Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über die allgemeinste räumliche Anordnung gerader Linien zu scheinbaren Dreiecksnetzen.

Von **Robert Sauer** in München.

Vorgelegt von S. Finsterwalder in der Sitzung am 15. Juni 1927.

Man denke sich auf einem Zylindroid $2n$ Erzeugende, welche jeweils den Winkel $\frac{\pi}{2n}$ miteinander einschließen und unter denen die beiden Torsallinien des Zylindroids enthalten sind, durch dünne Stäbchen dargestellt. Die $2n$ Ebenen durch die $2n$ Stäbchen und die Doppellinie des Zylindroids bestimmen $2n$ unendlich ferne Geraden. Bei jeder Projektion, deren Zentrum irgend ein Punkt einer dieser unendlich fernen Geraden ist, zeigt der Parallelriss des Stabmodells auf irgend einer Bildtafel folgende merkwürdige Konfiguration:

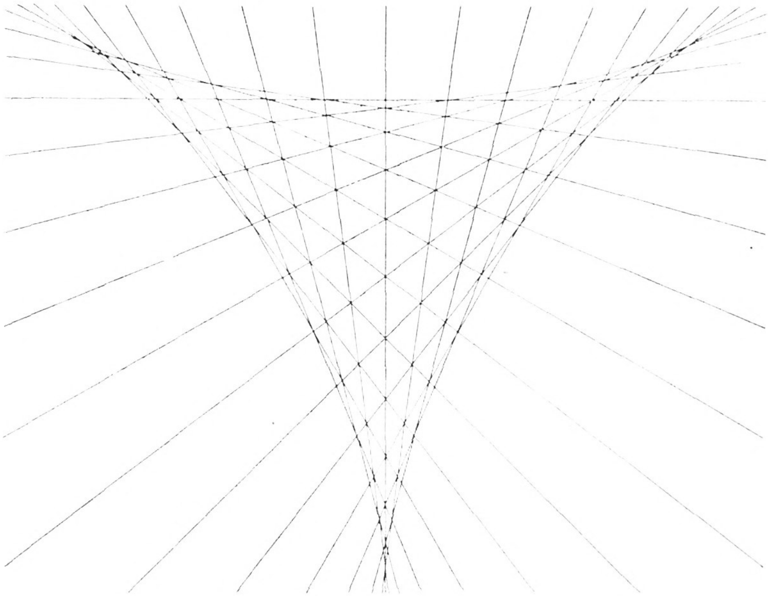
> Die $2n$ Bildgeraden schneiden sich im allgemeinen zu je dreien und bilden dadurch ein Dreiecksnetz, bei dem in jedem Knotenpunkt im allgemeinen 6 Dreiecke zusammentreffen. Das gesamte Netz wird umhüllt von einer Steinerschen Kurve (dreispitzige Hypozykloide) oder einer dazu affinen Kurve (vgl. Figur 1).

Diese Beobachtungen bildeten den Anlass, das Problem der „Dreiecksnetze“, auf welches S. Finsterwalder[1]) schon vor längerer Zeit hingewiesen hatte, allgemein zu untersuchen.[2]) Es zeigte sich, daß die Tangenten jeder beliebigen ebenen Kurve 3. Klasse zu

[1]) S. Finsterwalder, „Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation“, Jahresbericht der Mathematikervereinigung 6, 1899, p. 52 und 71.

[2]) H. Graf und R. Sauer, „Über dreifache Geradensysteme in der Ebene, welche Dreiecksnetze bilden“. Sitzungsberichte der bayer. Akad. d. Wiss., 1924, p. 119 usw. R. Sauer, „Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden, von denen je vier sich in einem Punkt schneiden“, Sitzungsberichte der bayer. Akad. d. Wiss., 1925, p. 41 usw.

einem Dreiecksnetz angeordnet werden können und daß man auf diese Weise zu den allgemeinsten von geraden Linien gebildeten Dreiecksnetzen gelangt.



Figur 1

Einer Anregung des Herrn Geheimrates S. Finsterwalder folgend, untersuche ich in der vorliegenden Arbeit die allgemeinsten räumlichen Geradenanordnungen, welche ebenso wie die Erzeugenden des Zylindroids die Eigenschaft haben, beständig als Dreiecksnetz zu erscheinen, wenn das Projektionszentrum O längs einer vorgegebenen Geraden p sich bewegt. Die räumlichen Geradenanordnungen dieser Art werde ich als „scheinbare Dreiecksnetze hinsichtlich der Geraden p“ bezeichnen.

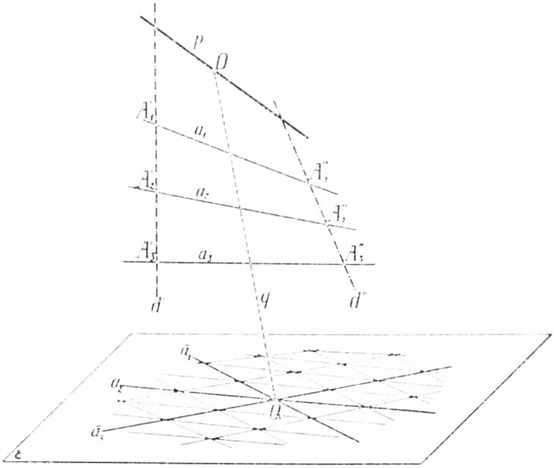
§ 1.

Lineare Erzeugungsweise der scheinbaren Dreiecksnetze.

