Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Classe

der

k. b. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XV. Jahrgang 1885.

München.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1886.

In Commission bei G. Franz.

Herr G. Bauer bespricht und legt eine Abhandlung des correspondirenden Mitgliedes A. Brill in Tübingen vor:

„Ueber rationale Curven und Regelflächen.“

Durch algebraische Untersuchungen wurde ich zu einigen merkwürdigen Eigenschaften der rationalen ebenen und räumlichen Curven sowie der windschiefen Flächen vom Geschlechte Null geführt, über welche ich eine Mittheilung der hohen Classe vorzulegen mich beehre.

Wiewohl die Untersuchungen sich auf eine beliebige Anzahl von Formen beziehen, so will ich doch der Anschaulichkeit wegen an die Theorie der Raumcurven anknüpfen.

Sind x, y, z rechtwinklige Coordinaten, und hat man vier rationale ganze Funktionen n. Grades von einer Grösse λ:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \\ \varphi(\lambda) &= b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n \\ \psi(\lambda) &= c_0 \lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \dots + c_n \\ \chi(\lambda) &= d_0 \lambda^n + d_1 \lambda^{n-1} + \dots + d_n, \end{aligned}$$

so stellen die Gleichungen:

$$x : y : z : 1 = f(\lambda) : \varphi(\lambda) : \psi(\lambda) : \chi(\lambda)$$

die Coordinaten einer „rationalen“ Raumcurve dar, deren Punkte den Werthen des Parameters λ einzeln zugeordnet sind. Die Bedingung:

$$u x + v y + w z + 1 = 0$$

repräsentirt, wenn man sich für x, y, z die Werthe eingesetzt denkt, eine im Raum veränderliche Ebene, nämlich die dem Curvenpunkte mit dem Werthe λ zugehörige Schmiegungsebene.

Ebenso wie durch ihre Punktcoordinaten kann man eine Raumcurve auch durch die Coordinaten u, v, w ihrer Schmiegungsebenen darstellen, welche gleichfalls rationalen Funktionen von λ proportional sind.

Eine Raumcurve n. Ordnung C_n sei durch die ihren Punktcoordinaten proportionalen ganzen Funktionen $f, \varphi, \ldots$ in der obigen Form gegeben, eine andere p^{ter} Classe C^p durch vier ihren Ebenencoordinaten proportionale ganze Funktionen p. Ordnung $\alpha(\mu), \ldots \delta(\mu)$ eines Parameters μ:

$$u : v : w : 1 = \alpha(\mu) : \beta(\mu) : \gamma(\mu) : \delta(\mu),$$

wo:

$$\begin{aligned}
\alpha(\mu) &= p_0\,\mu^p + p_1\,\mu^{p-1} + \ldots + p_p;\\
\beta(\mu) &= q_0\,\mu^p + q_1\,\mu^{p-1} + \ldots + q_p;\\
\gamma(\mu) &= r_0\,\mu^p + r_1\,\mu^{p-1} + \ldots + r_p;\\
\delta(\mu) &= s_0\,\mu^p + s_1\,\mu^{p-1} + \ldots + s_p.
\end{aligned}$$

Die Gleichung:

$$u x + v y + w z + 1 = 0,$$

oder ausgeführt:

$$F(\lambda\mu) \equiv \alpha(\mu) f(\lambda) + \beta(\mu)\varphi(\lambda) + \gamma(\mu)\psi(\lambda) + \delta(\mu)\chi(\lambda = 0,$$

drückt dann aus, dass der Punkt (λ) der Curve C_n auf der Ebene (μ) der Curve C^p gelegen ist. Und zwar ordnen sich jedem Punkte (λ) von C_n diejenigen p Punkte (μ) von C^p zu, welche den p von (λ) aus an C^p möglichen Schmiegungsebenen entsprechen, und umgekehrt gehören zu jeder Ebene (μ) n Punkte (λ). — Wenn nun aber für besonders beschaffene Funktionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu) \ldots$ der Faktor $\lambda-\mu$ aus der ganzen Funktion $F(\lambda\mu)$ *rational sich ausscheiden lässt,* so entspricht einem jeden Punkte (λ) der C_n eindeutig e i n e bestimmte Schmiegungsebene, also einer der p Punkte (μ), so dass in diesem Falle die beiden Curven C_n und C^p eindeutig auf einander bezogen sind.

