1+m)}{a} = 2\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

wo von der Osculationsepoche an zu integriren ist.

Ferner folgt aus 27)

$$\frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r} = xX + yY + zZ;$$

mithin, weil

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} = \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} + \frac{xd^2x+yd^2y+zd^2z}{dt^2},$$

ergeben die obigen Gleichungen durch Addition

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{dt^2} - \frac{k^2(1+m)}{r} + \frac{k^2(1+m)}{a} = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + (xX + yY + zZ).$$

Bezeichnet δr die von der endlichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation herrührende Störung des Radiusvectors, so ergiebt vorstehende Gleichung:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{(r\delta r)}{r^3} = 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + (xX + Yy + zZ). \qquad 28)$$

Wir suchen zweitens eine Gleichung, welche die Störung der in der xy-Ebene gezählten wahren Länge λ giebt.

Man hat aus 27)

$$\frac{xd^2y - yd^2x}{dt^2} = xY - yX;$$

also, wenn man von der Osculationsepoche an integrirt und für diese Parameter und Neigung der Bahn gegen die xy-Ebene mit p und i bezeichnet,

$$\frac{xdy - ydx}{dt} = k\sqrt{p(1+m)}\cos i + \int(xY - yX)\,dt.$$

Setzt man zur Abkürzung die Projection von r auf die xy-Ebene gleich ϱ, so hat man also

$$\varrho^2\frac{d\lambda}{dt} = k\sqrt{p(1+m)}\cdot\cos i + \int(xY - yX)\,dt.$$

Für die Störung $\delta\lambda$ hat man demnach die Differentialgleichung

$$\varrho^2\frac{d\delta\lambda}{dt} + 2\frac{d\lambda}{dt}\varrho\delta\varrho = \int(xY - yX)\,dt.$$

Da nun $\delta\varrho$ von der Ordnung der Grösse θ ist, so kann man statt $\frac{d\lambda}{dt}$ den ungestörten Werth

$$\frac{k\sqrt{p(1+m)}}{\varrho^2}\cdot\cos i$$

einsetzen, so dass

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2k\sqrt{p(1+m)}}{\varrho^4}\cos i\,(\varrho\,\delta r) + \frac{1}{\varrho^2}\int(xY - yX)\,dt. \quad 29)$$

Da

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 = r^2 - z^2,$$

so ist

$$\varrho\,\delta\varrho = r\,\delta r - z\,\delta z.$$

Man wird demnach auch δz zu berechnen haben. Aus der dritten Gleichung 27) ergiebt sich sofort

$$\frac{d^2\delta z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{\delta z}{r^3} = 3k^2(1+m)\,z\frac{(r\,\delta r)}{r^5} + Z. \quad 30)$$

Wir wenden uns zunächst zu der Störungsgleichung für δr. Man findet

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = &-\frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} \\ &+ \frac{k^2\theta A_0}{2r^4}[\varphi_0(ydz - zdy) \\ &+ \chi_0(zdx - xdz) + \psi_0(xdy - ydx)] \end{aligned}$$

Nun ist, wenn Ω die Knotenlänge, i die Neigung der Bahn gegen die xy-Ebene, p den Parameter bedeutet,

$$\begin{aligned} ydz - zdy &= k\sqrt{p(1+m)}\sin i\sin\Omega\,dt \\ zdx - xdz &= -k\sqrt{p(1+m)}\sin i\cos\Omega\,dt \\ xdy - ydx &= k\sqrt{p(1+m)}\cos i\,dt, \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = &-\frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} \\ &+ \frac{k^3\theta A_0\sqrt{p}}{2r^4}[\varphi_0\sin i\sin\Omega - \chi_0\sin i\cos\Omega \\ &+ \psi_0\cos i]\,dt. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Rotationsgeschwindigkeit der Sonne mit ω_0, die Neigung und Knotenlänge des Sonnenäquators in Bezug auf die xy-Ebene mit J_0 und K_0, so ist

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \omega_0 \sin J_0 \sin K_0 \\ \chi_0 &= -\omega_0 \sin J_0 \cos K_0 \\ \psi_0 &= \omega_0 \cos J_0, \end{aligned}$$

wodurch die letzte Klammergrösse wird

$$\omega_0 [\sin J_0 \sin i \cos (K_0 - \Omega) + \cos J_0 \cos i] = \omega_0 \cos N_0,$$

wenn N_0 die Neigung des Sonnenäquators gegen die Planetenbahn bezeichnet. Hierdurch wird

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz = &- \frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \\ &+ 3k^2\theta(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} + \frac{1}{2}k^3\theta A_0\omega_0\sqrt{p}\cos N_0 \frac{dt}{r^4} \end{aligned}$$

Nun ist

$$\int \frac{\alpha dx + \beta dy + \gamma dz}{r^2} = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^2} + 2\int(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3},$$

mithin

$$\begin{aligned} \int_0^t (Xdx + Ydy + Zdz) = &-k^2\theta\frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r^2} + k^2\theta\int_0^t(\alpha x + \beta y + \gamma z)\frac{dr}{r^3} \\ &+ \frac{1}{2}k^3\theta A_0\omega_0\sqrt{p}\cos N_0\int_0^t\frac{dt}{r^4} \\ &+ k^2\theta\frac{\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0}{r_0^3}, \end{aligned}$$

wo die Integrale als untere Grenze die Osculationsepoche $t = 0$ haben, und x_0, y_0, z_0, r_0 für diese Zeit gelten.

Ist u das Argument der Breite, so findet man leicht

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r(\alpha' \cos u + \beta' \sin u),$$

wo wie in A. N. 2630

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha \cos \Omega + \beta \sin \Omega \\ \beta' &= -\alpha \sin \Omega \cos i + \beta \cos \Omega \cos i + \gamma \sin i. \end{aligned}$$

Da ferner $u = v + \omega$, wenn v die wahre Anomalie, ω den Bogenabstand des Perihels vom Knoten bedeutet, so ist auch

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = r\,(\alpha'' \cos v + \beta'' \sin v),$$

wo

$$\alpha'' = \quad \alpha' \cos \omega + \beta' \sin \omega$$
$$\beta'' = -\alpha' \sin \omega + \beta' \cos \omega.$$

Demnach ist

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{dr}{r^3} = \alpha'' \int \cos v \frac{dr}{r^2} + \beta'' \int \sin v \frac{dr}{r^2}.$$

Diese Integrationen sind leicht auszuführen.

Da nämlich $dr = k \sqrt{\frac{1+m}{p}} \cdot e \sin v\, dt$, wo e die Excentricität bedeutet, so ist

$$\int \cos v \frac{dr}{r^2} = \frac{ek}{2} \sqrt{\frac{1+m}{p}} \int \frac{\sin 2v}{r^2} dt = \frac{e}{2p} \int \sin 2v\, dv = -\frac{e}{4p} \cos 2v$$

$$\int \sin v \frac{dr}{r^2} = \frac{ek}{2} \sqrt{\frac{1+m}{p}} \int \frac{1-\cos 2v}{r^2} dt = \frac{e}{2p} \int (1-\cos 2v) dv = \frac{e}{4p} (2v - \sin 2v).$$

Mithin

$$\int (\alpha x + \beta y + \gamma z) \frac{dr}{r^3} = -\frac{e}{4p} (\alpha'' \cos 2v + \beta'' \sin 2v - 2\beta'' v) + \text{Const.}$$

Endlich ist

$$\int \frac{dt}{r^4} = \frac{1}{k\sqrt{p(1+m)}} \int \frac{dv}{r^2} = \frac{1}{kp^{\frac{5}{2}} \sqrt{1+m}} \int (1 + e \cos v)^2\, dv$$

$$= \frac{1}{kp^{\frac{5}{2}} \sqrt{1+m}} \int \left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e \cos v + \frac{e^2}{2} \cos 2v\right) dv$$

$$= \frac{1}{kp^{\frac{5}{2}} \sqrt{1+m}} \left[\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) v + 2e \sin v + \frac{e^2}{4} \sin 2v\right] + \text{Const.}$$