Wenn man irgend ein ebenes Dreiecksnetz von einem außerhalb der Netzebene gelegenen Zentrum O aus projiziert und in jeder der projizierenden Ebenen irgend eine nicht durch O gehende beliebige Gerade annimmt, so erhält man die allgemeinste Geradenanordnung, welche von einem Punkte aus als ebenes Dreiecksnetz erscheint. Da die sämtlichen Geraden eines ebenen Dreiecksnetzes eine Kurve 3. Klasse umhüllen, sind die von O ausgehenden projizierenden Ebenen Tangentialebenen eines Kegels 3. Klasse. Der geometrische Ort der Punkte, von denen aus gesehen drei windschiefe Gerade sich zu schneiden scheinen, ist die durch die drei windschiefen Geraden bestimmte Regelfläche 2. Grades.[1]) Daher ist die Forderung, daß die Geraden einer räumlichen Konfiguration von einem Punkte O aus als Dreiecksnetz erscheinen sollen, gleichbedeutend mit der Bedingung, daß das Projektionszentrum O allen jenen Regelflächen 2. Grades gemeinsam ist, welche durch je drei sich scheinbar schneidende windschiefe Gerade der Anordnung festgelegt sind.

Ich verlange jetzt weiter, daß die Geradenanordnung nicht nur aus O, sondern aus jedem Punkte einer durch O gelegten vorgegebenen Geraden p als Dreiecksnetz gesehen wird. Es müssen sich dann die Geraden zu Tripeln zusammenfassen lassen, welche mit der gegebenen Geraden p jedesmal einer Regelfläche 2. Grades als gleichartige Erzeugende angehören oder, wie ich kurz sagen will, mit p „hyperboloidisch" liegen.

Geradenanordnungen dieser Art lassen sich durch folgende lineare Erzeugungsweise herstellen:



Figur 2

[1]) Bemerkung: Dem in O liegenden Auge erscheinen drei windschiefe Gerade nur dann als sich schneidend, wenn ihre drei Schnittpunkte

In der Ebene ε (Figur 2) liege ein beliebiges ebenes Dreiecksnetz gezeichnet vor. Von O aus wird dieses Dreiecksnetz durch eine Reihe von Ebenen projiziert. p ist eine vorgegebene durch O gehende Gerade, d' und d'' sind zwei zueinander windschiefe Gerade, welche die Gerade p schneiden ohne den Punkt O zu treffen, sonst aber beliebig sind.

Jede der projizierenden Ebenen α_i wird von den beiden Geraden d' und d'' in zwei Punkten A'_i und A''_i geschnitten. Wenn man nun in jeder Ebene α_i die Verbindungslinie a_i der beiden Schnittpunkte A'_i und A''_i zieht, so erhält man eine räumliche Geradenanordnung der verlangten Art.

Zum B e w e i s e greifen wir irgend einen Knotenpunkt Q des in der Ebene ε vorliegenden Dreiecksnetzes heraus. In dem Strahl q schneiden sich drei projizierende Ebenen α_1, α_2, α_3. Jede der drei zugehörigen Geraden a_1, a_2, a_3 schneidet sowohl q als auch konstruktionsgemäß d' und d''. D. h. a_1, a_2, a_3 sind Erzeugende 1. Art, q, d', d'' Erzeugende 2. Art einer Regelfläche 2. Grades. Da nun aber die Gerade p ebenfalls alle drei Geraden q, d', d'' trifft, so ist p selbst eine Erzeugende 1. Art der nämlichen Regelfläche 2. Grades, liegt also mit a_1, a_2, a_3 hyperboloidisch. Da der Punkt Q, von dem wir ausgegangen sind, ein ganz beliebiger Knotenpunkt des Netzes war, so folgt, daß stets drei Gerade a_i, welche von O aus gesehen sich zu schneiden scheinen, diese Eigenschaft für jedes Projektionszentrum auf p beibehalten. Die Geraden a_i bilden also in der Tat ein scheinbares Dreiecksnetz hinsichtlich der Geraden p. Die angegebenen räumlichen Konstruktionen sind lediglich mit Hilfe des Lineals ausführbar. Das nämliche gilt für die als Grundlage dienende Erzeugungsweise der allgemeinsten ebenen Dreiecksnetze, welche in der schon zitierten früheren Arbeit[1]) ausführlich dargelegt wurde.

Ich werde nun zeigen, d a ß d i e n a c h d e r v o r h e r g e h e n d e n A n g a b e k o n s t r u i e r t e n G e r a d e n a n o r d n u n g e n d i e

---

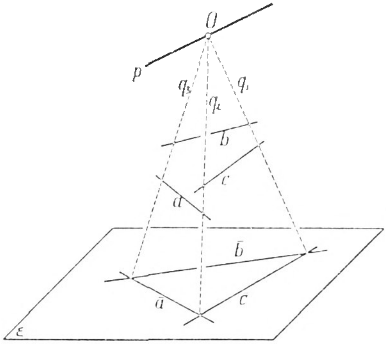
auf einer von O ausgehenden H a l b geraden gelegen sind. Diese Beschränkung soll jedoch hier nicht eingeführt werden, sondern ich werde stets drei windschiefe Gerade als „scheinbar sich schneidend" bezeichnen, wenn sie eine durch das Projektionszentrum O gehende V o l l gerade („Sehstrahl") in irgend welchen drei Punkten treffen.

[1]) H. Graf und R. Sauer, Sitzungsberichte der bayer. Akad. d. Wiss., 1924, p. 119 usw.

allgemeinsten hinsichtlich p scheinbaren Dreiecksnetze überhaupt sind.

Die allgemeinsten scheinbaren Dreiecksnetze hinsichtlich der Geraden p projizieren sich nach ihrer Definition aus irgend einem Punkte O auf der Geraden p als Dreiecksnetz, d. h. die von O ausgehenden projizierenden Ebenen schneiden eine beliebige nicht durch O gehende Ebene ε nach den Geraden eines ebenen Dreiecksnetzes. Dieses Dreiecksnetz und damit die in O sich schneidenden projizierenden Ebenen denken wir uns vorgegeben.