Solche Funktionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, ..., welche dies leisten, müssen die Gleichung:

$$F(\lambda\lambda) = \alpha(\lambda)\,f(\lambda) + \beta(\lambda)(\lambda)\varphi + \gamma(\lambda)\,\psi(\lambda) + \delta(\lambda)\,\chi(\lambda) = 0$$

identisch erfüllen. Dieselbe lässt sich in die folgenden $n - p + 1$ linearen Gleichungen für die $4(p+1)$ homogenen Coefficienten $p_0, p_1, \ldots q_0, \ldots$ zerfällen:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = p_0a_0 + q_0b_0 + r_0c_0 + s_0d_0 \\
0 = p_0a_1 + q_0b_1 + r_0c_1 + s_0d_1 + p_1a_0 + q_1b_0 + r_1c_0 + s_1d_0 \\
0 = p_0a_2 + \ldots \qquad + p_1a_1 + \ldots \qquad + p_2a_0 + \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right\} (1)$$

Die Coefficienten $p_1\ q_1 \ldots$ sind hierdurch im Allgemeinen bestimmt, wenn:

$$n + p + 1 = 4(p+1) - 1$$

ist, d. h. für:

$$p = \frac{n-2}{3}.$$

Wenn also die ganze Zahl $n - 2$ durch 3 theilbar ist, so gibt es *zu einer rationalen Raumcurve n. Ordnung C_n im Allgemeinen eine bestimmte Raumcurve von der* $p\left(=\frac{n-2}{3}\right)^{\text{ten}}$ *Classe, welche jener sich eindeutig in der Weise zuordnet, dass jede ihrer Schmiegungsebenen durch den ihr entsprechenden Punkt der C_n geht.* Ist jedoch $n - 1$, bezw. n durch 3 theilbar, so giebt es noch ein einfach, bezw. doppelt unendliches System von Raumcurven der $\frac{n-1}{3}\left(\text{bezw.}\frac{n}{3}\right)^{\text{ten}}$ Classe, die eben dasselbe leisten. Ausser diesen giebt es dann noch Systeme von (unzerfällbaren) Curven höherer Ordnung der bezeichneten Art. Denn ausser den gefundenen Funktionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, ... niedrigster Ordnung existiren noch solche höherer Ordnung, welche die Gleichungen (1) befriedigen, jedoch eine grössere Anzahl von unbestimmten Coefficienten enthalten.

So giebt es zu einer rationalen Curve 5. Ordnung ausser dem Ebenenbüschel, welches die vierfach schneidende Sehne der Curve zur Axe hat, noch ein dreifach unendliches System von Kegeln zweiter Ordnung, deren Tangentialebenen einzeln ein rational zerfällbares Schnittpunktsystem mit der Curve besitzen; zu einer rationalen Curve 6. Ordnung giebt es ausser einem ebensolchen ∞^2-System von Kegeln noch ein ∞^5-System von rationalen Curven 3. Classe u. s. w.

Diese Classencurven lassen sich nun aber umgekehrt zu einer linearen Construction der Raumcurve C_n verwenden.

Im Falle erstlich, dasss $\frac{n-2}{3}$ eine ganze Zahl ist, exitsirt ausser jener Curve niedrigster $\left(\frac{n-2}{3}\right)$ Classe noch ein ∞^3-System von Curven $\frac{n+1}{3}$ ter Classe, für welche die Funktionen $\alpha(\mu)$, $\beta(\mu)$, ... die Gleichungen (1) erfüllen. Nimmt man zu der Curve $C^{\frac{n-2}{3}}$ irgend zwei dieses Systems, so schneiden sich ensprechende Ebenen dieser drei abwickelbaren Flächen in einem Punkte der Curve n. Ordnung.