Hiernach wird

$$\begin{aligned}\int_0^t (Xdx+Ydy+Zdz) = &-k^2\theta\frac{\alpha''\cos v+\beta''\sin v}{r^2}\\ &-\frac{k^2\theta e}{4p}(\alpha''\cos 2v+\beta''\sin 2v-2\beta''v)\\ &+\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{2p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)v\right.\\ &\left.+2e\sin v+\frac{e^2}{4}\sin 2v\right]\\ &+k^2\theta\frac{\alpha''\cos v_0+\beta''\sin v_0}{r_0^2}\\ &+\frac{k^2\theta e}{4p}(\alpha''\cos 2v_0+\beta''\sin 2v_0+2\beta''v_0)\\ &-\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{2p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)v_0\right.\\ &\left.+2e\sin v_0+\frac{e^2}{4}\sin 2v_0\right].\end{aligned} \tag{31}$$

In 28) tritt auch die Grösse $xX+yY+zZ$ auf. Wir finden leicht

$$\begin{aligned}xX+yY+zZ &= 2k^2\theta\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{r^2}\\ &= 2k^2\theta\frac{\alpha''\cos v+\beta''\sin v}{r}\end{aligned} \tag{32}$$

Setzt man nun 31) und 32) in 28) ein, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2}+k^2(1+m)\frac{r\delta r}{r^3} = &-\frac{k^2\theta e}{2p}(\alpha''\cos 2v+\beta''\sin 2v-2\beta''v)\\ &+\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)v\right.\\ &\left.+2e\sin v+\frac{e^2}{4}\sin 2v\right]\\ &+C,\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}C=2k^2\theta\frac{\alpha''\cos v_0+\beta''\sin v_0}{r_0^2}&+\frac{k^2\theta e}{2p}(\alpha''\cos 2v_0+\beta''\sin 2v_0-2\beta''v_0)\\ &-\frac{k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{p^2}\left[\left(1+\frac{e^2}{2}\right)v_0+2e\sin v_0+\frac{e^2}{4}\sin 2v_0\right]\end{aligned}$$

Setzen wir ferner

$$D = \frac{k^2\theta}{p}\left(e\beta'' + \frac{A_0\omega_0\cos N_0}{p}\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)\right)$$
$$E = \frac{2k^2\theta A_0\omega_0\cos N_0}{p^2},$$
$$F = -\frac{k^2\theta}{2p}\left((\beta'' - \frac{A_0\omega_0\cos N_0}{p}\frac{e}{2}\right)$$
$$G = -\frac{k^2\theta}{2p}\alpha'',$$

so nimmt die Differentialgleichung für δr folgende Gestalt an

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{r\delta r}{r^3} \tag{33}$$
$$= C + Dv + Ee\sin v + Fe\sin 2v + Ge\cos 2v.$$

Der Umstand, dass diese Differentialgleichung auf der rechten Seite nur die Variable v enthält, ist ein Fingerzeig, dass man diese vortheilhaft als unabhängige Variable gebrauchen kann.

Mit Zugrundelegung der für die ungestörte Bewegung geltenden Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{r^2}, \quad \frac{dr}{dt} = k\sqrt{\frac{1+m}{p}}\,e\sin v,$$
$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{k^2(1+m)e\cos v}{r^2}, \quad r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

erhält man, wenn man $1 + m = 1 \ldots$ setzt,

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\delta r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\delta r}{dt} + r\frac{d^2\delta r}{dt^2}$$
$$= \frac{k^2e\cos v}{r^2}\delta r + \frac{2k^2e\sin v}{r^2}\frac{d\delta r}{dv} + r\left(\frac{k^2p}{r^4}\frac{d^2\delta r}{dv^2} - \frac{2k^2e\sin v}{r^3}\frac{d\delta r}{dv}\right)$$
$$= \frac{k^2p}{r^3}\left(\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \frac{er\cos v}{p}\delta r\right) = \frac{k^2p}{r^3}\left(\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \delta r - \frac{r}{p}\delta r\right).$$

Setzt man dies in 33) ein, so ergiebt sich

$$\frac{d^2\delta r}{dv^2} + \delta r = \frac{r^3}{k^2p}(C + Dv + Ee\sin v \tag{34}$$
$$+ Fe\sin 2v + Ge\cos 2v) = W.$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v + \sin v \int \cos v W dv$$
$$- \cos v \int \sin v W dv. \qquad 35)$$

Die Berechnung dieses Ausdruckes erfordert folgende Integrationen:

$$\int r^3 \cos v dv \qquad \int r^3 \sin v dv$$
$$\int r^3 v \cos v dv \qquad \int r^3 v \sin v dv$$
$$\int r^3 \sin v \cos v dv \qquad \int r^3 \sin^2 v dv$$
$$\int r^3 \sin 2v \cos v dv \qquad \int r^3 \sin 2v \sin v dv$$
$$\int r^3 \cos 2v \cos v dv \qquad \int r^3 \cos 2v \sin v dv.$$

Diese Integrale lassen sich meist ohne grosse Mühe in geschlossener Form erhalten, nämlich

$$\int r^3 \cos v dv = a^3 \sqrt{1-e^2} \left[\left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E - \frac{3}{2} e \mu t \right]$$

(μ = mittlere Bewegung, E = exc. Anomalie.)

$$\int r^3 \sin v \cos v dv = a^3 (1-e^2) \left[e \cos E - \frac{1}{4} \cos 2E \right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \cos v dv = \frac{2p}{e^3} \left[p^2 \log \text{nat}\, r - 2pr + \frac{r^2}{2} \right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \cos v dv = \frac{2p^3}{e^3} v - \frac{2a^3}{e^3} \sqrt{1-e^2} \left(4 - \frac{11}{2} e^2 + 3e^4\right) E$$
$$+ \frac{6a^3}{e^3} \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^2 \mu t + \frac{4a^3}{e^2} \sqrt{1-e^2} \left(1 - \frac{e^2}{4} + \frac{e^4}{8}\right) \sin E$$
$$- \frac{a^3 \sqrt{1-e^2}}{2e} \left(1 - \frac{e^2}{2}\right) \sin 2E$$

$$\int r^3 \sin v dv = \frac{p}{2e} r^2$$

$$\int r^3 v \sin v dv = \frac{p}{2e} (r^2 v - a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \mu t)$$

$$\int r^3 \sin^2 v dv = \frac{a^3 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{4} (2E - \sin 2E)$$

$$\int r^3 \sin 2v \sin v\, dv = \frac{2a^3(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e^2}\left[\left(\frac{1}{e}-\frac{3}{2}e\right)E - \frac{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{e}v + (1-e^2)\sin E + \frac{e}{4}\sin 2E\right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \sin v\, dv = \frac{p}{2e}r^2 \cos 2v + \frac{2p^2}{e^2}\left(a\cos E + \frac{p}{e}\log \text{nat}\, r\right)$$

Die Benutzung dieser Ausdrücke würde aber eine wenig übersichtliche Form für die Störung δr ergeben, und wir ziehen es deshalb vor, die Integrale nach Potenzen von e zu entwickeln, wobei wir nur die Anfangsglieder zu kennen brauchen.

