Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft II

Mai- bis Julisitzung

München 1927

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über Flächen, auf denen sich unendlichkleine Kurven ohne Gestaltsänderung in allen Richtungen verschieben lassen.

Von **Sebastian Finsterwalder.**

Vorgetragen in der Sitzung am 14. Mai 1927.

In der Ebene und auf der Kugel lassen sich Kurven von endlicher Ausdehnung nach allen Richtungen verschieben und um irgend einen Punkt drehen, ohne dabei ihre Gestalt zu verändern. Auf dem Drehzylinder ist die Beweglichkeit einer solchen Kurve bereits auf die Verschiebbarkeit nach allen Richtungen eingeschränkt, da die Drehung durch die Verschiebung bereits mitbestimmt ist, und auf anderen Flächen, wie Dreh-, Schrauben-, Schiebungs-, Gesimsflächen und dergl. kommt nur mehr eine Verschiebungsmöglichkeit nach einer Richtung vor. Dagegen gibt es eine große Mannigfaltigkeit von Flächen, auf welchen sich unendlichkleine Kurven ohne Gestaltsänderung nach allen Richtungen verschieben lassen. Ein einfaches Beispiel hiezu bilden die positiv gekrümmten Flächen mit konstantem Verhältnis der Hauptkrümmungsradien, für welche die Dupinsche Indikatrix überall eine Ellipse von bestimmtem Achsenverhältnis ist. Auf ihnen kann man eine solche Ellipse überall hin verschieben, wobei sich ihre Achsen stets in die Krümmungsrichtungen der Fläche einstellen. Das gilt nicht bloß für eine bestimmte Ellipse, sondern auch für jede ihr ähnliche Ellipse, solange sie noch unendlichklein ist. Unendlichklein bezieht sich dabei auf das Verhältnis der Ellipsenachsen zum kleineren der beiden Hauptkrümmungsradien, der von endlicher Größe vorausgesetzt wird. Das Aufpassen der Ellipse auf die Fläche in den verschiedenen Lagen erfolgt dann bis auf unendlichkleine Größen dritter Ordnung, um welche das

Schmiegungsparaboloid von der Fläche abweicht. Die Dupinsche Indikatrix ist eine *ebene* Kurve und wir wollen nun die Frage stellen: Gibt es Flächen, auf welchen sich eine unendlichkleine Raumkurve, die wir vorerst als geschlossen annehmen wollen, in ähnlicher Weise nach allen Richtungen verschieben läßt, wie eine unendlichkleine Ellipse auf den Flächen konstanten positiven Hauptkrümmungsverhältnisses? Die Abmessungen einer unendlichkleinen Raumkurve, die auf einer Fläche von endlichen Krümmungen liegt, sind nicht nach allen Richtungen von der gleichen Größenordnung. Ist diese für die Abmessungen parallel der Tangentenebene an die Fläche die erste, so ist sie für jene senkrecht hiezu die zweite; es soll aber die Raumkurve an allen Stellen der Fläche bis auf Größen dritter Ordnung aufsitzen. Offenbar kann dabei die Raumkurve nicht innerhalb der Größenordnung ihrer Abmessungen beliebig gewählt werden, denn sitzt sie an zwei verschiedenen Stellen einer Fläche bis auf Größen dritter Ordnung auf, so tut sie das Gleiche auf den betreffenden, nicht als kongruent vorausgesetzten Schmiegungsparaboloiden und kann daher nur der Schnitt zweier solcher Paraboloide sein, d. h. eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art mit einem Doppelpunkt im Unendlichen, da die beiden Paraboloide eine gemeinsame Achse haben und daher die unendlichferne Ebene im Achsenschnittpunkt berühren. Die Schnittkurve zweier solcher Paraboloide ist aber die Grundkurve eines ganzen Büschels von Paraboloiden mit gemeinsamer Achse und die Fläche, auf welcher die Raumkurve überall aufsitzen soll, darf nur Schmiegungsparaboloide enthalten, die auch in diesem Büschel vorkommen. Zwischen den Scheitelkrümmungen der Paraboloide des Büschels besteht nun eine bestimmte Beziehung, die sich auf die Hauptkrümmungen der zu suchenden Flächen überträgt, die demnach zur Gattung der Weingartenschen Flächen gehören, bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Funktion des andern ist.