Ueberhaupt wird eine Curve von der Ordnung $p+q+r$ durch den Punkt erzeugt, in welchem sich entsprechende Ebenen von drei rationalen abwickelbaren Flächen der p., q., r. Classe, die eindeutig auf einander bezogen sind, schneiden. In unserem Falle ist in der That:[1])

$$n = \frac{n-2}{3} + 2 . \frac{n+1}{3}.$$

1) Benutzt man statt der Curve $\frac{n-2}{3}$ ter Classe eine dritte Curve der Schaar $\frac{n+1}{3}$ ter Classe, so sondert sich eine Gerade aus

Den Fällen, wo $\frac{n-1}{3}$ und $\frac{n}{3}$ eine ganze Zahl ist, entsprechen in analoger Weise die Zerlegungen:

$$n = 2 \cdot \frac{n-1}{3} + \frac{n+2}{3}$$

$$n = 3 \cdot \frac{n}{3},$$

deren geometrische Bedeutung ersichtlich ist.

Die allgemeine rationale Raumcurve n. Ordnung lässt sich also durch den Schnitt entsprechender Ebenen von drei eindeutig auf einander bezogenen rationalen Curven niederer Classe K $\left(\text{wo } K = \frac{n}{3}, \text{ bezw. } \frac{n-2}{3}, \frac{n-1}{3}; \frac{n-1}{3}, \frac{n+2}{3} \text{ ist}\right)$ *erzeugen.*

Die Raumcurve n. Ordnung ist nicht mehr die „allgemeine", sondern besitzt weniger als 4 n wesentliche Constante, wenn an Stelle jener erzeugenden Curven solche von höherer, bezw. niederer Classe treten. Es geschieht dies in der Weise, dass die Determinanten derjenigen Matrices aus den Coefficienten der Formen $f(\lambda)$, $\varphi(\lambda)$, ..., aus denen die Coefficienten in den Gleichungen jener Curven sich zusammensetzen, verschwinden. So ist für $n = 6$, wo im Allgemeinen eine ∞^2 Schaar von Kegeln 2. Ordnung existirt, deren Tangentialebenen durch entsprechende Punkte der C_6 hindurchgehen, die Bedingung dafür, dass bereits ein Gebilde niederer Ordnung der angegebenen Art existirt, also die Bedingung für eine *fünffach schneidende Sehne der rationalen Raumcurve 6. Ordnung*, die folgende Gleichung:

---

dem erzeugten Gebilde in der Weise aus, dass für einen gewissen Werth des Parameters die drei entsprechenden Ebenen in dieser Geraden sich schneiden.

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & a_5 & b_5 & c_5 & d_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_6 & b_6 & c_6 & d_6 \end{vmatrix} = 0, \text{ }^{1)}$$

und die Curve entsteht, wenn dieselbe erfüllt ist, aus dem Durchschnitt entsprechender Ebenen eines Ebenenbüschels, eines Kegels und einer Curve dritter Classe, indem von der Kegelschaar des allgemeinen Falles jenes Ebenenbüschel sich absondert.

Indem man die Classencurven, aus denen die gegebene Ordnungscurve entsteht, ihrerseits aus solchen niederer Ordnung erzeugt, u. s. w., kommt man schliesslich auf n Punktreihen, bezw. Ebenenbüschel, aus denen sich durch passende Lage und Anordnung der Construction jede rationale Raumcurve n. Ordnung herstellen lässt.

Eine Eigenschaft der Curve $(p+q+r)^{\text{ter}}$ Ordnung, die in der angegebenen Weise durch den Schnitt entsprechender Ebenen von Curven p, q, r^{ter} Classe entsteht, ist die, dass sie (wie unten bewiesen wird) die abwickelbare Fläche p. Classe C^p in denjenigen $p'+q+r$ Punkten (p' ist die Ordnung der C^p) berührt, in welchen eine gerade Erzeugende der Letzteren durch den ihr entsprechenden Punkt der C_{p+q+r} hindurchgeht.

1) Die ähnlich gestaltete Bedingungsgleichung für das Auftreten eines dreifachen Punktes bei einer ebenen rationalen Curve 4. Ordnung findet man in dem Werke: „Ueber Apolarität und rationale Curven" von Franz Meyer (S. 184) aufgestellt, wo auch die Gesichtspunkte für die Bildung anderer derartiger Bedingungen in den Coefficienten der conjugirten Formen entwickelt sind.