Da $r^3 = p^3(1 - 3e\cos v \ldots)$ ist, so findet man leicht

$$\int r^3 \cos v\, dv = p^3\left[-\frac{3}{2}ev + \sin v - \frac{3}{4}e\sin 2v\,..\right]$$

$$\int r^3 v \cos v\, dv = p^3\left[v\sin v + \cos v - \frac{3}{4}ev^2 - \frac{3}{4}ev\sin 2v - \frac{3}{8}e\cos 2v\,..\right]$$

$$\int r^3 \sin v \cos v\, dv = p^3\left[-\frac{1}{4}\cos 2v + \frac{3}{4}e\cos v + \frac{1}{4}e\cos 3v\,..\right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \cos v\, dv = p^3\left[-\frac{1}{2}\cos v - \frac{1}{6}\cos 3v + \frac{3}{4}e\cos 2v + \frac{3}{16}e\cos 4v\,..\right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \cos v\, dv = p^3\left[\frac{1}{2}\sin v + \frac{1}{6}\sin 3v - \frac{3}{4}ev - \frac{3}{4}e\sin 2v - \frac{3}{16}e\sin 4v\,..\right]$$

$$\int r^3 \sin v\, dv = p^3\left[-\cos v + \frac{3}{4}e\cos 2v\,..\right]$$

$$\int r^3 v \sin v\, dv = p^3\left[\sin v - v\cos v - \frac{3}{8}e\sin 2v + \frac{3}{4}ev\cos 2v\,..\right]$$

$$\int r^3 \sin^2 v\, dv = p^3\left[-\frac{1}{4}\sin 2v + \frac{1}{2}v - \frac{3}{4}e\sin v + \frac{1}{4}e\sin 3v\,..\right]$$

$$\int r^3 \sin 2v \sin v\, dv = p^3\left[\frac{1}{2}\sin v - \frac{1}{6}\sin 3v - \frac{3}{4}ev + \frac{3}{16}e\sin 4v\,..\right]$$

$$\int r^3 \cos 2v \sin v\, dv = p^3\left[\frac{1}{2}\cos v - \frac{1}{6}\cos 3v + \frac{3}{16}e\cos 4v\,..\right]$$

In einigen dieser Integrale tritt v ausserhalb des Sinus und Cosinus auf; diese Glieder sind in dem zweiten und siebenten Integrale allerdings nicht vollständig angegeben, jedoch sind sie deshalb nicht von Bedeutung, weil sie mit höheren Potenzen von e multiplicirt sind und ausserdem periodische Factoren haben; v tritt in diesen nur in der ersten Potenz auf. Dagegen tritt v^2 nur in dem zweiten Integrale auf, und zwar ohne periodischen Factor. Die Vernachlässigung von e^2, e^3 . . . ist daher berechtigt, da die wichtigsten der säcularen Glieder mitberücksichtigt sind.

Nun ist

$$\begin{aligned}\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v &+ \frac{C}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \cos v\, dv - \cos v \int r^3 \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{D}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 v \cos v\, dv - \cos v \int r^3 v \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Ee}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \sin v \cos v\, dv\right.\\ &\qquad\qquad \left. - \cos v \int r^3 \sin^2 v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Fe}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \sin 2v \cos v\, dv\right.\\ &\qquad\qquad \left. - \cos v \int r^2 \sin 2v \sin v\, dv\right\}\\ &+ \frac{Ge}{k^2 p}\left\{\sin v \int r^3 \cos 2v \cos v\, dv\right.\\ &\qquad\qquad \left. - \cos v \int r^3 \cos 2v \sin v\, dv\right\}\end{aligned}$$

d. h. mit Vernachlässigung von e^2, e^3 . . . .

$$\begin{aligned}\delta r = c_1 \sin v + c_2 \cos v + \frac{Ca^2}{k^2} + \frac{Da^2}{k^2} v \qquad 36)\\ - \frac{3}{2}\frac{Ca^2}{k^2} ev \sin v - \left(\frac{3}{4}\frac{Da^2}{k^2} + \frac{1}{2}\frac{Ea^2}{k^2}\right) ev \cos v - \frac{3}{4}\frac{Da^2}{k^2} ev^2 \sin v\\ - \frac{1}{3}\frac{Fa^2}{k^2} e \sin 2v - \frac{1}{3}\frac{Ga^2}{k^2} e \cos 2v\end{aligned}$$

Die Constanten c_1 und c_2 hat man gemäss der Bedingung zu bestimmen, dass für die Osculationsepoche, d. h. für $t = 0$, sowohl δr als auch $\frac{d\delta r}{dt}$ verschwinden müssen. Wenn wir

die mit e multiplicirten Glieder bei dieser Bestimmung, welche durchaus nicht die äusserste Schärfe beansprucht, vernachlässigen, so haben wir mit Rücksicht auf die Relation

$$\frac{d\delta r}{dt} = \frac{d\delta r}{dv} \cdot \frac{k\sqrt{p}}{r^2}$$

folgende Bedingungsgleichungen:

$$c_1 \sin v_0 + c_2 \cos v_0 + \frac{a^2}{k^2}(C + Dv_0) = 0$$

$$c_1 \cos v_0 - c_2 \sin v_0 + \frac{a^2}{k^2} D \qquad = 0,$$

woraus

$$c_1 = -\frac{a^2}{k^2}[(C + Dv_0) \sin v_0 + D \cos v_0]$$

$$c_2 = -\frac{a^2}{k^2}[(C + Dv_0) \cos v_0 - D \sin v_0].$$

Es ist zweckmässig, an dieser Stelle eine kurze Erwägung über die Coefficienten C, D, E, F, G anzustellen. In diesen tritt neben den Grössen α'' und β'' auch der Coefficient $\frac{A_0 \omega_0}{p}$ auf, in welchem A_0 das Trägheitsmoment der Sonne, ω_0 die Rotationsgeschwindigkeit derselben, p den Parameter der Planetenbahn bedeutet. Obgleich nun das Trägheitsmoment des Sonnenkörpers unbekannt ist, so können wir doch annehmen, dass es kleiner als $\frac{2}{5} R_0^2$ ist, wenn R_0 den Radius der Sonne bedeutet, deren Masse wir, wie bereits früher gesagt, gleich 1 gesetzt haben. Hieraus ergiebt sich nun, dass $\frac{A_0 \omega_0}{p}$ ein ausserordentlich kleiner Bruchtheil der Geschwindigkeit eines Planeten, z. B. der Erde, sein muss, während α'' und β'' entweder von derselben Ordnung wie diese Geschwindigkeit, oder doch wenigstens merkliche Bruchtheile derselben sind. Wir werden deshalb mit vollem Rechte alle Glieder mit dem Factor $\frac{A_0 \omega_0}{p}$ vernachlässigen, wodurch

unsere Constanten werden, wenn nur die erste Potenz von e mitberücksichtigt wird:

$$\left.\begin{aligned}
C &= \frac{2k^2\theta}{a}(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0) + \frac{k^2\theta e}{2a}(\alpha''\cos 2v_0 \\
&\qquad + \beta''\sin 2v_0 - 2\beta'' v_0) \\
D &= \frac{k^2\theta}{a} e\beta'' \\
E &= 0 \\
F &= -\frac{k^2\theta}{2a}\beta'' \\
G &= -\frac{k^2\theta}{2a}\alpha''
\end{aligned}\right\} \quad 37)$$

Es wird übrigens erlaubt sein, in C das zweite Glied gegen das erste zu vernachlässigen, so dass

$$C = \frac{2k^2\theta}{a}(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0). \qquad 38)$$

Hiernach erhält man für die soeben bestimmten Integrationsconstanten:

$$\left.\begin{aligned}
c_1 &= -2a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\sin v_0 \\
&= -a\theta(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \beta'') \\
c_2 &= -2a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)\cos v_0 \\
&= -a\theta(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin v_0 + \alpha'')
\end{aligned}\right\} \quad 39)$$

Setzt man diese Werthe in den Ausdruck 36) für δr ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
\delta r = 2a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0) &- a\theta(\alpha''\sin 2v_0 - \beta''\cos 2v_0 + \beta'')\sin v \\
&- a\theta(\alpha''\cos 2v_0 + \beta''\sin 2v_0 + \alpha'')\cos v \\
&+ \frac{1}{6}a\theta\beta'' e\sin 2v + \frac{1}{6}a\theta\alpha'' e\cos 2v \\
40) \qquad &+ a\theta\beta'' ev \\
&- 3a\theta(\alpha''\cos v_0 + \beta''\sin v_0)ev\sin v \\
&- \frac{3}{4}a\theta\beta'' e^2 v\cos v \\
&- \frac{3}{4}a\theta\beta'' e^2 v^2\sin v.
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist formell vollständig ausreichend, wenn auch in den Coefficienten kleine Glieder den Hauptgliedern gegenüber vernachlässigt sind.