Der Sehstrahl von O nach irgend einem Knotenpunkt des in ε angenommenen ebenen Dreiecksnetzes wird stets von drei Geraden des noch unbekannten scheinbaren Dreiecksnetzes geschnitten und diese drei Geraden liegen zu der Geraden p hyperboloidisch. Dadurch ist jedem Sehstrahl von O nach den Knotenpunkten des ebenen Dreiecksnetzes eine Regelfläche 2. Grades zugeordnet. Alle diese Regelflächen 2. Grades haben die Gerade p als gemeinsame Erzeugende 1. Art. Um die Allgemeinheit der vorher auseinandergesetzten Erzeugungsweise festzustellen, muß lediglich gezeigt werden, daß alle erwähnten Regelflächen 2. Grades noch zwei Erzeugende d', d'' der 2. Art miteinander gemeinsam haben, daß sie also ein Bündel von Regelflächen 2. Grades bilden, dessen Grundkurve eine in drei gerade Linien p, d', d'' zerfallende Raumkurve 3. Ordnung ist.



Figur 3

Es seien $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ drei Gerade des in ε liegenden ebenen Dreiecksnetzes, welche ein Maschendreieck bilden (vgl. Figur 3). Die zugehörigen Geraden des scheinbaren Dreiecksnetzes sind mit a, b, c bezeichnet. b, c, p und c, a, p bestimmen die beiden Regelflächen 2. Grades, welche den Sehstrahlen q_1, q_2 zugeordnet sind. Den beiden Regelflächen sind zwei Erzeugende 2. Art gemeinsam, nämlich die beiden geraden Linien, welche sowohl p als auch a, b, c treffen. Offenbar aber sind die nämlichen beiden Linien auch Erzeugende der Regelfläche 2. Grades, welche durch a, b

und p bestimmt ist und zu dem Sehstrahl q_3 gehört. Indem man von dem ersten Maschendreieck zu den benachbarten übergeht, folgt immer wieder durch den nämlichen Schluß, daß alle neu hinzutretenden Regelflächen 2. Grades nicht nur p, sondern noch zwei die Gerade p schneidende Linien d', d'' als gemeinsame Erzeugende besitzen müssen, w. z. bew. w.

Die beiden Geraden d', d'' können reell, imaginär oder zusammenfallend sein.

Wenn die Geraden d', d'' imaginär oder zusammenfallend sind, d. h. wenn sie eine elliptische oder parabolische lineare Kongruenz bestimmen, so ergeben sich die Strahlen der Geradenanordnung durch folgende lineare Konstruktionen:

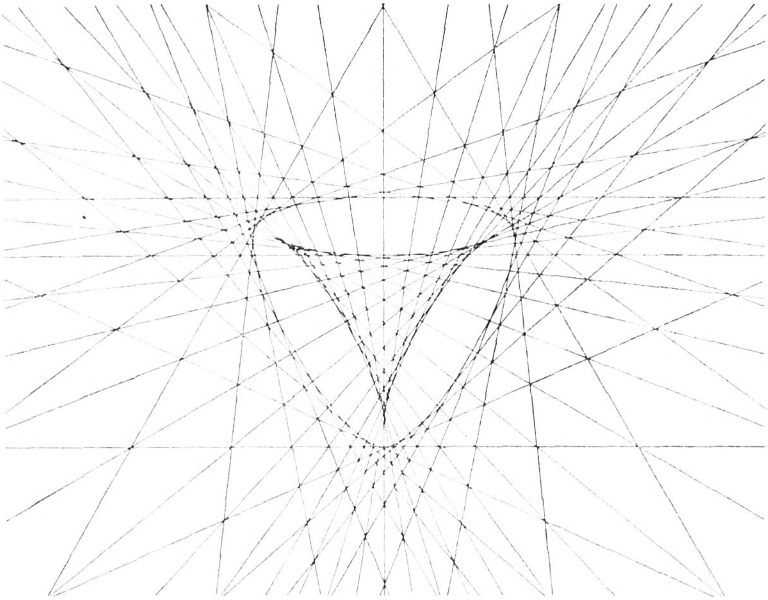
Die Kongruenz, welche durch p und drei nicht hyperboloidisch liegende Gerade des scheinbaren Dreiecksnetzes vorgegeben ist, bestimmt in zwei etwa durch p gelegten beliebigen Ebenen eine kollineare Beziehung. Jede der projizierenden Ebenen α_i schneidet die beiden kollinear bezogenen Ebenen nach zwei Punktreihen, die im allgemeinen sich nicht kollinear entsprechen, sondern lediglich ein Paar zugeordneter Punkte besitzen. Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte ist der in der betreffenden Ebene α_i liegende Strahl des scheinbaren Dreiecksnetzes.

Die Frage nach den allgemeinsten scheinbaren Dreiecksnetzen läuft im wesentlichen auf die Frage nach den allgemeinsten ebenen Dreiecksnetzen hinaus; in Figur 4 wird daher ein allgemeines ebenes Dreiecksnetz gezeigt, dessen Gerade eine singularitätenfreie Kurve 3. Klasse umhüllen. Figur 4 ist ebenso wie Figur 1 der schon wiederholt zitierten Arbeit über ebene Dreiecksnetze entnommen.

Zusammenfassung:

> Die allgemeinsten scheinbaren Dreiecksnetze, d. h. die allgemeinsten räumlichen Geradenanordnungen, welche aus allen Punkten einer Geraden p als Dreiecksnetze projiziert werden, ergeben sich durch folgende lineare Konstruktion:
>
> In einer beliebigen Ebene ε wird ein beliebiges ebenes Dreiecksnetz gezeichnet. Dieses wird aus einem außerhalb ε auf der Geraden p liegenden beliebigen Punkt O projiziert. In jeder der projizie-

renden Ebenen erhält man eine Gerade des scheinbaren Dreiecksnetzes, wenn man die beiden Punkte verbindet, in denen die projizierende Ebene von



Figur 4

zwei festen windschiefen Geraden d', d'' geschnitten wird. d', d'' müssen p treffen, ohne O zu enthalten, und können im übrigen beliebig — reell, imaginär oder zusammenfallend — angenommen werden.