Das oben aufgestellte algebraische Problem ergiebt, auf eine andere Variabelnzahl angewandt, einige neue Sätze für ebene Curven und windschiefe Flächen.

Wenn man in zwei Gleichungen vom p. und q. Grad:

$$0 = P + \lambda P_1 + \lambda^2 P_2 + \ldots . \lambda^p P_p \equiv \Pi$$
$$0 = Q + \lambda Q_1 + \lambda^2 Q_2 + \ldots . \lambda^q Q_q \equiv K$$

die Coefficienten P, Q als lineare Funktionen von zwei, resp. drei, nicht homogenen Variabeln x, y (x, y, z) ansieht, so stellen dieselben zwei eindeutig auf einander bezogene ebene Classencurven (resp. abwickelbare Flächen) dar, und der Schnittpunkt (die Schnittgerade) entsprechender Geraden (Ebenen) beschreibt eine ebene Curve (windschiefe Fläche) von der Ordnung $n = p + q$. Dies ist bekannt,[1]) ebenso wie, dass die erzeugte ebene Curve von der Curve p^{ter} Classe, wenn letztere von der Ordnung p' ist, in denjenigen $p + q'$ Punkten berührt wird, in denen entsprechende Punkte beider Curven zusammenfallen.

Dass aber umgekehrt zu jeder rationalen ebenen Curve, wenn n ungerade ist, im Allgemeinen immer eine Curve von der Classe $\frac{n+1}{2}$ (und, wenn n gerade ist, ein ∞^2-System von Curven $\frac{n}{2}^{ter}$ Classe) existirt, mit deren Hilfe jene Construction möglich ist, ergiebt sich aus Betrachtungen, die den oben für Raumcurven angestellten fast wörtlich nachzubilden sind.

Der „allgemeine" Fall, d. h. das Gebilde mit der grössten Constantenzahl, lässt sich aber auch durch eine Abzählung der durch die Construction eingeführten Constanten ermitteln, und ich gehe hierauf um so lieber mit einigen Worten ein, als hierbei die windschiefen Flächen mit umfasst werden.

1) Haase, Zur Theorie der ebenen Curven u. s. w. Math. Annalen, Band 2, Seite 547.

Ist in den obigen Gleichungen:

$$\Pi = 0, \quad K = 0$$

$q > p$, so kann man, nachdem durch eine lineare Transformation von λ vier Constante in den Ausdrücken P in Zahlenwerthe verwandelt worden sind, Π mit einer ganzen Funktion M vom $(q - p)^{\text{ten}}$ Grad multipliciren und zu K zufügen. Durch passende Wahl der Constanten in M lassen sich dann $p - q + 1$ Constante des Ausdrucks:

$$K + M\Pi,$$

der an die Stelle von K gesetzt werden kann, ohne dass sich das Resultat der Elimination von λ ändert, in Zahlenwerthe verwandeln. Alsdann befinden sich, je nachdem die P, Q zwei oder drei Variable enthalten, noch

$$\begin{aligned} A &= 3(p+1) + 3(q+1) - 4 - (q - p + 1) \\ &= 4p + 2q + 1 \\ &= 2n + 2p + 1 \end{aligned}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} B &= 4(p+1) + 4(q+1) - 4 - (q - p + 1) \\ &= 5p + 3q + 3 \\ &= 3n + 2p + 3 \end{aligned}$$

Constante in der Schlussgleichung, von denen sie eine homogene Funktion sein wird.

Hier ist, wegen $q < p$, für n gerade:[1])

$$p < \frac{n}{2},$$

und für n ungerade:

$$p < \frac{n-1}{2}.$$

1) Nur für den Fall, dass $p = q = \frac{n}{2}$ ist, gestaltet sich die obige Abzählung etwas anders, weil ebensowohl an die Stelle von Π wie an die von K eine lineare Combination von K und Π gesetzt werden kann, wodurch die Zahlen werden:

$$A = 3n; \qquad B = 4n + 2.$$

Der grösste Werth, den die Zahlen A und B annehmen können, entspricht im ersteren Falle dem Werth:

$$p = \frac{n-1}{2},$$

woraus sich ergiebt:

$$A = 3n; \qquad B = 4n + 2,$$

die gleichen Werthe, wie sie dem Falle $p = q = \frac{n}{2}$ entsprechen (s. d. letzte Anmerkung unter dem Text).

