Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXVII. Jahrgang 1897.

München.

Verlag der k. Akademie.

1898.

In Commission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Von zwei Tetraëdern, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind.

Von **Gustav Bauer.**

(Eingelaufen 9. August.)

1. Es seien $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei Tetraëder; x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Coordinaten eines Punktes im Raum, u_i die Coordinaten einer Ebene in Bezug auf das 1te Tetraëder, x_i', u_i' die Coordinaten desselben Punktes, resp. derselben Ebene in Bezug auf das 2te Tetraëder, so hat man bekanntlich die Transformationsgleichungen

$$r \cdot x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad 1)$$

$$\sigma\, u_i' = \alpha_{i1} u_1 + \alpha_{i2} u_2 + \alpha_{i3} u_3 + \alpha_{i4} u_4 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad 2)$$

wo die α_{ik} die Coefficienten der Elemente a_{ik} der Determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ — & — & — & — \\ — & — & — & — \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

sind. Nun ist aber der Coefficient a_{ik} in den ersten Gleichungen bis auf einen constanten Faktor die Distanz der i^{ten} Seitenebene des 2ten Tetraëders von der k^{ten} Ecke des ersten. Geht also die i^{te} Seitenebene des 2ten Tetraëders durch die i^{te} Ecke des ersten, $(i = 1, 2, 3, 4)$, so muss

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0 \qquad 3)$$

sein. Wir wollen A, B, C, D die 1^{te}, 2^{te}, 3^{te}, 4^{te} Ecke, mithin auch die diesen Ecken gegenüberliegenden Seiten die 1^{te}, 2^{te}, 3^{te}, 4^{te} Seitenfläche des 1^{ten} Tetraëders nennen und analog die Ecken und Seitenflächen des 2^{ten} Tetraëders bezeichnen; dann ist durch die Gleichungen 3) festgesetzt, dass die Ebene $B'\,C'\,D'$ durch die Ecke A, $A'\,C'\,D'$ durch B, $A'\,B'\,D'$ durch C und $A'\,B'\,C'$ durch D geht.

2. Ferner ist der Coefficient a_{ik} in den Gleichungen 2) bis auf einen constanten Faktor gleich der Distanz der i^{ten} Ecke des 2^{ten} Tetraëders von der k^{ten} Seitenfläche des 1^{ten}. Machen wir also die Bedingung, dass die i^{te} Ecke des 2^{ten} Tetraëders in der i^{ten} Seitenfläche des ersten liege, $(i = 1, 2, 3, 4)$, so muss sein

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = a_{44} = 0. \tag{4}$$

Indem wir diese Annahme machen, setzen wir fest, dass die Ecke A' in der Ebene $B\,C\,D$, B' in $A\,C\,D$, C' in $A\,B\,D$ und D' in $A\,B\,C$ liege. Die beiden Tetraëder sind dann einander zugleich eingeschrieben und umschrieben und zwar haben sie die besondere Lage zu einander, dass je drei Seitenflächen des 2^{ten} Tetraëders, welche durch die drei Ecken einer Seitenfläche des 1^{ten} Tetraëders gehen (z. B. A, B, C), sich in einem Punkt (D') derselben Seitenfläche schneiden.

Ein solches Tetraëderpaar bilden, wie bekannt, irgend vier Punkte einer Raumcurve 3^{ter} Ord. und die Osculationsebenen der Curve an diesen Punkten.

3. Man sollte nun glauben, dass wenn zu den 8 Bedingungen 3) und 4) noch zwei Ecken des 2^{ten} Tetraëders in den betreffenden Ebenen des 1^{ten} Tetraëders willkürlich gegeben werden (4 Bedingungen äquivalent) oder zwei seiner Seitenflächen durch die entsprechenden Ecken des 1^{ten} Tetraëders das 2^{te} Tetraëder vollkommen bestimmt wäre. Diess ist aber nicht der Fall; denn die 8 Bedingungen 3) und 4) sind nicht unabhängig von einander und gelten nur für 7 Bedingungen.

In der That werden die Gleichungen 4) unter Berücksichtigung der Gleichungen 3)

$$\frac{a_{32}\,a_{24}\,a_{43}}{a_{23}\,a_{42}\,a_{34}} = -1,\quad \frac{a_{13}\,a_{34}\,a_{41}}{a_{31}\,a_{43}\,a_{14}} = -1,\quad \frac{a_{21}\,a_{14}\,a_{42}}{a_{12}\,a_{41}\,a_{24}} = -1,$$

$$\frac{a_{23}\,a_{31}\,a_{12}}{a_{32}\,a_{13}\,a_{21}} = -1 \qquad 4^{1})$$

und man sieht sofort, dass die drei ersten Gleichungen durch Multiplication die vierte geben.