Wir wenden uns jetzt zu der Gleichung 29), welche die Störung der Länge in der xy-Ebene giebt. Wir setzen fest, dass für die Osculationsepoche die Bahnebene mit der xy-Ebene zusammenfällt, also $i = 0$, $z = 0$, $\varrho = r$ ist. Allmählich werden i und z von 0 verschiedene Werthe annehmen, deren zweite Potenzen und Producte mit Störungsgrössen wir jedoch vernachlässigen wollen. Wir werden deshalb durchweg $\varrho = r$, $\delta\varrho = \delta r$, $\cos i = 1$ setzen, und Gleichung 29) wird, wenn man die Planetenmasse der Sonnenmasse gegenüber vernachlässigt:

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2k\sqrt{p}\,\frac{\delta r}{r^3} + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)\,dt.$$

Da aber

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = \frac{d\delta\lambda}{dv}\cdot\frac{k\sqrt{p}}{r^2},$$

so geht diese Gleichung über in

$$\frac{d\delta\lambda}{dv} = -2\,\frac{\delta r}{r} + \frac{1}{k\sqrt{p}}\int(xY - yX)\,dt. \qquad 41)$$

Wir haben nach 26)

$$xY - yX = \frac{k^2\theta}{r^2}(\alpha y - \beta x) + \frac{k^2\theta A_0\psi_0}{2r^2}.$$

Nun ist

$$x = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i)$$
$$y = r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i),$$

mithin, wenn man

$$\cos i = 1,$$
$$u = v + \omega,$$
$$\Omega + \omega = \Pi$$

setzt,

$$xY - yX = -k^2\theta(-\alpha \sin \Pi + \beta \cos \Pi)\frac{\cos v}{r}$$
$$+ k^2\theta(\alpha \cos \Pi + \beta \sin \Pi)\frac{\sin v}{r} + \frac{k^2\theta A_0 \psi_0}{2r^2}.$$

Zur Abkürzung wollen wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} \alpha \cos \Pi + \beta \sin \Pi &= \alpha''' \\ -\alpha \sin \Pi + \beta \cos \Pi &= \beta''' \end{aligned}\right\} 42)$$

Vernachlässigen wir wie bei der Berechnung von δr das völlig bedeutungslose mit A_0 multiplicirte Glied, so ist

$$xY - yX = k^2\theta\frac{\alpha''' \sin v - \beta''' \cos v}{r}.$$

Das Integral $\int(xY - yX)\,dt$ lässt sich zwar mit Leichtigkeit streng berechnen, da

$$\int\frac{\sin v}{r}\,dt = \frac{\sqrt{p}}{ek}\log \text{nat}\, r$$
$$\int\frac{\cos v}{r}\,dt = \frac{\sqrt{p}}{ek}\left(v - \frac{E}{\cos \varphi}\right),$$

wo φ den Excentricitätswinkel bedeutet.

Wir ziehen jedoch auch an dieser Stelle eine Entwickelung nach den Potenzen von e vor, von denen wir übrigens, mit Vernachlässigung unwesentlicher Glieder, nur die erste beibehalten.

Wir finden

$$\begin{aligned} \int(xY - yX)\,dt = &-k\sqrt{a}\,\theta(\alpha''' \cos v + \beta''' \sin v) \\ &+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{4}(\alpha''' \cos 2v + \beta''' \sin 2v) \\ &+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{2}\beta''' \cdot v \\ &- H, \end{aligned}$$

wo

$$H = -k\sqrt{a}\,\theta(\alpha''' \cos v_0 + \beta''' \sin v_0)$$
$$+ k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{4}(\alpha''' \cos 2v_0 + \beta''' \sin 2v_0) + k\sqrt{a}\,\theta\frac{e}{2}\beta''' v_0.$$

Es wird auch hier genügen, nur das Hauptglied zu berücksichtigen, d. h. zu setzen:

$$H = -k\sqrt{a}\,\theta\,(\alpha''' \cos v_0 + \beta''' \sin v_0). \qquad 43)$$

Ferner findet man mit analogen Vernachlässigungen aus 40):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta r}{r} = {} & 2\theta(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0) - \theta(\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0 + \beta'') \sin v \\
& - \theta(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 + \alpha'') \cos v \\
& - \frac{\theta}{2}(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 \\
& \qquad + \frac{2}{3}\alpha'')\, e \cos 2v \\
& - \frac{\theta}{2}(\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0 \\
& \qquad + \frac{2}{3}\beta'')\, e \sin 2v \\
& + \theta\beta'' e v \\
& - 3\theta(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0)\, e v \sin v \\
& + \frac{1}{4}\theta\beta'' e^2 v \cos v \\
& - \frac{3}{2}\theta(\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0)\, e^2 v \sin 2v \\
& - \frac{3}{4}\theta\beta'' e^2 v^2 \sin v.
\end{aligned}$$

Hiernach ergiebt sich dann nach 41)

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta\lambda}{dv} = {} & -\theta[(4\alpha'' - \alpha''') \cos v_0 + (4\beta'' - \beta''') \sin v_0] \\
& + \theta[2\alpha'' \sin 2v_0 - 2\beta'' \cos 2v_0 + 2\beta'' - \beta'''] \sin v \\
& + \theta[2\alpha'' \cos 2v_0 + 2\beta'' \sin 2v_0 + 2\alpha'' - \alpha'''] \cos v \\
& + \theta\left[\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 + \frac{2}{3}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'''\right] e \cos 2v \\
& + \theta\left[\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0 + \frac{2}{3}\beta'' + \frac{1}{4}\beta'''\right] e \sin 2v \\
& - \frac{\theta}{2}[4\beta'' - \beta'''] e v \\
& + 6\theta[\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0]\, e v \sin v
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{2}\theta\beta'' e^2 v \cos v \\
&+ 3\theta\left[\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0\right] e^2 v \sin 2v \\
&+ \frac{3}{2}\theta\beta'' e^2 v^2 \sin v.
\end{aligned}
$$

Die Integration dieser Gleichung giebt:

$$
\begin{aligned}
\delta\lambda = K &- \theta\left[(4\alpha'' - \alpha''') \cos v_0 + (4\beta'' - \beta''') \sin v_0\right] v \\
&+ \theta\left[2(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0) + 2\alpha'' - \alpha'''\right] \sin v \\
&- \theta\left[2(\alpha'' \sin 2v_0 + \beta'' \cos 2v_0) + 2\beta'' - \beta'''\right] \cos v \\
&+ \frac{\theta}{2}\left[\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0 + \frac{2}{3}\alpha'' + \frac{1}{4}\alpha'''\right] e \sin 2v \\
&- \frac{\theta}{2}\left[\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0 + \frac{2}{3}\beta'' + \frac{1}{4}\beta'''\right] e \cos 2v \\
44) \quad &+ \frac{5}{2}\theta\beta'' e^2 v \sin v \\
&- 6\theta\left[\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0\right] e v \cos v \\
&- \frac{3}{2}\theta\left[\alpha'' \cos v_0 + \beta'' \sin v_0\right] e^2 v \cos 2v \\
&- \frac{3}{2}\theta\beta'' e^2 v^2 \cos v \\
&- \frac{1}{4}\theta(4\beta'' - \beta''') e v^2.
\end{aligned}
$$

Für K findet man das Hauptglied:

$$
\begin{aligned}
K = \theta&\left[(4\alpha'' - \alpha''') \cos v_0 + (4\beta'' - \beta''') \sin v_0\right] v_0 \\
&- \theta\left[2(\alpha'' \cos 2v_0 + \beta'' \sin 2v_0) + 2\alpha'' - \alpha'''\right] \sin v_0 \\
&+ \theta\left[2(\alpha'' \sin 2v_0 - \beta'' \cos 2v_0) + 2\beta'' - \beta'''\right] \cos v_0
\end{aligned}
$$

oder reducirt

$$
K = \theta\left[(4\alpha'' - \alpha''' - \beta''') \cos v_0 + (4\beta'' + \alpha''' - \beta''') \sin v_0\right] \qquad 45)
$$

Wenn es sich um eine genaue numerische Berechnung von δr und $\delta\lambda$ handelte, so würde der Umstand, dass in den Gleichungen 40), 44), 45) von allen Coefficienten nur die Haupttheile berücksichtigt sind, in's Gewicht fallen. Es

wäre in diesem Falle z. B. völlig illusorisch, rein periodische Glieder mit $\sin 2v$ und $\cos 2v$ noch mitzunehmen, da diese mit e multiplicirt sind, während in den Coefficienten von $\sin v$ und $\cos v$, sowie in den constanten Gliedern e vernachlässigt ist. Es ist aber wohl zu beachten, dass es sich hier gar nicht um eine zahlenmässige Summation der Störungsglieder, sondern nur um die Feststellung ihrer Form und eine ungefähre Bestimmung der Einzelbeträge handelt, weshalb die hier vorgenommenen Vernachlässigungen als durchaus zweckmässig anzusehen sind.