Was zunächst A angeht, so ist der erhaltene Maximalwerth in der That gleich der Anzahl der in einer allgemeinen *rationalen ebenen Curve n. Ordnung* homogen enthaltenen Constanten. Nach dem Vorstehenden lässt sich dieselbe *durch den Schnitt entsprechender Tangenten von zwei rationalen eindeutig auf einander bezogenen Curven von den Classen* $\frac{n-1}{2}$ *und* $\frac{n+1}{2}$ $\left(\text{bezw.} \frac{n}{2} \text{ und } \frac{n}{2}\right)$ *linear construiren.* Wie im Falle der Raumcurven bedarf es specieller projectivischer Eigenschaften (des Verschwindens gewisser Combinanten von drei binären Formen), wenn die Construction aus niederen (und andererseits höheren) Classencurven erfolgen soll. So ordnet sich einer rationalen ebenen Curve 5. Ordnung im Allgemeinen ein bestimmter ihr eindeutig in der angegebenen Weise entsprechender Klassen-Kegelschnitt zu, dessen Gleichung (in einer aus dem Vorhergehenden verständlichen Bezeichnung) lautet wie folgt:

$$0 = \begin{vmatrix} x\mu^2 & y\mu^2 & \mu^2 & x\mu & y\mu & \mu & x & y & 1 \\ a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_0 & b_0 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_1 & b_1 & c_1 & a_0 & b_0 & c_0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_2 & b_2 & c_2 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a_4 & b_4 & c_4 & a_3 & b_3 & c_3 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a_5 & b_5 & c_5 & a_4 & b_4 & c_4 & a_3 & b_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 & a_4 & b_4 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & b_5 & c_5 \end{vmatrix}.$$

Das Verschwinden der Determinanten der Matrix aus den letzten 7 Horizontal- und 6 Verticalreihen der obigen Determinante reducirt die obige Gleichung auf die eines Strahlbüschels. Dieses, mit einer rationalen Curve vierter Ordnung combinirt, ermöglicht wieder die Construction der Curve 5. Ordnung, welche dann einen vierfachen Punkt im Scheitel des Büschels erhält.

Durch den oben angeführten um 1 verminderten Maximalwerth *der Zahl* B, *also die Zahl* $4n+1$, *ist andererseits die Anzahl der in einer allgemeinen rationalen windschiefen Fläche n. Ordnung enthaltenen wesentlichen Constanten* ausgedrückt. Denn offenbar kann jede solche Fläche durch Elimination aus zwei Gleichungen von der Form $\Pi = 0$, $K = 0$ hergestellt werden — man beziehe z. B. nur zwei Kegel eindeutig auf einander, die von den durch irgend einen Raumpunkt und die Geraden der Fläche gelegten Ebenen umhüllt werden — und da nach Obigem die windschiefe Fläche mit der grössten Constantenzahl dem Fall $p = \frac{n-1}{2}$, $q = \frac{n+1}{2}$, bezw. $p = q = \frac{n}{2}$ entspricht, so liefert die diesem Fall entsprechende Zahl B die Anzahl der homogen in der „allgemeinen" Regelfläche auftretenden Constanten. Zugleich hat man *eine Construction dieser Fläche* aus dem Schnitt entprechender Ebenen zweier rationalen Raumcurven von der $\frac{n-1}{2}$ $\left(\text{bez. } \frac{n}{2}\right)$ und $\frac{n+1}{2}$ $\left(\text{bez. } \frac{n}{2}\right)^{\text{ten}}$ Classe,[1]) und es bedarf projectivischer Eigenthümlichkeiten, wenn die Construction aus solchen von niederer (und höherer) Ordnung möglich sein soll.