Hat man also die erste Ebene des 2ten Tetraëders durch A gehend und ebenso die zweite Ebene durch B gehend willkürlich angenommen, so schneiden sich die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit der Ebene ABC in dem Punkte D', und ebenso ihre Durchschnittslinien mit der Ebene ABD in dem Punkte C'. Ausserdem schneidet die erste Ebene durch A die Ebene ACD noch in einer Geraden g und die zweite Ebene durch B schneidet die Ebene BCD in einer Geraden h; auf der Geraden g muss der Punkt B' liegen, auf der Geraden h der Punkt A'. Diese Punkte werden ausgeschnitten durch die dritte Seitenebene des 2ten Tetraëders, die durch CD' hindurchgehen muss, aber unbestimmt bleibt, oder auch durch die vierte Seitenebene, welche durch D und C' hindurchgehen muss. Damit also das 2te Tetraëder ganz bestimmt sei, muss ausser den zwei Ebenen durch A und B noch die Stellung der dritten Ebene um eine hiedurch bestimmte Gerade gegeben sein, oder was dasselbe ist, ausser den zwei Ecken D', C' muss noch eine dritte Ecke auf einer durch die Annahme von D' und C' bestimmten Geraden gegeben werden. Dreht sich die dritte Seitenfläche um CD', so dreht sich zugleich die vierte Seitenfläche um DC' und der Durchschnitt dieser beiden Ebenen $A'B'$ gleitet hiebei an den vier Geraden g, h, CD', DC' hin. Diese vier Geraden gehören also zu der einen Regelschaar eines Hyperboloids, das von $A'B'$ beschrieben wird. Die 8 Ecken der zwei Tetraëder liegen auf diesem Hyperboloid.

4. Diese eben besprochene Abhängigkeit zwischen den 8 Bedingungen 3) und 4) ist übrigens, wie ich nachträglich gefunden, schon vor langer Zeit von Moebius bemerkt worden. In einer kleinen Schrift, betitelt: „Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heissen?“ [1]) bemerkt Moebius zunächst, dass die Forderung paradox erscheine, dass aber das Paradoxe der Forderung verschwinde, wenn die Spitzen der einen auch in den erweiterten Seitenflächen der andern liegen können. Dann fährt er fort: „Heissen nämlich A, B, C, D die vier Spitzen der einen und F, G, H, J die vier Spitzen der andern Pyramide, so lässt sich darthun, dass die acht hierzu erforderlichen Bedingungen:

I) A in GHJ	V) F in BCD
II) B in HJF	VI) G in CDA
III) C in JFG	VII) H in DAB
IV) D in FGH	VIII) J in ABC

sehr wohl neben einander bestehen können und überdies noch, dass jede dieser acht Bedingungen eine Folge der sieben übrigen ist.“ Hierauf gibt er den Beweis dieses Satzes mittelst seines barycentrischen Calcüls.

5. Diese Darlegung von Moebius erfordert aber eine sehr wesentliche Ergänzung; denn nach dem Wortlaut der Schrift scheint Moebius angenommen zu haben, dass zwei Tetraëder, welche einander zugleich eingeschrieben und umschrieben sind, immer die von ihm aufgestellten 8 Bedingungen, (welche mit den Bedingungen 3) und 4) zusammenfallen), erfüllen müssen. Diess ist jedoch keineswegs der Fall; denn halten wir die 4 Bedingungen 3) und ihre dort gegebene Auslegung fest, so können wir die Ecken A', B', C', D' des 2ten Tetraëders noch beliebig auf die Seitenflächen des 1ten Tetraëders vertheilen. Es ändern sich dabei die Bedinguugen 4) und wir

---

[1]) Crelle's Journ. 1828. Bd. 3 p. 273—278, und Ges. Werke I. p. 439.

erhalten damit verschiedene Typen für solche Tetraëderpaare, je nachdem unter den a_{ik}, welche verschwinden sollen, zwei, einer oder keiner aus der ersten Diagonalreihe des Systems der a

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}$$

entnommen ist.[1]) Vertauschen wir die Bedingungen 4) in

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{43} = 0 \qquad 5)$$

so haben wir den 2ten Typus; vertauschen wir sie in

$$a_{11} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{42} = 0 \qquad 6)$$

so haben wir einen 3ten Typus; ersetzen wir sie aber durch

$$a_{12} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{41} = 0 \qquad 7)$$

so haben wir einen 4ten Typus.

Hiebei ist zu bemerken, dass sich der Typus nicht ändert, wenn man dieselben zwei Zahlen zugleich in den ersten und in den zweiten Indices vertauscht.

Diese Typen sind geometrisch deutlich von einander geschieden dadurch, dass es in dem Typus II nur noch zweimal, beim Typus III nur einmal, beim Typus IV gar nicht vorkommt, dass die durch drei Ecken des 1ten Tetraëders hindurchgehenden Ebenen des 2ten Tetraëders sich in der Ebene dieser drei Ecken schneiden.

Gelten z. B. die Bedingungen 5), so liegt A' in $B\,C\,D$, B' in $A\,C\,D$, C' in $A\,B\,C$ und D' in der dritten Ebene $A\,B\,D$. Die in A' zusammenstossenden Seitenflächen $A'\,C'\,D'$, $A'\,B'\,D'$,

---

[1]) Drei a aus der Diagonalreihe $= 0$ gesetzt, erfordern natürlich als vierte Bedingung, dass auch das vierte Element der Diagonalreihe $= 0$ gesetzt werde, und man hat dann den 1ten Typus.