§ 2.

Zusammenhang mit der Theorie der Regelflächen 6. Grades.

Die scheinbaren Dreiecksnetze, deren lineare Erzeugung ich im vorigen Paragraphen besprochen habe, können durch Unterteilung des in ε angenommenen ebenen Dreiecksnetzes beliebig verfeinert werden.

Alle Geraden der Konfiguration liegen auf einer Regelfläche 6. Grades.

Um dies zu beweisen, hat man die Anzahl der Erzeugenden der Regelfläche festzustellen, welche eine beliebige Gerade g schneiden: Durch g und die beiden auf Seite 168 eingeführten Geraden d', d'' als Erzeugende 1. Art ist eine Regelfläche 2. Grades definiert. Alle Erzeugenden 2. Art dieser Regelfläche werden von O aus durch einen Kegel 2. Klasse projiziert. Die projizierenden Ebenen aus O nach den Geraden des in ε gezeichneten ebenen Dreiecksnetzes umhüllen nach Seite 167 einen Kegel 3. Klasse. Jede die vorgegebene Gerade g treffende Erzeugende der Regelfläche, die von den Geraden des scheinbaren Dreiecksnetzes gebildet wird, muß sowohl in einer Tangentialebene des Kegels 2. Klasse als auch in einer Tangentialebene des Kegels 3. Klasse liegen. Umgekehrt enthält jede gemeinsame Tangentialebene beider Kegel eine die vorgegebene Gerade g schneidende Erzeugende, nämlich die Verbindungslinie der beiden Schnittpunkte der gemeinsamen Tangentialebene mit den Geraden d', d''. Da nun die beiden Kegel 6 gemeinsame Tangentialebenen besitzen, folgt unmittelbar die Richtigkeit der Behauptung.

Die hier besprochenen Regelflächen 6. Grades sind keineswegs die allgemeinen Regelflächen 6. Grades.[1]) Sie haben die beiden Geraden d', d'' als dreifache Linien, in denen sich je drei Mäntel der Regelfläche durchsetzen. In jedem Punkt P der Geraden d' oder d'' schneiden sich nämlich drei Tangentialebenen des Kegels 3. Klasse und in jeder dieser drei Ebenen liegt eine von P ausgehende Erzeugende der Regelfläche 6. Grades.

Ebenso gehen durch jeden Punkt der Geraden p drei Tangentialebenen des Kegels 3. Klasse. Die zugehörigen Erzeugenden der Regelfläche 6. Grades fallen jedesmal mit p selbst zusammen, weil p die Geraden d' und d'' schneidet. Die Gerade p ist also selbst eine Erzeugende der Regelfläche 6. Grades und zwar eine dreifach zählende Erzeugende. In p durchsetzen sich ebenso wie in den Linien d' und d'', welche keine Erzeugenden der Regelfläche sind, je drei Mäntel der Regelfläche.

Ist umgekehrt eine Regelfläche 6. Grades mit einer dreifachen Erzeugenden p und zwei dreifachen Linien d', d'' vorgegeben, so wird aus jedem Punkt O der Geraden p die Regelfläche

[1]) V. Snyder, Amer. J. of math. 25 (1903), p. 59, 85, 261; 27 (1905), p. 77, 173.

nach Absonderung der drei Tangentialebenen von O durch einen Kegel 3. Klasse projiziert und die Erzeugenden der Regelfläche sind die Verbindungslinien der Punkte, in denen die Tangentialebenen des erwähnten Kegels 3. Klasse von den dreifachen Linien d', d'' geschnitten werden. Man kommt also unmittelbar zu der Erzeugungsweise des § 1 zurück und sieht daraus, daß die Erzeugenden jeder Regelfläche 6. Grades mit einer dreifach zählenden Erzeugenden p und zwei dreifachen Linien d' und d'' zu einem hinsichtlich p scheinbaren Dreiecksnetz angeordnet werden können.

Rückt das Projektionszentrum O in einen der beiden Schnittpunkte von p mit d' und d'' hinein, so artet das durch Projektion auf eine beliebige Ebene entstehende ebene Dreiecksnetz in ein dreifach zählendes Strahlenbüschel aus.

Zusammenfassung:

Die beliebig dicht aufeinander folgenden Geraden, welche von allen Punkten einer Geraden p aus als Dreiecksnetz projiziert werden, liegen auf einer Regelfläche 6. Grades, welche die Gerade p als dreifach zählende Erzeugende hat und außerdem zwei windschiefe Linien d', d'', welche die Gerade p schneiden, als dreifache Linien besitzt.

Umgekehrt lassen sich Erzeugende einer jeden Regelfläche 6. Grades, welche eine dreifache Erzeugende p und zwei dreifache Linien d', d'' besitzt, so anordnen, daß sie von jedem Punkte der Erzeugenden p aus als Dreiecksnetz erscheinen.

§ 3.

Spezialisierung für Regelflächen 4. Grades.