Wünscht man aus irgend welchem Grunde eine weitere Entwickelung der Coefficienten, so ist dieselbe nach der vorgetragenen Methode mit Leichtigkeit zu erlangen.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir noch die Störung senkrecht zur Bahnebene erörtern, obgleich dieselbe im Folgenden keine Berücksichtigung finden wird. Die Störungsgrösse ist hier z, also, wenn wir Glieder von der Ordnung θ^2 sowie auch A_0 vernachlässigen, nach 26) und 27)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2 (1 + m) \frac{z}{r^3} = - k^2 \theta \frac{\gamma}{r^2}.$$

Diese Gleichung soll in ähnlicher Weise wie die Differentialgleichung 33) umgeformt werden. Es ist nämlich

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{k^2 p}{r^3} \left(\frac{d^2 \left(\frac{z}{r}\right)}{dv^2} + \frac{z}{r} - \frac{r}{p} \frac{z}{r} \right),$$

mithin wird die Gleichung, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{z}{r} = s \tag{46}$$

setzt,

$$\frac{d^2 s}{dv^2} + s = - \frac{\theta \gamma}{p} r. \tag{47}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet:

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \frac{\theta \gamma}{p} \sin v \int r \cos v \, dv + \frac{\theta \gamma}{p} \cos v \int r \sin v \, dv.$$

Nun ist

$$\int r \cos v \, dv = \frac{p}{e}\left(v - \frac{E}{\cos \varphi}\right)$$

$$\int r \sin v \, dv = \frac{p}{e} \log \operatorname{nat} r,$$

mithin

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \frac{\theta\gamma}{e} \sin v \left(v - \frac{E}{\cos \varphi}\right) + \frac{\theta\gamma}{e} \cos v \log \operatorname{nat} r. \quad 48)$$

Entwickelt man nach Potenzen von e, so lauten die Anfangsglieder

$$s = c' \sin v + c'' \cos v - \theta\gamma + \frac{\theta\gamma}{2} e v \sin v.$$

Da für die Osculationsepoche $t = 0$

$$s = 0 \text{ und } \frac{ds}{dv} = 0,$$

so ergiebt sich genähert

$$c' = \theta\gamma \sin v_0, \quad c'' = \theta\gamma \cos v_0,$$

also mit dem mehrfach erörterten beschränkten Genauigkeitsgrade der Coefficienten:

$$s = \theta\gamma \cos (v - v_0) - \theta\gamma + \frac{\theta\gamma}{2} e v \sin v. \quad 49)$$

Ist der Planet, dessen Störungen hier berechnet sind, von einem Trabanten begleitet, so gelten die Störungswerthe für den Schwerpunkt des Systems.

Die hier berechneten Störungsgrössen δr und $\delta \lambda$ werden in den folgenden Entwickelungen, in denen allerdings nur die Hauptglieder Berücksichtigung finden, unter der Bezeichnung δr_1 und $\delta \lambda_1$ auftreten.

III. Die Bewegung des Mondes.

Wir haben die Gleichungen 20) und 21) zuerst in der Weise zu integriren, dass wir die Glieder von der Ordnung der Excentricitäten, Neigungen und der Sonnenstörungen des Mondes vernachlässigen. Die Differentialgleichung 20) wird alsdann

$$a\frac{d^2\delta r}{dt^2} + k^2\left(\frac{m+m_0}{a^3} - \frac{2m_1}{a_1^3}\right)a\delta r \qquad 50)$$
$$= 2\int(Xdx + Ydy + Zdz) + (xX + yY + zZ),$$

wo a_1 die halbe grosse Axe der von der Sonne beschriebenen Elipse ist, und a die mittlere Entfernung des Mondes vom Erdmittelpunkt bedeutet.

Gleichung 21) wird alsdann

$$a^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2a\frac{d\lambda}{dt}\delta r + \int(xY - yX)\,dt,$$

oder, wenn man für $\frac{d\lambda}{dt}$ die mittlere Winkelbewegung n des Mondes setzt,

$$a^2\frac{d\delta\lambda}{dt} = -2an\delta r + \int(xY - yX)\,dt. \qquad 51)$$

Für die auftretenden Kraftcomponenten sind dann natürlich unter demselben Gesichtspunkte nur die Hauptglieder auszuwählen.

Man findet, wenn l und l_1 die mittleren Längen von Mond und Sonne, n_1 die mittlere Bewegung der Sonne bedeutet,

$$xX + yY + zZ = \theta a^2\Big\{2n^2(\alpha\cos l + \beta\sin l) - \frac{9}{2}n_1^2(\alpha\cos l_1 + \beta\sin l_1)$$
$$-\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\cos(2l - l_1) + \beta\sin(2l - l_1)] + 2n^2n_1a_1\sin(l_1 - l)\Big\}$$

$$\frac{Xdx+Ydy+Zdz}{dt}=\theta a^2 n\Big\{n^2(\alpha\sin l-\beta\cos l)-\frac{3}{2}n_1^2(\alpha\sin l_1-\beta\cos l_1)$$
$$+\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\sin(2l-l_1)-\beta\cos(2l-l_1)]+n^2n_1a_1(\cos l_1-l)$$
$$+\frac{m}{m_0}n^3a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}+\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\Big\}$$

$$xY-yX=\theta a^2\Big\{n^2(\alpha\sin l-\beta\cos l)-\frac{3}{2}n_1^2(\alpha\sin l_1-\beta\cos l_1)$$
$$+\frac{3}{2}n_1^2[\alpha\sin(2l-l_1)-\beta\cos(2l-l_1)]+n^2n_1a_1\cos(l_1-l)$$
$$+\frac{m}{m_0}n^3a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}+\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\Big\}$$

$$\int(Xdx+Ydy+Zdz)=\theta a^2 n\Big\{-n(\alpha\cos l+\beta\sin l)+\frac{3}{2}n_1(\alpha\cos l+\beta\sin l_1)$$
$$-\frac{3}{2}\frac{n_1^2}{2n-n_1}[\alpha\cos(2l-l_1)+\beta\sin(2l-l_1)]+\frac{n^2n_1}{n_1-n}a_1\sin(l_1-l)\Big\}$$
$$+\frac{a}{2}ht+\frac{a}{2}C,$$

wo

$$h=2\theta an\left\{\frac{m}{m_0}\cdot n^3a+\frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi+A_0\psi_0}{a^4}-\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right\} \qquad 52a)$$

$$C=-2\theta an\Big\{-n(\alpha\cos l^{(0)}+\beta\sin l^{(0)})+\frac{3}{2}n_1(\alpha\cos l_1^{(0)}$$
$$+\beta\sin l_1^{(0)})-\frac{3}{2}\frac{n_1^2}{2n-n_1}\Big[\alpha\cos(2l^{(0)}-l_1^{(0)})+\beta\sin(2l^{(0)}-l_1^{(0)})\Big]$$
$$+\frac{n^2n_1}{n_1-n}a_1\sin(l_1^{(0)}-l^{(0)})\Big\}, \qquad 52b)$$

wenn $l^{(0)}$ und $l_1^{(0)}$ für die Osculationsepoche $t=0$ gelten.

Einige der hier auftretenden Glieder, die sich unmittelbar aus den Formeln für die Kraftcomponenten ergaben, könnten übrigens ihrer Kleinheit wegen hier fortgelassen werden.