Satz 1: Damit eine unendlichkleine Raumkurve auf einer Fläche endlicher Krümmung nach allen Richtungen verschiebbar ist, muß sie der Schnitt zweier Paraboloide mit gemeinsamer Achse sein. Die Fläche, auf der sie verschiebbar ist, ist eine Weingartensche Fläche, zwischen deren Hauptkrümmungen die gleiche Beziehung besteht, wie zwischen den Scheitelkrümmungen der Paraboloide, die alle durch die Raumkurve hindurchgehen.

I. Flächen mit geschlossenen Raumkurven.

Es soll nun ein Büschel von Paraboloiden zu Grunde gelegt werden, dessen Grundkurve geschlossen ist. Zu diesem Zwecke setzen wir das Büschel aus einem elliptischen Zylinder und einem Paraboloid mit gleicher Achse zusammen, welch' letzteres wir ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auch als parabolischen Zylinder wählen könnten. Da aber im Büschel deren zwei vorhanden sind, nimmt man der Symmetrie halber besser das Paraboloid, dessen Scheitel in der Mitte zwischen beiden parabolischen Zylindern gelegen ist. Die Gleichung des Büschels kann dann mit ν als Parameter folgendermaßen geschrieben werden:

$$\frac{1}{k \sin 2\beta}\left[(x^2 \sin^2\beta - y^2 \cos^2\beta)\cos 2\alpha + xy \sin 2\beta \sin 2\alpha\right] - 2z$$
$$+ \nu(x^2 \sec^2\beta + y^2 \operatorname{cosec}^2\beta - \varepsilon^2) = 0.$$

Die Grundkurve ist der Schnitt von:

$$x^2 \sec^2\beta + y^2 \operatorname{cosec}^2\beta - \varepsilon^2 = 0$$

und: $$\frac{(x^2 \sin^2\beta - y^2 \cos^2\beta)\cos 2\alpha + xy \sin 2\beta \sin 2\alpha}{k \sin 2\beta} = 2z$$

und kann mittels des Parameters φ durch folgende drei Gleichungen ausgedrückt werden:

$$x = \varepsilon \cos\beta \cos\varphi, \qquad y = \varepsilon \sin\beta \sin\varphi,$$
$$2z = \frac{\varepsilon^2}{4k} \sin 2\beta \cos 2(\varphi - \alpha).$$

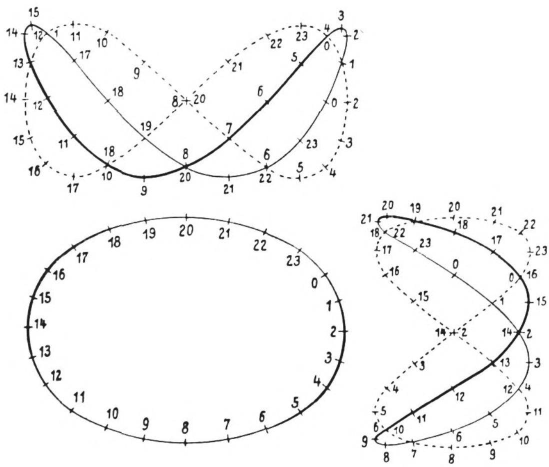
Sie ist infolgedessen eine Lissajous'sche Kurve, deren drei Koordinaten durch Sinusschwingungen dargestellt werden können, wobei die Schwingungszahl der dritten Koordinate doppelt so hoch wie die der beiden ersten ist. Die Amplituden der beiden ersten Schwingungen sind mit ε von der ersten Größenordnung unendlichklein, die Amplitude der dritten Schwingung ist mit ε^2 unendlichklein von der zweiten Ordnung. Außer dem elliptischen Zylinder mit den Halbachsen $\varepsilon \cos\beta$ und $\varepsilon \sin\beta$, der dem Parameterwerte $\nu = \infty$ im Büschel entspricht, gehen noch zwei parabolische Zylinder durch die Grundkurve, nämlich der eine für den Parameter $\nu = \frac{\sin 2\beta}{4k}$ mit der Gleichung:

$$\frac{1}{k}(x \operatorname{tg}\beta \cos\alpha + y \operatorname{ctg}\beta \sin\alpha)^2 - 2\left(z + \frac{\varepsilon^2}{8k}\sin 2\beta\right) = 0$$

und der zweite für $\nu = -\frac{\sin 2\beta}{4k}$ mit der Gleichung:

$$\frac{1}{k}(x \operatorname{tg}\beta \sin\alpha - y \operatorname{ctg}\beta \cos\alpha)^2 + 2\left(z - \frac{\varepsilon^2}{8k}\sin 2\beta\right) = 0.$$