In der Erzeugungsweise des § 1 sind die beiden reellen oder imaginären Geraden d', d'' beliebig angenommen. Liegt nun etwa d' in einer Tangentialebene α' des projizierenden Kegels 3. Klasse, so gehört zu dieser Ebene α' nicht wie zu den übrigen projizierenden Ebenen eine Gerade der erzeugten Regelfläche, sondern das ganze Strahlenbüschel, dessen Scheitel der Schnittpunkt von

p mit d'' ist. Es ist hierbei gleichgültig, ob die Ebene α' eine beliebige Tangentialebene des Kegels 3. Klasse ist oder eine jener diskreten ausgezeichneten projizierenden Ebenen durch eine Netzgerade des in der Ebene ε vorgegebenen Dreiecksnetzes. Die Regelfläche 6. Grades zerfällt in ein Strahlenbüschel und in eine Regelfläche 5. Grades, welche d'' als dreifache Linie, d' als Doppellinie und p als zweifach zählende Erzeugende hat. Auf diese Regelflächen 5. Grades lassen sich unmittelbar die Ergebnisse des § 2 sinngemäß übertragen.

Wenn sowohl d' als auch d'' in einer Tangentialebene α' bezw. α'' des projizierenden Kegels 3. Klasse angenommen werden, so sondern sich von der Regelfläche 6. Grades zwei Strahlenbüschel ab, welche in den Ebenen α' bezw. α'' gelegen sind und als Scheitel die Schnittpunkte von p mit d'' bezw. d' haben. Die übrig bleibende Regelfläche 4. Grades[1]) hat d' und d'' als Doppellinien, während p nicht mehr eine ausgezeichnete, sondern eine einfache Erzeugende ist.

Es gilt auch hier wiederum die Umkehrung, nämlich der folgende Satz:

> Die Erzeugenden einer jeden Regelfläche 4. Grades mit 2 Doppellinien können so angeordnet werden, daß sie von allen Punkten einer beliebig vorgegebenen Erzeugenden der Regelfläche aus als Dreiecksnetz erscheinen.

Um die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehen, hat man lediglich zu bedenken, daß von jedem Punkt der Regelfläche aus die Erzeugenden durch einen Kegel 3. Klasse projiziert werden. Man kann daher jede vorgegebene Regelfläche 4. Grades mit 2 Doppellinien durch die in § 1 auseinandergesetzte Erzeugungsweise entstanden denken, wobei für p noch eine beliebige Erzeugende der Regelfläche gewählt werden darf.

Da bei den Regelflächen 4. Grades die Erzeugende p auf der Fläche in keiner Weise ausgezeichnet ist, liegt die Vermutung nahe, daß die gewonnenen Ergebnisse noch eine Erweiterung zulassen, die bei den vorher behandelten Regelflächen 5. und 6. Grades nicht möglich war, weil dort p eine singuläre Erzeugende

---

[1]) R. Sturm, Liniengeometrie I, p. 52—61;
K. Rohn, Math. Annalen 28 (1884) p. 284—308;
W. Dyck, Katalog math. und math.-phys. Modelle usw., 1892, p. 275.

ist. Um dies festzustellen, gebe ich zunächst eine analytische Darstellung der scheinbaren Dreiecksnetze, deren Geraden auf allgemeinen Regelflächen 4. Grades mit zwei Doppellinien liegen:

Die allgemeinen Regelflächen 4. Grades mit zwei Doppellinien sind vom Geschlecht 1.

A. Harnack[1]) hat gezeigt, daß bei Einführung elliptischer Funktionen die Parameterdarstellung so normiert werden kann, daß auf Grund des Abelschen Theorems für die Parameter t_i von vier hyperboloidisch liegenden Erzeugenden die notwendige und hinreichende Bedingung gilt

$$\sum_{i=1}^{i=4} t_i \equiv 0 \,(\text{mod. } \omega, \omega').$$

ω, ω' sind die Perioden der Regelfläche, d. h. jedem Parameter t ist eine Erzeugende eindeutig zugeordnet, dagegen gehören zu jeder Erzeugenden unbegrenzt viele Parameterwerte

$$t = t_0 + m\,\omega + m'\,\omega' \quad (m,\ m' \text{ ganze Zahlen}).$$

In ganz analoger Weise, wie dies bei den ebenen Dreiecksnetzen der Fall ist, liegt in der Kongruenz $\sum_{i=1}^{i=4} t_i \equiv 0$ unmittelbar die gesuchte Anordnung der geraden Linien enthalten:

Wir denken uns vier hyperboloidisch liegende Erzeugende einer Regelfläche 4. Grades vom Geschlecht 1 vorgegeben. Zwischen ihren Parametern muß die Kongruenz erfüllt sein

$$a_0 + b_0 + c_0 + d_0 \equiv 0.$$

Durch den Ansatz

$$\begin{aligned} a_h &= a_0 + h\,\varDelta\lambda, \\ b_i &= b_0 + i\,\varDelta\lambda, \\ c_k &= c_0 + k\,\varDelta\lambda, \\ d_l &= d_0 + l\,\varDelta\lambda, \end{aligned}$$

wobei h, i, k, l die Reihe der ganzen positiven und negativen Zahlen durchlaufen sollen und $\varDelta\lambda$ eine beliebige Konstante bedeutet, sind vier diskrete Folgen von Erzeugenden auf der gegebenen Regelfläche bestimmt.

[1]) A. Harnack, Math. Ann. 13 (1878), p. 49; ferner vergleiche: L. Rouyer, Ann. fac. sc. Toulouse (2) 2 (1900), p. 163; M. Laguerre, J. de math. pures et appliquées (2) 2 (1870), p. 193.

Man kann nun für die Gerade p, d. i. der Ort der Projektionszentren eines scheinbaren Dreiecksnetzes, irgend eine Erzeugende aus einem der vier Systeme wählen, z. B. die Erzeugende d_l für $l = l_0$. Dann stellen die drei übrigen Systeme eine Geradenanordnung dar, welche aus jedem Punkt der Geraden p als Dreiecksnetz projiziert wird. Denn zu irgend welchen zwei Erzeugenden aus zwei verschiedenen Systemen, z. B. zu a_h und b_i, gibt es vermöge der aus der Kongruenz $\Sigma\, t_i \equiv 0$ folgenden Beziehung
$$h + i + k \equiv -l_0,$$
welche für ganze Zahlen befriedigt werden muß, stets eine und nur eine Erzeugende c_k des dritten Systems, die mit p und den beiden Erzeugenden a_h und b_i hyperboloidisch liegt. Der geometrische Ort der Projektionszentren ist sonach in keiner Weise ausgezeichnet, wie dies bei den Regelflächen 6. Grades der Fall ist.