Setzen wir noch

$$n^2-2n_1^2=\nu^2, \qquad 53)$$

so erhalten wir aus 50)

$$\frac{d^2(\delta r)}{dt^2} + \nu^2 \delta r = \theta a \Big\{ 3 n_1 \left(n - \frac{3}{2} n_1\right) (\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$
$$- \frac{3}{2} n_1^2 \frac{4n - n_1}{2n - n_1} [\alpha \cos(2l - l_1) + \beta \sin(2l - l_1)]$$
$$+ \frac{2 n^2 n_1^2}{n - n_1} a_1 \sin(l - l_1) \Big\} + h t + C.$$

Um diese Gleichung zu integriren, beachten wir, dass die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \nu^2 y = \sum \alpha_i \cos(\varkappa_i x + a_i) + \sum \beta_i \sin(\lambda_i x + b_i) + h x + C,$$

in welcher die a_i, b_i, α_i, β_i, $\varkappa_i$, λ_i sowie h und C gegebene Constanten bedeuten, das allgemeine Integral hat

$$y = c_1 \cos \nu x + c_2 \sin \nu x + \sum \frac{\alpha_i}{\nu^2 - \varkappa_i^2} \cos(\varkappa_i x + a_i)$$
$$+ \sum \frac{\beta_i}{\nu^2 - \lambda_i^2} \sin(\lambda_i x + b_i) + \frac{h}{\nu^2} x + \frac{C}{\nu^2},$$

wo c_1 und c_2 die Integrationsconstanten sind.

Dies auf die Differentialgleichung für δr angewandt giebt

$$\delta r = c_1 \cos \nu t + c_2 \sin \nu t + 3 \theta a n_1 \frac{n - \frac{3}{2} n_1}{\nu^2 - n_1^2} (\alpha \cos l_1 + \beta \sin l_1)$$
$$- \frac{3}{2} \theta a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{(2n - n_1)[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \cos(2l - l_1) + \beta \sin(2l - l_1)]$$
$$+ 2 \theta a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{(n - n_1)[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \sin(l - l_1) + \frac{h t}{\nu^2} + \frac{C}{\nu^2} \quad 54)$$

Um die Constanten c_1 und c_2 zu bestimmen bedenke man, dass für die Osculationsepoche $t = 0$ auch δr und $\frac{d \delta r}{dt}$ verschwinden. Hieraus erhält man

$$c_1 = - 3 \theta a n_1 \frac{n - \frac{3}{2} n_1}{\nu^2 - n_1^2} (\alpha \cos l_1^{(0)} + \beta \sin l_1^{(0)})$$
$$+ \frac{3}{2} \theta a \frac{n_1^2 (4n - n_1)}{(2n - n_1)[\nu^2 - (2n - n_1)^2]} [\alpha \cos(2 l^{(0)} l_1^{(0)}) + \beta \sin(2 l^{(0)} l_1^{(0)})]$$
$$- 2 \theta a a_1 \frac{n^2 n_1^2}{(n - n_1)[\nu^2 - (n - n_1)^2]} \sin(l^{(0)} - l_1^{(0)}) - \frac{C}{\nu^2}$$

$$c_2 = 3\,\theta\,a\,n_1^2\,\frac{n-\frac{3}{2}n_1}{\nu\,(\nu^2-n_1^2)}\,(\alpha\sin l_1^{(0)} - \beta\cos l_1^{(0)})$$

$$-\frac{3}{2}\,\theta\,a\,\frac{n_1^2\,(4n-n_1)}{\nu\,[\nu^2-(2n-n_1)^2]}\,[\alpha\sin(2\,l^{(0)}-l_1^{(0)}) - \beta\sin(2\,l^{(0)}-l_1^{(0)})]$$

$$-2\,\theta\,a a_1\,\frac{n^2\,n_1^2}{\nu[\nu^2-(n-n_1)^2]}\cos(l^{(0)}-l_1^{(0)}) - \frac{h}{\nu^3}$$

Den gefundenen Werth 54) von δr haben wir nun in die Gleichung 51) einzusetzen. Bei der hier innegehaltenen Genauigkeit ergab sich

$$\int(x\,Y - y\,X)\,dt = \frac{1}{n}\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

so dass

$$\frac{d\,\delta\lambda}{dt} = -\frac{2\,n}{a}\,c_1\cos\nu\,t - \frac{2\,n}{a}\,c_2\sin\nu\,t - n\,\theta\,(\alpha\cos l + \beta\sin l)$$

$$-\frac{9}{2}\,\theta\,n_1\,\frac{(n-n_1)^2}{n^2-3\,n_1^2}\,(\alpha\cos l_1 + \beta\sin l_1)$$

$$-\frac{3}{2}\,\theta\,\frac{n_1^2}{2\,n-n_1}\,\frac{11\,n^2+3\,n_1^2-6\,n\,n_1}{3\,n^2+3\,n_1^2-4\,n\,n_1}\,[\alpha\cos(2\,l-l_1) + \beta\sin(2\,l-l_1)]$$

$$+\theta\,\frac{n^2\,n_1}{n_1-n}\cdot\frac{3\,n_1+2\,n}{3\,n_1-2\,n}\,a_1\sin(l_1-l) - \frac{h}{a}\,\frac{3\,n^2+2\,n_1^2}{2\,n(n^2-2\,n_1^2)}\cdot t - \frac{C}{a}\cdot\frac{3\,n^2+2\,n_1^2}{2\,n(n^2-2\,n_1^2)}.$$

Die Integration ergiebt

$$\delta\,\lambda = -\frac{2\,n}{a\,\nu}\,c_1\sin\nu\,t + \frac{2\,n}{a\,\nu}\,c_2\cos\nu\,t - \theta\,(\alpha\sin l - \beta\cos l)$$

$$-\frac{9}{2}\,\theta\,\frac{(n-n_1)^2}{n^2-3\,n_1^2}\,(\alpha\sin l_1 - \beta\cos l_1)$$

$$-\frac{3}{2}\,\theta\,\frac{n_1^2}{(2\,n-n_1)^2}\,\frac{11\,n^2+3\,n_1^2-6\,n\,n_1}{3\,n^2+3\,n_1^2-4\,n\,n_1}\,[\alpha\sin(2\,l-l_1) - \beta\cos(2\,l-l_1)]$$

$$-\frac{\theta\,n^2\,n_1}{(n_1-n)^2}\cdot\frac{3\,n_1+2\,n}{3\,n_1-2\,n}\,a_1\cos(l_1-l)$$

$$-\frac{h}{2\,a}\cdot\frac{3\,n^2+2\,n_1^2}{2\,n(n^2-2\,n_1^2)}\cdot t^2 - \frac{C}{a}\cdot\frac{3\,n^2+2\,n_1^2}{2\,n(n^2-2\,n_1^2)}\cdot t + c_3. \qquad 55)$$

Die neue Integrationsconstante c_3 ist so zu bestimmen, dass für die Osculationsepoche $t = 0$ auch $\delta\,\lambda = 0$ wird.

Die Gleichungen 54) und 55) geben eine ungefähre Vorstellung von den durch die endliche Geschwindigkeit der Gravitation bedingten Störungen der Mondbewegung. Will man die Annäherung weiter treiben, so fragt es sich, was für Störungsglieder ein derartiges Interesse beanspruchen, dass ihre schärfere Entwickelung der Mühe lohnt. Offenbar ist es nur die Säcularstörung der Länge, die, falls überhaupt vorhanden, mit der Zeit merklich werden könnte; wir werden uns deshalb auch nur angelegen sein lassen, diese genauer kennen zu lernen.

Die für δr und $\delta \lambda$ gefundenen Werthe 54) und 55) haben wir nun zur Berechnung der indirecten Glieder in den vollständigen Differentialgleichungen 20) und 21) zu verwenden.

Wir haben uns schon überzeugt, dass der Unterschied der geocentrischen und barycentrischen Sonnencoordinaten für uns bedeutungslos ist, weshalb wir, um nicht jetzt die Bezeichnungen zu ändern, statt des in 20) und 21) auftretenden Index 0 überall den Index 1 schreiben.

