Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XVIII. Jahrgang 1888.

München
Verlag der K. Akademie
1889.

In Commission bei G. Franz.

Ueber diejenigen Flächen, auf denen zwei Schaaren geodätischer Linien ein conjugirtes System bilden.

Von A. Voss in München.

(Eingelaufen 3. März.)

Von Liouville rührt bekanntlich der Satz her, dass von zwei Schaaren reeller geodätischer Linien auf einer Fläche (mit Ausnahme der developpabelen Flächen) kein orthogonales System gebildet werden kann. Dagegen ist meines Wissens die Frage bisher nicht erörtert worden, unter welchen Umständen zwei Schaaren geodätischer Curven auf einer Fläche ein conjugirtes System bilden können. Eine nähere Untersuchung derselben, aus der im folgenden einige Resultate mitgetheilt werden sollen, zeigt, dass die Bestimmung dieser Flächen mit derjenigen der Flächen constanter Krümmung eng zusammenhängt. Dabei ist indessen der Fall reeller geodätischer Linien vorausgesetzt; lässt man auch imaginäre Systeme zu, so ergeben sich noch andere Lösungen, wie die im folgenden besprochenen; so z. B. würden auf allen Minimalflächen die Minimalcurven selbst ein solches System bilden. Andererseits mag im vornherein der Fall der Developpabelen ausgeschlossen sein; auf ihnen bilden die Erzeugenden mit jeder Schaar geodätischer Curven ein solches System.

Wird eine krumme Fläche zu der Kugel mit dem Radius Eins in diejenige Beziehung versetzt, welche man als sphärische Abbildung derselben auf die Kugel bezeichnet, so wird im allgemeinen der Winkel Θ zwischen den Parameterlinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, in der Abbildung nicht erhalten bleiben. In Bezug hierauf kann man den folgenden, auch leicht aus geometrischen Betrachtungen ableitbaren Satz aufstellen:

Der Cosinus des Winkels Θ unter dem sich irgend zwei Richtungen auf der Fläche schneiden, bleibt bei sphärischer Abbildung (bis aufs Vorzeichen) in den folgenden drei Fällen ungeändert:

Erstens, wenn die Fläche eine Minimalfläche oder eine Kugel ist;

zweitens, wenn die beiden Richtungen zu einander conjugirt sind;

drittens, wenn dieselben invers conjugirt sind.

Unter der invers conjugirten Richtung zu einer gegebenen verstehe ich dabei diejenige, nach welcher die Krümmung des Normalschnittes ebenso gross ist, wie nach der conjugirten, oder welche mit einem der Hauptschnitte denselben Winkel bildet, wie die conjugirte Richtung. Die Doppelstrahlen der conjugirten Beziehung, d. h. die (in negativ gekrümmten Theilen der Fläche reellen) Haupttangenten sind invers conjugirt; umgekehrt sind die symmetrisch zu den Hauptschnitten gelegenen conjugirten Richtungen die (auf positiv gekrümmten Flächentheilen reellen) Doppelstrahlen der invers conjugirten Beziehung. Auf den Minimalflächen insbesondere stehen invers conjugirte Richtungen zu einander senkrecht, auf der Kugel sind sie unbestimmt.

Bezeichnet man durch X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale eines Punctes x, y, z der Fläche, durch e, f, g die Coefficienten des Längenelementes

$$ds^2 = e\,du^2 + 2\,f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

durch E, F, G die Ausdrücke[1])

$$E = X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$F = X\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v},$$

$$G = X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

setzt man ferner

$$\sigma = \sqrt{eg - f^2},$$

1) $$\sigma A_1 = e\frac{\partial f}{\partial u} - \tfrac{1}{2} e\frac{\partial e}{\partial v} - \tfrac{1}{2} f\frac{\partial e}{du},$$

$$\sigma C = g\frac{\partial f}{\partial v} - \tfrac{1}{2} g\frac{\partial g}{\partial u} - \tfrac{1}{2} f\frac{\partial g}{\partial u},$$

so sind die Bedingungen für ein aus conjugirten Curven gebildetes System geodätischer Linien u = const, v = const