Daß man umgekehrt jedes auf einer nicht rationalen Regelfläche 4. Grades liegende scheinbare Dreiecksnetz auf die angegebene Weise darstellen kann, läßt sich leicht zeigen. Die Parameter der Geraden p und irgend eines Tripels sich scheinbar schneidender Geraden können für d_0 und a_0, b_0, c_0 eingesetzt werden. Nach § 1 ist dann das scheinbare Dreiecksnetz eindeutig bestimmt, sobald noch eine weitere Gerade mit dem Parameter a_1 vorgegeben ist, welche mit den Erzeugenden b_0 und c_0 in der Projektion ein Maschendreieck bildet. Aus dem Parameter a_1 dieser Geraden berechnet sich die Konstante $\Delta\lambda = a_1 - a_0$.

Indem man $\Delta\lambda$ unterteilt, erhält man die entsprechenden Verfeinerungen des vorgegebenen scheinbaren Dreiecksnetzes.

Setzt man $a_0 \equiv b_0 \equiv c_0 \equiv d_0 \equiv 0$, so gehen die vier Systeme der Geradenanordnung ineinander über. Es existiert jetzt in der vorgegebenen Folge von diskreten Geraden zu irgend welchen drei Erzeugenden stets eine vierte dazu hyperboloidisch liegende Gerade. Wenn man eine beliebige Erzeugende der aus einer endlichen oder unendlichen Anzahl von Linien bestehenden Folge als Gerade p auswählt, so werden von jedem Punkt dieser Erzeugenden p aus die sämtlichen übrigen Erzeugenden der Folge als Dreiecksnetz projiziert. Beim Fortschreiten des Projektionszentrums O längs einer Erzeugenden der Folge bleibt das scheinbare Dreiecksnetz beständig erhalten, d. h. es scheinen sich fortwährend die nämlichen Tripel von Erzeugenden zu schneiden.

Bewegt sich dagegen das Projektionszentrum O auf der Regelfläche ganz beliebig, so projizieren sich die Erzeugenden im allgemeinen nicht als Dreiecksnetz, sondern nur dann, wenn O wiederum auf irgend eine Erzeugende der Geradenanordnung zu liegen kommt. Beim Übergang des Punktes O von einer Erzeugenden der Folge zu einer anderen ändern sich jeweils die Tripel der sich scheinbar schneidenden Erzeugenden; irgend welche drei Erzeugende, welche sich für die neue Lage von O als scheinbar schneidend erweisen, haben diese Eigenschaft bei der früheren Lage von O nicht und umgekehrt. Je mehr man die Geradenanordnung des scheinbaren Dreiecksnetzes verfeinert, umso größer wird die Menge der Projektionszentren O, von denen aus ein Dreiecksnetz gesehen wird.

Zusammenfassung:

Auf jeder allgemeinen Regelfläche 4. Grades mit zwei reellen oder imaginären Doppellinien lassen sich auf unbegrenzt viele Arten vier beliebig unterteilbare Systeme von diskret aufeinanderfolgenden Erzeugenden so angeben, daß von jedem Punkt irgend einer Erzeugenden eines der vier Systeme aus die Erzeugenden der übrigen drei Systeme als Dreiecksnetz projiziert werden. Umgekehrt liegt jede Geradenanordnung der verlangten Art auf einer allgemeinen Regelfläche 4. Grades mit zwei Doppellinien oder einer Ausartung.

Es läßt sich stets erreichen, daß die vier Systeme miteinander zusammenfallen. Dann werden von jedem Punkt irgend einer Erzeugenden der Anordnung aus die sämtlichen übrigen Erzeugenden der Anordnung als Dreiecksnetz projiziert.

Durch fortgesetzte Unterteilung ergeben sich scheinbare Dreiecksnetze, deren Projektionszentren über die ganze Regelfläche 4. Grades dicht ausgebreitet sind.

§ 4.

Ausartungen.

Die analytischen Bemerkungen des § 3 beziehen sich zunächst lediglich auf die allgemeine Regelfläche 4. Grades, welche vom Geschlecht 1 und demnach durch elliptische Funktionen eines Parameters rational darstellbar ist. Auf die zahlreichen Ausartungen will ich nicht ausführlich eingehen. Ich beschränke mich darauf, einige typische Beispiele anzuführen:

1. Der projizierende Kegel 3. Klasse ist rational.
   d' und d'' werden in zwei gewöhnlichen Tangentialebenen angenommen. Das scheinbare Dreiecksnetz liegt auf einer rationalen Regelfläche 4. Grades, deren Doppelkurve 3. Ordnung zerfallen ist in die beiden windschiefen Geraden d', d'' und eine dritte Gerade g. Diese ist die Verbindungslinie der beiden Punkte, in denen d' und d'' die singuläre Tangentialebene des Kegels 3. Klasse treffen.
2. Der projizierende Kegel 3. Klasse ist rational. Nimmt man d' in einer gewöhnlichen, d'' in der singulären Tangentialebene an, so wird in der gewöhnlichen Tangentialebene ein Strahlenbüschel, in der singulären Tangentialebene ein doppelt zählendes Strahlenbüschel ausgeschieden. Als Rest bleibt eine allgemeine Regelfläche 3. Grades und zwar ergeben sich die drei Typen derselben, je nachdem der projizierende Kegel 3. Klasse eine isolierte oder eine nicht isolierte Doppeltangentialebene oder eine Wendetangentialebene besitzt.