$A' B' C'$ gehen resp. durch B, C, D; die in B' zusammenstossenden $B' C' D'$, $A' B' D'$, $A' B' C'$ gehen durch A, C, D; hingegen die in C' zusammenstossenden Seitenflächen gehen resp. durch A, B, D; die in D' zusammenstossenden resp. durch A, B, C.

Diese Typen II—IV unterscheiden sich ferner von dem ersten Typus sehr wesentlich dadurch, dass die 8 Bedingungen, welche die zwei Tetraëder erfüllen müssen, von einander unabhängig sind, also für volle acht Bedingungen zählen (mit einer sogleich zu besprechenden Ausnahme). Gibt man mithin zwei Seitenflächen (oder zwei Ecken) des zweiten Tetraëders, so ist letzteres bestimmt. Die Berechnung der übrigen Elemente führt auf eine quadratische Gleichung. Es gibt mithin in allen diesen Fällen je nach der Wahl der zwei ersten Elemente im allgemeinen zwei reelle Lösungen oder gar keine.

6. Ein bemerkenswerther Ausnahmefall des Typus IV ergiebt sich, wenn die vier verschwindenden a symmetrisch zu der Hauptdiagonale des Systems der a liegen. Dieser Typus V ist mithin durch die Bedingungen

$$a_{12} = 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{34} = 0, \quad a_{43} = 0 \tag{8}$$

charakterisiert. Zu diesem Typus gehört also auch der Fall, wenn die vier a der zweiten Diagonale des Systems der a verschwinden, nämlich

$$a_{14} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{32} = 0, \quad a_{41} = 0,$$

welche durch Vertauschung der Zahlen 2 und 4 aus den Bedingungen 8) sich ergeben.

In diesem Falle besteht nämlich, wie beim Typus I, eine Abhängigkeit zwischen den 8 Bedingungen, sodass sie nur für 7 Bedingungen zählen.

Man findet nämlich leicht, dass, wenn die 4 Gleichungen 3) gelten, die Gleichung besteht

$$a_{12}\, a_{12} + a_{21}\, a_{21} = a_{34}\, a_{34} + a_{43}\, a_{43} \tag{9}$$

Da nun in unserm Problem $a_{12}, a_{21}, a_{34}, a_{43}$ nicht Null sein können, so folgt, dass von den Bedingungen 8) die eine eine Folge der drei andern ist.

Es tritt also auch hier, wie bei Typus I, der Fall ein, dass wenn von dem 2ten Tetraëder entweder zwei Ecken oder zwei Seitenflächen gegeben sind, die Bestimmung des 2ten Tetraëders noch unendlich viele Lösungen zulässt, indem man die dritte Ecke noch auf einer gewissen Geraden willkürlich wählen kann, oder auch die Stellung einer dritten Seitenfläche um eine gewisse Gerade.

7. Dieser Fall hat auch noch das bemerkenswerthe, dass alle vier Ecken des 2ten Tetraëders innerhalb der Dreieckseiten des ersten Tetraëders fallen können, sodass also das zweite Tetraëder ganz innerhalb des ersten liegt (was bei dem Typus I offenbar nicht möglich ist).

Nimmt man z. B. für den Punkt A' den Schwerpunkt der zweiten Seitenfläche $A\,C\,D$, für B' den Schwerpunkt der ersten Seitenfläche $A\,C\,D$, womit die zwei ersten Bedingungen 8) erfüllt sind; nehmen wir ferner die Ecke D als Anfangspunkt der Coordinaten, die Kanten $D\,A$, $D\,B$, $D\,C$ als Axen der x, der y und der z an und sind a, b, c die Längen dieser Kanten, so findet man als Ort des Punktes $C'\,(x'\,y'\,z')$ in der vierten Seitenfläche $A\,B\,C$ gelegen, die Gerade

$$z' = \frac{c}{2}, \quad \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} - \tfrac{1}{2} = 0;$$

und als Ort des Punktes $D'\,(x''\,y''\,z'')$ in der dritten Seitenfläche $A\,B\,D$ gelegen, die zur vorigen parallele Gerade

$$z'' = 0, \quad \frac{x''}{a} + \frac{y''}{b} - \tfrac{1}{2} = 0.$$

Die zwei Punkte C', D' sind dann ferner durch die Gleichungen an einander gebunden

$$\frac{y'}{b} = \frac{x''}{a}, \quad \frac{x'}{a} = \frac{y''}{b},$$

oder auch

$$x' + x'' = \frac{a}{2}, \quad y' + y'' = \frac{b}{2}.$$

Bewegt sich C' innerhalb des Dreiecks ABC, so bewegt sich auch D' innerhalb des Dreiecks ABD. Die Mitten der beiden Geraden, soweit sie in den Seiten des Tetraëders selbst liegen, sind solche entsprechende Punkte C', D'.