1) Die Existenz dieser Raumcurven oder vielmehr der ihnen dualistisch entsprechenden Ordnungscurven auf der allgemeinen rationalen Regelfläche n. Ordnung war schon Clebsch bekannt, der auf sie durch die Abbildung der Fläche auf eine Ebene geführt worden war. Math. Ann. V. S. 1.

Auch hier sind wieder die erzeugenden Gebilde mit dem erzeugten durch Berührungseigenschaften verbunden:

Die Regelfläche (R), die aus einer Curve (Π) und einer Curve (K) durch den Schnitt entsprechender Ebenen entsteht, wird nicht nur von den Tangenten dieser Curven berührt, sondern ist den Letzteren eingeschrieben, in dem Sinne, dass die *Schmiegungsebenen der Curven Tangentialebenen der Fläche sind.*

Man führt den Nachweis dieser und der oben erwähnten entsprechenden Eigenschaften für die ebenen und Raumcurven durch Differentiation der Gleichungen $\Pi = 0$, $K = 0$, durch welche die beweglichen Schmiegungsebenen der Curven (Π) und (K) repräsentirt werden. Für einen dem Punkte λ benachbarten Punkt der windschiefen Fläche (R), deren Gleichung durch die Resultante $\mathrm{R} = 0$ von Π und K dargestellt wird, hat man:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz + \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda}d\lambda = 0 \\ \frac{\partial K}{\partial x}dx + \frac{\partial K}{\partial y}dy + \frac{\partial K}{\partial z}dz + \frac{\partial K}{\partial \lambda}d\lambda = 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots . \ (2)$$

während zugleich:

$$\frac{\delta \mathrm{R}}{\delta x}dx + \frac{\delta \mathrm{R}}{\delta y}dy + \frac{\delta \mathrm{R}}{\delta z}dz = 0$$

ist. Eliminirt man $d\lambda$ aus den beiden ersten Gleichungen, so erhält man links einen Ausdruck, welcher nach Einsetzung des Werthes λ der differenzirten Resultante proportional sein muss:

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda}\left\{\frac{\partial \Pi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y}dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z}dz\right\} - \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda}\left\{\frac{\partial K}{\partial x}dx + \frac{\partial K}{\partial y}dy + \frac{\partial K}{\partial z}dz\right\}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{M}}\left\{\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial x}dx + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial z}dz\right\}, \ \ldots \ (3)$$

wo nun der Factor M durch eine Rechnung, die ich hier übergehe, gleich einer der $(p + q - 2)$ — reihigen Unter-determinanten 2. Ordnung der Determinante R gefunden wird, nämlich:

$$M = \begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & \dots \\ P_0 & P_1 & P_2 & \dots \\ 0 & P_0 & P_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & \dots \\ Q_0 & Q_1 & Q_2 & \dots \\ 0 & Q_0 & Q_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} .$$

Man bemerkt in dieser eleganten Identität leicht den zusammenfassenden Ausdruck bekannter Sätze über die Resultante. Zugleich geht aus derselben, wie übrigens auch schon aus den Gleichungen (2), hervor, dass für einen Werth von x, y, z, für welchen zugleich:

$$(4) \ldots\ldots \Pi = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0, \ K = 0$$

ist, in welchem also die Tangente an die Curve (Π) die entsprechende Erzeugende der Fläche (R) trifft, die partiellen Differentialquotienten von R nach den Variabeln denen von Π proportional werden, d. h., dass an dieser Stelle die Schmiegungsebene von (Π) λ Tangentialebene der Fläche ist.

Man hätte den Satz auch aus seinem dualistischen Gegenbild, das eines Beweises nicht bedarf, erschliessen können.

Der entsprechende Satz für ebene Curven, dessen oben gedacht wurde, ist durch das Vorstehende mitbewiesen, wenn man allenthalben die Glieder unterdrückt, welche die Variable z enthalten. — Hinsichtlich der Raumcurven bedarf es einer geringen Modification, die darin besteht, dass die Gleichung $P = 0$ einer dritten Schmiegungsebene einzuführen und zu differenziren ist. Aus den Gleichungen (2), (4) und den analogen in P ergiebt sich zugleich die behauptete Eigenschaft.