   Durch Zusammenfassen der Regelfläche 3. Grades mit dem einen Strahlenbüschel in der singulären Tangentialebene gelangt man zu einer zerfallenden Regelfläche 4. Grades. Man erhält so eine Geradenanordnung, welche von jedem Punkt einer Geraden der Anordnung aus als ebenes Dreiecksnetz erscheint. Dieses Dreiecksnetz wird gebildet entweder von den Tangenten einer rationalen Kurve 3. Klasse, wenn das Projektionszentrum auf einer Geraden des Strahlenbüschels liegt, oder von den Tangenten eines Kegelschnitts und den Geraden eines Büschels, wenn das Projektionszentrum auf einer Erzeugenden der Regelfläche 3. Grades angenommen wird.

Die Erzeugendenanordnung auf dem Zylindroid, von der ich in der Einleitung ausgegangen bin, erscheint so, zusammengenommen mit dem ebenfalls in der Einleitung erwähnten unendlich fernen Strahlenbüschel, als ein sehr spezieller Fall einer allgemeinen Anordnungsmöglichkeit:

Die Erzeugenden jeder Regelfläche 3. Grades und die Strahlen eines Büschels, dessen Scheitel ein beliebiger Punkt der Doppellinie ist und dessen Ebene die gerade Leitlinie der Regelfläche enthält, lassen sich stets so anordnen, daß von jedem Punkt einer der ausgewählten Linien aus die übrigen Linien der Konfiguration als Dreiecksnetz erscheinen.

3. Der projizierende Kegel 3. Klasse zerfällt in einen Kegel 2. Klasse und in ein Ebenenbüschel. Nimmt man d' und d'' in zwei Tangentialebenen des Kegels 2. Klasse an, so ergibt sich eine Geradenanordnung, welche aus zwei Scharen von Erzeugenden erster Art zweier Regelflächen 2. Grades besteht, die zwei Erzeugende zweiter Art d', d'' gemeinsam haben. Von jedem Punkt einer beliebigen Erzeugenden der Geradenanordnung aus werden die übrigen Erzeugenden als ebenes Dreiecksnetz projiziert, welches von den Tangenten eines Kegelschnitts und den Strahlen eines Büschels gebildet wird.

Ein einfaches Beispiel dieser Art mit imaginären Doppellinien erhält man auf folgende Weise:

Auf zwei koaxialen Drehzylindern wird durch Ebenen durch die Achse, welche nach gleichen Winkeln aufeinanderfolgen, eine Reihe von Erzeugenden ausgeschnitten. Denkt man sich diese Erzeugenden als elastische Fäden an zwei zu der Achse der Zylinder senkrechten Ebenen befestigt, so erhält man stets ein scheinbares Dreiecksnetz, wenn man die beiden Ebenen um die Achse der Zylinder gegeneinander verdreht. Die Mantellinien der Zylinder gehen dabei über in zwei Regelscharen auf zwei koaxialen Drehhyperboloiden.

4. Der projizierende Kegel 3. Klasse zerfällt in drei Ebenenbüschel. d', d'' sind beliebige Gerade. Anstelle der Regelfläche 6. Grades treten drei Systeme von Erzeugenden erster Art dreier Regelflächen 2. Grades, welche eine Erzeugende p erster Art und zwei

Erzeugende d', d'' zweiter Art gemeinsam haben. Von jedem auf p liegenden Zentrum O aus wird die Geradenanordnung als ebenes Dreiecksnetz projiziert, welches von drei Strahlenbüscheln mit nicht in gerader Linie liegenden Scheiteln gebildet wird.

Wenn insbesondere die beiden Geraden d', d'' in zwei Ebenen α', α'' von zweien der drei vorgegebenen Ebenenbüscheln liegen, so bleibt nach Absonderung der zwei in α' und α'' auftretenden Strahlenbüschel eine zerfallende Regelfläche 4. Grades übrig, welche aus einer Schar von Erzeugenden einer Regelfläche 2. Grades besteht und aus zwei Strahlenbüscheln, deren Scheitel auf d' bzw. d'' liegen. Von jedem Punkt irgend einer Geraden der Anordnung aus projizieren sich die übrigen Geraden als ebenes Dreiecksnetz, welches entweder von drei Strahlenbüscheln mit nicht in gerader Linie liegenden Scheiteln oder von den Strahlen eines Büschels und den Tangenten eines Kegelschnitts gebildet wird.

Durch Zerfallen der Regelfläche 2. Grades in zwei Strahlenbüschel gelangt man zu einem besonders einfachen scheinbaren Dreiecksnetz, welches von vier Strahlenbüscheln gebildet wird: Die Scheitel der vier Büschel bilden die Ecken, die Ebenen der Büschel die Seitenflächen eines Tetraeders. Von jedem Punkt eines Strahls eines der vier Büschel sieht man die Strahlen der übrigen drei Büschel als Dreiecksnetz, dessen umhüllende Kurve 3. Klasse in drei Punkte ausgeartet ist. Zwei windschiefe Kanten des Tetraeders sind ausgezeichnet; in ihnen schneiden sich je zwei Strahlenbüschel. Ein Modell dieser Geradenanordnung läßt sich leicht herstellen, indem man etwa aus einem ebenen Dreiecksnetz, welches von drei Strahlenbüscheln erzeugt wird, deren Scheitel ein gleichseitiges Dreieck bilden, ein Strahlenbüschel herausgreift und in die vier Seitendreiecke eines regulären Tetraeders einzeichnet in der Weise, daß sich auf zwei windschiefen Tetraederkanten jeweils entsprechende Strahlen zweier Büschel schneiden.

Schlussbemerkungen.