Setzen wir für den Radiusvector des Mondes den Werth

$$r = a\,[1 + \sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i)]\,, \qquad 56)$$

so wird

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^3}\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)$$

$$= \frac{1}{a^3} - \frac{3}{a^3}\sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i)\,.$$

Dies haben wir in die rechte Seite von 20) einzusetzen; für $\frac{k^2 m_1}{r_0^3}$ genügt es aber n_1^2 zu setzen, da Glieder mit diesem kleinen Factor, welche ausserdem mit der Excentricität der Erdbahn multiplicirt sind, völlig unbedeutend sind.

Gleichung 20) nimmt hiernach folgende Gestalt an

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + (n^2 - 2n_1^2)(r\delta r) = 2\int (Xdx + Ydy + Zdz) + (xX + yY + zZ) \\
+ [3n^2 \sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i) + 6n_1^2 \cos(2l - 2l_1)]\, a\delta r \\
57) \qquad -6n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\delta\lambda - 3n_1^2 a^2 [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{\delta r_1}{a_1} \\
+ 6n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\, \delta\lambda_1 \\
+ \frac{3}{2} n_1^2 a^2 \int [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{d\delta r_1}{a_1} - 3n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1)\, d\delta\lambda_1 \\
+ 3n_1^2 a \int [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{dr_1}{a_1} \delta r - 9n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1) \frac{dr_1}{a_1} \delta\lambda \\
- 6n_1^2 a^2 \int [1 + 3\cos(2l - 2l_1)] \frac{dr_1}{a_1} \frac{\delta r_1}{a_1} + 9n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1) \frac{dr_1}{a_1} \delta\lambda_1 \\
- 6n_1^2 a \int \sin(2l - 2l_1)\, d\lambda_1\, \delta r - 6n_1^2 a^2 \int \cos(2l - 2l_1) d\lambda_1\, \delta\lambda \\
+ 9n_1^2 a^2 \int \sin(2l - 2l_1)\, d\lambda_1 \frac{\delta r_1}{a_1} + 6n_1^2 a^2 \int \cos(2l - 2l_1) d\lambda_1 \delta\lambda_1
\end{aligned}
$$

Wie man sieht, sind in dieser Gleichung die Producte der Coefficienten f_i der Mondungleichheiten, sowie deren Producte mit der Erdbahnexentricität sowie Quadrat etc. der letzteren zum Theil bereits vernachlässigt. In den mit n_1^2 multiplicirten Gliedern sollen auch die ersten Potenzen dieser Grössen vernachlässigt werden, soweit dies noch nicht geschehen ist.

Auf der rechten Seite von Gl. 21) setzen wir

$$\lambda = l + \sum g_i \cos(\lambda_i t + b_i),$$

also

$$\frac{d\lambda}{dt} = n + \sum g_i \lambda_i \cos(\lambda_i t + b_i),$$

wodurch, wenn man noch mit

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}\left[1 - 2\sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i)\right]$$

multiplicirt:

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) - \frac{2\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt$$
$$+ \frac{1}{r^2}\int\left(\frac{\partial^2\Omega}{\partial r\partial\lambda}\delta r + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda^2}\delta\lambda + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial r_1}\delta r_1 + \frac{\partial^2\Omega}{\partial\lambda\partial\lambda_1}\delta\lambda_1\right)dt,$$

oder, indem man in den von Ω abhängigen Gliedern die Excentricitäten etc. vernachlässigt

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) - \frac{2\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) + \frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt$$
$$- 3n_1^2\int\sin(2l - 2l_1)\frac{\delta r}{a} - 3n_1^2\int\cos(2l - 2l_1)\,\delta\lambda$$
$$+ \frac{9}{2}n_1^2\int\sin(2l - 2l_1)\frac{\delta r_1}{a_1} + 3n_1^2\int\cos(2l - 2l_1)\,\delta\lambda_1 \qquad 58)$$

Wir betrachten zuerst die Gleichung 58). Um die Säcularglieder in $\delta\lambda$ zu erhalten, haben wir in $\frac{d\delta\lambda}{dt}$ die nicht periodischen der Zeit t proportionalen Glieder aufzusuchen. Ein solches Glied tritt zunächst in $-\frac{2n}{a^2}(r\delta r)$ auf, weshalb die Neubestimmung dieser Grösse aus 57) nothwendig ist. In den anderen Gliedern von 58), in denen die Grössen δr, $\delta\lambda$, δr_1, $\delta\lambda_1$ durchweg mit Verkleinerungsfactoren behaftet sind, kann man die schon bekannten Annäherungen verwenden.

Um das betreffende Glied aus

$$-2\frac{\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i)$$

zu erhalten, hat man in δr nur die Glieder von der Form $t\cos(\lambda_i t + \text{Const.})$ oder $t\sin(\lambda_i t + \text{Const.})$ zu berücksichtigen. Da derartige Glieder aber in 54) nicht vorhanden sind, so ist für unsern Zweck

$$-2\frac{\delta r}{a}\sum(g_i\lambda_i - 2nf_i)\cos(\lambda_i t + b_i) = 0$$

zu setzen.

In dem Gliede

$$\frac{1}{r^2}\int(xY - yX)dt = \frac{1}{a^2}\left[1 - 2\sum f_i\cos(\lambda_i t + b_i)\right]\int(xY - yX)dt$$

müssen zuerst die in $xY - yX$ auftretenden constanten Glieder bestimmt werden. Bezeichnet man durch Π und Π_1 die Längen des Mond- und Sonnenperigäums, so sind die hier in Betracht kommenden Werthe von $\lambda_i t + b_i$, d. h. die Argumente der bedeutendsten Ungleichheiten der Mondbewegung, die folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} l - \Pi \\ 2l - 2\Pi \end{array}\right\} \text{(Mittelpunktsgleichung)}$$

$$l - 2l_1 + \Pi \quad \text{(Evection)}$$

$$2l - 2l_1 \quad \text{(Variation)}$$

$$l_1 - \Pi_1 \quad \text{(jährliche Gleichung).}$$

Wird der der jährlichen Gleichung entsprechende Werth von f_i mit f_5 bezeichnet, so erhält man nach weitläufigen Rechnungen als constantes Glied in $xY - yX$ den Werth

$$\theta\left[k^2 mn - \frac{1}{2}\frac{k^2 m_1}{a_1^3} a^2 \left(\frac{e_1}{2} + f_5\right)(\alpha \sin \Pi_1 - \beta \cos \Pi_1) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^2} - \frac{A_1\psi_1 a^2}{a_1^4}\right)\right],$$

in welchem freilich das mittelste Glied, da es von der Ordnung $n_1^2 e_1$ resp. $n_1^2 f_i$ ist, ausgelassen wird.

Glieder von der Form $t \sin(\lambda_i t + \text{Const.})$ oder $t \cos(\lambda_i t + \text{Const.})$, welche gleichfalls in $\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\, dt$ der Zeit t proportionale unperiodische Glieder erzeugen könnten, sind in $xY - yX$ nicht vorhanden, so dass für unsere Zwecke

$$\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\, dt = \theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2} - \frac{1}{2}\frac{k^2 m_1}{a_1^3}\left(\frac{e_1}{2} + f_5\right)(\alpha \sin \Pi - \beta \cos \Pi) + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t$$

oder genügend genau

$$\frac{1}{r^2}\int (xY - yX)\, dt = \theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t.$$

Die vier letzten in 58) auftretenden Glieder ergeben bei der hier festgesetzten Genauigkeitsgrenze kein säculares Glied.

Die Differentialgleichung für $\delta\lambda$ lautet demnach

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{2n}{a^2}(r\delta r) + \theta\left[\frac{k^2 m n}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right]t \qquad 59)$$

wo für $(r\delta r)$ nur das der Zeit proportionale unperiodische Glied einzusetzen ist.

Wir wenden uns nunmehr zu der Gleichung 57), um das soeben genannte Glied zu bestimmen. Dasselbe wird offenbar hervorgebracht durch ein analog gestaltetes Glied auf der rechten Seite von 57).