2) $$F = o,\ A_1 = o,\ C = o.$$

Durch Integration der Gaussischen Differentialgleichungen zwischen den E, G, F, e, g, f erhält man leicht:

3) $$E = \sqrt{\frac{\sigma}{g}}\,U,$$

$$G = \sqrt{\frac{\sigma}{e}}\,V,$$

1) Bei Anwendung dieser Bezeichnung wird die invers con jugirte Beziehung zwischen zwei Richtungen du, dv; du', dv' durch die Bedingung

$$(Eg - 2Ff + Ge)(E\,du\,du' + F(du\,dv' + dv\,du') + G\,dv\,dv')$$
$$= 2(EG - F^2)(e\,du\,du' + f(du\,dv' + dv\,du') + g\,dv\,dv')$$

ausgedrückt.

in welchen Gleichungen U resp. V willkürliche Functionen von u, resp. v bedeuten, die jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit gleich der Einheit gewählt werden können, wie im folgenden geschehen soll. Aus den Gleichungen 3) ergiebt sich alsdann:

$$4) \quad \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} = -\frac{f}{\sqrt{ge}} = -\lambda;$$

mithin wird das Längenelement auf der Kugel gegeben durch den Ausdruck:

$$5) \qquad d\Sigma^2 = du^2 + dv^2 - 2\lambda\, du\, dv.$$

Das liefert den folgenden Satz:

1) **Bei der sphärischen Abbildung einer Fläche, auf der zwei Schaaren reeller geodätischer Curven ein conjugirtes System bilden, gehen dieselben in ein System äquidistanter Curven auf der Kugel über.**

Umgekehrt lässt sich leicht beweisen:

2) **Finden für eine Fläche die Gleichungen**

$$6) \qquad F = o, \quad \frac{\partial E\sqrt{\frac{g}{\sigma}}}{\partial v} = o, \quad \frac{\partial G\sqrt{\frac{e}{\sigma}}}{\partial u} = o,$$

statt, so ist dieselbe bezogen auf zwei geodätische Schaaren, die ein conjugirtes System bilden.

Bekanntlich werden alle reellen Eintheilungen der Kugelfläche in äquidistante Systeme durch die Abbildung der Haupttangentencurven der Flächen constanter negativer Krümmung -1 auf die Kugel gewonnen. Man kann daher die Bestimmung der Flächen, auf denen zwei geodätische Schaaren ein conjugirtes System bilden, durch folgenden Satz mit dem Problem der Flächen constanter Krümmung in Verbindung setzen.

3) Einer jeden Eintheilung der Kugel in zwei Schaaren äquidistanter Curven entspricht eine Klasse von Flächen der genannten Eigenschaft, gebildet von allen denjenigen, deren conjugirte Parameterlinien auf der Kugel das gegebene System durch Abbildung erzeugen.

Unter Voraussetzung der Gleichung (5) müssen nämlich für jede Fläche, die zu den äquidistanten Curven der Kegel in der so eben bezeichneten Beziehung steht, und für welche $F = o$ ist, die Gleichungen

$$7) \qquad -\frac{\partial x}{\partial u}\sqrt{1-\lambda^2} = \sqrt{e}\left(\frac{\partial X}{\partial u} + \lambda\frac{\partial X}{\partial v}\right),$$

$$-\frac{\partial x}{\partial v}\sqrt{1-\lambda^2} = \sqrt{g}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\lambda + \frac{\partial X}{\partial v}\right),$$

nebst den entsprechenden für y und z stattfinden. Vermöge der Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen (7) aber erhält man

$$\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\partial\lambda\sqrt{g}}{\partial u},$$

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} = \frac{\partial\lambda\sqrt{e}}{\partial v},$$

welche Gleichungen mit den Bedingungen geodätischer Parameter $A_1 = o$, $C = o$ übereinkommen; ausserdem ist aber den Gleichungen (7) zufolge $F = o$, so dass die Curven auch ein conjugirtes System bilden. Setzt man nun

$$\sqrt{e} = z, \quad \sqrt{g} = \zeta,$$

so wird

$$z(1 + \lambda) = \frac{\partial M}{\partial u},$$

$$\zeta(1 + \lambda) = \frac{\partial M}{\partial v},$$

wo M eine Function ist, die durch die partielle Differentialgleichung

$$8) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial M}{\partial v}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial M}{\partial u}\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right) = 0$$

characterisirt ist, während λ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\frac{\partial \lambda}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v} + 1 - \lambda^2 = 0$$

genügt. Unter der Voraussetzung, dass M eine Lösung der Gleichung (8) ist, ergeben sich daher aus (7) durch Quadratur die Coordinaten x, y, z der gesuchten Flächen.