Zum Schlusse sei noch darauf hingewiesen, daß die in § 1 auseinandergesetzte lineare Erzeugungsweise zu einer einfachen mechanischen Herstellung und einer mechanischen Deformation der scheinbaren Dreiecksnetze mit zwei reellen mehrfachen Linien d', d'' führt:

In einem allgemeinen ebenen Dreiecksnetz betrachtet man die Netzgeraden als elastische Fäden, welche an zwei starren Geraden in der Ebene des Dreiecksnetzes befestigt sind. Wenn man dann die beiden starren Geraden aus ihrer gemeinsamen Ebene herausnimmt und auf ganz beliebige Weise im Raume gegeneinander bewegt, so bilden bei diesem kontinuierlichen Prozeß die unendlich verlängert gedachten elastischen Fäden fortwährend Erzeugende eines scheinbaren Dreiecksnetzes. Die sämtlichen durch diese stetige mechanische Deformation auseinander hervorgehenden räumlichen Geradenanordnungen sind zueinander affin. Je nachdem keine, eine oder die beiden starren Geraden zugleich Tangenten der Umhüllenden des vorgegebenen ebenen Dreiecksnetzes sind, erhält man Regelflächen 6., 5. oder 4. Grades.

Bei den Regelflächen 6. Grades wird die dreifach zählende Erzeugende p, auf der die Projektionszentren O liegen, durch einen elastischen Faden dargestellt, welcher diejenigen Punkte der beiden starren Geraden verbindet, die ursprünglich in der Ebene des gegebenen Dreiecksnetzes im Schnittpunkt der beiden starren Geraden gelegen waren.

Wenn die beiden zugrundegelegten starren Geraden Netzgeraden eines die Ebene einfach überdeckenden ebenen Dreiecksnetzes sind, wenn also die drei Geradensysteme des ebenen Dreiecksnetzes miteinander identisch sind, so erhält man die auf Seite 176 besprochenen speziellen scheinbaren Dreiecksnetze auf Regelflächen 4. Grades; von jedem Punkte eines der elastischen Fäden aus werden dann die sämtlichen übrigen elastischen Fäden als Dreiecksnetz projiziert.

Die Regelflächen 6., 5. oder 4. Grades arten in ebene Kurven 6., 5. oder 4. Klasse aus, wenn die beiden starren Geraden sich schneiden.

Ein besonders einfaches Beispiel eines auf einer rationalen Regelfläche 4. Grades liegenden scheinbaren Dreiecksnetzes bietet nach einer Bemerkung des Herrn Geheimrates Finsterwalder die Fläche, welche durch Bewegung einer Strecke entsteht, deren Endpunkte auf zwei windschiefen Geraden gleiten. Die Verteilung der Knotenpunkte auf den beiden windschiefen Geraden geschieht nach der Sinusfunktion. Der Winkel zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Geraden der Anordnung ist konstant. Die Regelfläche besitzt eine unendlich ferne isolierte doppelte Erzeugende. Die Projektion der Geradenanordnung von einem Punkte irgend einer der Geraden aus ist projektiv zu dem ebenen Dreiecksnetz der Steinerschen Kurve, während die Normalprojektion in Richtung des gemeinsamen Lotes der beiden Doppellinien die Tangenten einer Astroide liefert. Die Geraden des scheinbaren Dreiecksnetzes lassen sich zu windschiefen Vierseiten anordnen, deren Ecken abwechselnd auf den beiden Doppellinien liegen.

Wenn man die Fußpunkte der numerierten Erzeugenden auf einer der beiden Doppellinien zyklisch vertauscht und die nach der geänderten Numerierung entsprechenden Punkte verbindet, so ergeben sich jedesmal von neuem scheinbare Dreiecksnetze auf rationalen Regelflächen 4. Grades. Die Projektionen sind wiederum zur Steinerschen Kurve projektiv, die Erzeugenden lassen sich jedoch nicht mehr zu windschiefen Vierseiten zusammenfassen, wohl aber zu windschiefen Polygonen mit anderer Seitenzahl. Die durch die angegebene zyklische Vertauschung hervorgehenden Flächen sind also keineswegs zueinander projektiv. Ganz analog liegen die Verhältnisse, wenn die Knotenpunktverteilung auf den windschiefen Doppellinien aus einem ebenen Dreiecksnetz entnommen ist, das nicht von einer zur Steinerschen projektiven Kurve, sondern von einer allgemeinen Kurve 3. Klasse umhüllt wird.

Daß bei der zyklischen Vertauschung stets wieder scheinbare Dreiecksnetze entstehen, folgt aus dem Satze: Die Knotenpunktanordnungen auf den sämtlichen Geraden eines gegebenen ebenen Dreiecksnetzes bzw. ihre Unterteilungen können projektiv aufeinander bezogen werden. Die zyklischen Vertauschungen führen daher im wesentlichen zum gleichen Ergebnis, als wenn man bei der mechanischen Erzeugung anstelle der zwei ursprünglich als starr angenommenen Geraden zwei andere Netzgerade treten läßt.

Falls die Gerade p der Projektionszentren unendlich fern liegt, kann man die ganze Geradenanordnung um eine mit ihr starr verbundene, zu p „senkrechte" Drehachse rotieren lassen und erhält dabei für eine zur Drehachse senkrechte Projektionsrichtung als Parallelriß fortwährend ein ebenes Dreiecksnetz.

Ferner bemerke ich noch, daß die scheinbaren Dreiecksnetze auch einer dualen Deutung fähig sind: Jede Ebene durch p schneidet die übrigen Erzeugenden nach einer Punktkonfiguration, welche zu der Anordnung der Geraden eines ebenen Dreiecksnetzes reziprok ist, d. h. die Punkte liegen zu dreien auf geraden Linien. Bei irgend welchen Kollineationen und Korrelationen des Raumes behalten die scheinbaren Dreiecksnetze ihre Eigenschaft bei.