Zunächst ist das constante Glied in $2\,\frac{X dx + Y dy + Z dz}{dt}$ zu untersuchen. Die mühsame und langwierige Entwickelung, welche hier nicht vorgeführt werden soll, ergab als constanten Theil

$$\frac{k^2 m_1 a^2}{2 a_1^3}\theta\left[n_1(f_5 - g_5) - n(2f_5 + e_1)\right]\left[\alpha \sin \Pi_1 - \beta \cos \Pi_1\right]$$
$$+ 2k^2 m n^2 \theta + k^2 a^2 n \theta\left(\frac{A\omega}{a^4}\cos J + \frac{A_0\omega_0}{a^4}\cos J_0 + \frac{A_1\omega_1}{a_1^4}\cos J_1\right)$$
$$- 2k^2\theta A_1 \frac{a^2}{a_1^4} n \psi_1,$$

wo ω, ω_0, ω_1 die Rotationsgeschwindigkeiten von Mond, Erde und Sonne, J, J_0, J_1 die mittleren Neigungswinkel der betreffenden Aequatoren gegen die Ebene der Mondbahn bedeuten. Aus bereits erörterten Gründen kann das erste Glied fortgelassen werden.

Mit ausschliesslicher Rücksicht auf das entwickelte Glied haben wir also

$$2\int(X dx + Y dy + Z dz) = 2a^2 n\theta\left[\frac{k^2 m n}{a^2}\right.$$
$$\left. + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\omega\cos J + A_0\omega_0\cos J_0}{a^4} + \frac{A_1\omega_1\cos J_1}{a_1^4}\right) - k^2\frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right]t.$$

Indess lässt sich dieser Ausdruck mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit der Lage der Mondbahn noch vereinfachen. Es ist nämlich leicht zu erkennen, dass die mittleren Neigungen der Aequatoren gegen die Mondbahn wenig von den Neigungen der Aequatoren gegen die Ekliptik abweichen; die Cosinusse werden von den Cosinussen der zuletzt genannten Neigungen nur um Grössen von der Ordnung des Quadrates der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptik verschieden sein. Hiernach ist zu setzen:

$$\omega \cos J = \psi, \quad \omega_0 \cos J_0 = \psi_0, \quad \omega_1 \cos J_1 = \psi_1,$$

woraus

$$2\int (Xdx + Ydy + Zdz) = 2a^2 n\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t.$$

Hinsichtlich eines der Zeit proportionalen Gliedes ist ferner

$$xX + yY + zZ = 0.$$

Desgleichen mit Hülfe der gefundenen angenäherten Störungswerthe

$$\begin{aligned} [3n^2 \sum f_i \cos(\lambda_i t + b_i) + 6n_1^2 \cos(2l - 2l_1)]\, a\delta r &= 0 \\ 6n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\, \delta\lambda &= 0 \\ 3n_1^2 a^2 \left[1 + 3\cos(2l - 2l_1)\right] \frac{\delta r_1}{a_1} &= 0 \\ 6n_1^2 a^2 \sin(2l - 2l_1)\, \delta\lambda_1 &= 0. \end{aligned}$$

In 57) folgen nun zehn Integrale, von denen wir sofort diejenigen vier, welche dr_1 enthalten, fortlassen dürfen, da sie nur Glieder von der Ordnung $n_1^2 e_1$ ergeben. Es ist demnach zu untersuchen, ob die übrig bleibenden sechs Integrale unter dem Integralzeichen Constanten enthalten, welche innerhalb unserer Genauigkeitsgrenze liegen. Das ist, wie man leicht erkennt, nicht der Fall, weshalb diese Integrale sämmtlich $= 0$ zu setzen sind.

Die Gleichung 57) lautet demnach:

$$\frac{d^2(r\delta r)}{dt^2} + (n^2 - 2n_1^2)(r\delta r)$$
$$= 2a^2 n\theta \left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t,$$

also mit ausschliesslicher Rücksicht auf das säculare Glied:

$$r\delta r = \frac{2a^2 n}{n^2 - 2n_1^2}\theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t.$$

Setzt man dies in 59) ein, so erhält man

$$\frac{d\delta\lambda}{dt} = -\frac{3n^2 + 2n_1^2}{n^2 - 2n_1^2}\theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t,$$

mithin

$$\delta\lambda = -\frac{3n^2 + 2n_1^2}{2(n^2 - 2n_1^2)}\theta\left[\frac{k^2 mn}{a^2} + \frac{k^2}{2}\left(\frac{A\psi + A_0\psi_0}{a^4} - \frac{A_1\psi_1}{a_1^4}\right)\right] t^2. \quad 60)$$

Dies ist also die Säcularstörung der Mondlänge, deren Werth sich, wie der Vergleich mit 52a) und 55) zeigt, durch eine erste Berücksichtigung der indirecten Glieder auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen nicht geändert hat. Wie das Vorzeichen von $\delta\lambda$ zeigt, hat man es nicht mit einer Beschleunigung, sondern mit einer Verzögerung der Bewegung des Mondes zu thun, und dieses Resultat würde auch Bestand behalten, wenn man durch weiter getriebene Approximationen, die auf Grund des Vorhergehenden principiell einfach, in der Ausführung aber äusserst complicirt sein werden, den Werth von $\delta\lambda$ noch schärfer bestimmen wollte.

Die genaue numerische Berechnung von $\delta\lambda$ ist auch abgesehen von dem unbekannten Factor θ wegen der Unbekanntschaft mit den Trägheitsmomenten A, A_0, A_1 nicht möglich.

Nennen wir die Radien von Mond, Erde und Sonne ϱ, ϱ_0, ϱ_1, so können wir setzen

$$A = \frac{2}{5} \varrho^2 m \varepsilon$$

$$A_0 = \frac{2}{5} \varrho_0^2 m_0 \varepsilon_0$$

$$A_1 = \frac{2}{5} \varrho_1^2 m_1 \varepsilon_1,$$

wo die Factoren ε, ε_0, ε_1 vermuthlich ächte Brüche sind, da die betreffenden Körper höchst wahrscheinlich nach dem Mittelpunkte zu an Dichtigkeit zunehmen.

Man kann hiernach $\delta\lambda$ unter folgender Form darstellen:

$$\delta\lambda = -\frac{3}{2} \frac{1 + \frac{2}{3}\left(\frac{n_1}{n}\right)^2}{1 - 2\left(\frac{n_1}{n}\right)^2} \cdot \frac{am}{m_0 + m} \cdot n^3 \theta \left[1 + \frac{1}{5}\left(\frac{\varrho}{a}\right)^2 \frac{\psi}{n} \cdot \varepsilon \right.$$
$$\left. + \frac{1}{5} \frac{m_0}{m} \cdot \left(\frac{\varrho_0}{a}\right)^2 \frac{\psi_0}{n} \varepsilon_0 - \frac{1}{5} \frac{m_0 + m}{m} \cdot \frac{a_1}{a} \cdot \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \left(\frac{\varrho_1}{a}\right)^2 \frac{\psi_1}{n} \varepsilon_1 \right] t^2. \tag{61}$$

Nehmen wir an, dass die Geschwindigkeit der Gravitation das G-fache der Lichtgeschwindigkeit ist, welche für die Zeiteinheit des mittleren Sonnentages in planetrischer Längeneinheit ausgedrückt $\frac{86400}{497.78}$ beträgt, so ergiebt sich für t tropische Jahrhunderte

$$\delta\lambda = -\frac{925772''}{G} \left[1 + 0.000004\,\varepsilon + 0.1118\,\varepsilon_0 - 0.0008\,\varepsilon_1\right] t^2,$$

oder, wenn man die ganz unmerklichen Glieder vernachlässigt,

$$\delta\lambda = -\frac{257^0\,9'\,32''}{G} \left[1 + 0.1118\,\varepsilon_0\right] t^2.$$

Um die Säcularstörung der Länge des Mondes auf ein erträgliches Maass herabzudrücken, müsste man daher der Geschwindigkeit der Gravitation einen immensen Werth beilegen, vielleicht das Millionfache der Lichtgeschwindigkeit.