Es sei hier der Fall hervorgehoben, wo

$$z = \pm \zeta$$

wird; d. h. wo die Flächen durch das conjugirte System der geodätischen Linien in unendlich kleine Rhomben getheilt werden. Für $z = -\zeta$ sind die Krümmungslinien gegeben durch $u \pm v = \text{const}$; sie theilen die Fläche in unendlich kleine Quadrate, und die Form des Längenelementes

$$ds^2 = e\,(du^2 + dv^2 - 2\lambda\, du\, dv)$$

zeigt, dass die Abbildung auf die Kugel eine conforme ist. In der That wird die Fläche eine Minimalfläche; gleichzeitig aber müssen, wie leicht zu zeigen ist, sowohl M als auch λ Functionen von $u - v$ sein. Hat man sonach alle Minimalflächen der verlangten Art bestimmt, so ergeben sich alle Flächen positiver Krümmung, für welche

$$z = \zeta$$

ausfällt, durch folgenden Satz:

4) Einer jeden Minimalfläche der genannten Art ist adjungirt eine zu demselben Systeme äquidistanter Curven auf der Kugel gehörige solche Fläche positiver Krümmung, welche durch Quadratur gefunden wird; und umgekehrt ist auch zu jeder Fläche der letzteren Art eine bestimmte Minimalfläche adjungirt, so dass die adjungirte Beziehung eine reciproke ist.

Von weiteren Betrachtungen die sich hieran schliessen, mag hier endlich noch die Bestimmung derjenigen Rotationsflächen erwähnt werden, auf denen zwei geodätische Schaaren conjugirt sind.

Setzt man die Gleichungen der Rotationsfläche in der Form

$$x = \varrho \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi,$$
$$z = f(\varrho),$$

voraus, betrachtet also ϱ und φ als Functionen von u und v, so wird nach Satz 2) die Bestimmung dieser Flächen zurückgeführt auf die Integration der Gleichungen (6). Auf diesem Wege erhält man, wenn

$$A = \frac{1}{\varrho^2}, \quad B = \frac{1}{\varrho^4}(1 - p^2 f'^2),$$

$$p = \frac{1 + f'^2}{\varrho f''}, \quad \omega = \frac{f'^2}{1 + f'^2},$$

gesetzt wird, durch Integration der Integrabilitätsbedingungen des Problems

$$9) \qquad \frac{\partial \varrho}{\partial u} = p\,\psi, \quad \omega\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\psi}{\varrho}\right)^2,$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial v} = p\,\chi, \quad \omega\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\chi}{\varrho}\right)^2;$$

wo ψ und χ Functionen von u resp. v sind, welche der Gleichung

$$10) \qquad 1 - A(\psi^2 + \chi^2) + B\,\psi^2\chi^2 = o$$

genügen müssen. Eine vollständigere Behandlung der Gleichungen (9) und (10) zeigt, dass ψ und χ Constanten sein müssen. Sämmtliche Rotationsflächen der bezeichneten Art sind daher durch die die beiden willkürlichen Constanten a und b enthaltende Differentialgleichung

$$\left(1 - \frac{a^2}{\varrho^2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{\varrho^2}\right) = \left(\frac{1 + f'^2}{\varrho\, f''}\right)^2 \frac{a^2\, b^2}{\varrho^4}$$

characterisirt, welche für f im allgemeinen ein elliptisches Integral liefert. Unter denselben befinden sich (dem Falle a = b entsprechend) auch solche der vorhin erwähnten Art, welche durch die geodätischen Curven in Rhomben getheilt werden; adjungirt sind denselben die windschiefen Minimalflächen.