Die höchsten und tiefsten Punkte der Grundkurve treten bei den Parameterwerten $\varphi = \alpha$, $\varphi = \alpha + \pi$, $\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{2}$ ein, die Schnittpunkte mit der Ebene $z = 0$ bei den Werten: $\varphi = \alpha \pm \frac{\pi}{4}$ und $\varphi = \alpha \pm \frac{3\pi}{4}$. Wird der Phasenwinkel α der dritten Schwingung gleich Null oder $\frac{\pi}{2}$, so hat die Grundkurve zwei zueinander senkrechte Symmetrieebenen; für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3}{4}\pi$ besteht die Grundkurve, ohne symmetrisch zu sein, aus vier kongruenten Stücken, die an den paarweise rechtwinklig gegenüberliegenden Schnittpunkten mit der Ebene $z = 0$ aneinanderstoßen. Fig. 1 stellt den



Figur 1

allgemeinen Fall für den Wert $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $\alpha = \frac{\pi}{12}$ in den drei Rissen als ausgezogene Kurve dar; der Sonderfall $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ist gestrichelt eingetragen; die z-Koordinaten sind stark überhöht aufgetragen.

Ein besonders ausgezeichneter Fall tritt dann ein, wenn $\beta = \frac{\pi}{4}$ wird. Der Grundriss der Kurve wird dann ein Kreis vom Radius $r = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2}$. In diesem Falle ist die Kurve in Bezug auf zwei zueinander senkrechte Ebenen symmetrisch, sie hat aber außerdem die Eigenschaft, die Ebene $z = 0$ in vier rechtwinklig gegenüberliegenden Punkten zu schneiden. Das Paraboloid mit dem Werte $\nu = 0$ ist in diesem Falle ein gleichseitiges. Man kann diese Form der Grundkurve als „Achterkreis" bezeichnen und dementsprechend im allgemeinen Fall von einer „Achterellipse" sprechen, die symmetrisch, antisymmetrisch oder unsymmetrisch sein kann. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Achterellipsen durch affine Umformung aus dem Achterkreis hervorgehen.

Wir betrachten jetzt das Büschel von Paraboloiden und ordnen seine Gleichung nach den Koordinaten:

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\beta\cos 2\alpha}{2k} + \frac{\nu}{\cos^2\beta}\right)x^2 + \frac{\sin 2\alpha}{k}\,x\,y$$
$$+ \left(\frac{\nu}{\sin^2\beta} - \frac{\operatorname{ctg}\beta\cos 2\alpha}{2k}\right)y^2 - 2\left(z + \varepsilon^2\frac{\nu}{2}\right) = 0.$$

Dann drehen wir das Koordinatensystem in der XY-Ebene um den Anfangspunkt derart, daß die Gleichung die Form

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 - 2z' = 0$$

erhält. Die Beiwerte λ_1 und λ_2 sind dann die Scheitelkrümmungen des Paraboloides. Sie genügen der quadratischen Gleichung in λ:

$$\left(\frac{\operatorname{tg}\beta\cos 2\alpha}{2k} + \frac{\nu}{\cos^2\beta} - \lambda\right)\left(\frac{\nu}{\sin^2\beta} - \frac{\operatorname{ctg}\beta\cos 2\alpha}{2k} - \lambda\right) - \frac{\sin^2 2\alpha}{2k^2} = 0$$

Oder nach λ geordnet:

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{4\nu}{\sin^2 2\beta} - \frac{\operatorname{ctg} 2\beta \cos 2\alpha}{k}\right) + \frac{4\nu^2}{\sin^2 2\beta} - \frac{1}{4k^2} = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{4\nu}{\sin^2 2\beta} - \frac{\operatorname{ctg} 2\beta \cos 2\alpha}{k}, \qquad \lambda_1 \lambda_2 = \frac{4\nu^2}{\sin^2 2\beta} - \frac{1}{4k^2}$$

$$\frac{4\nu}{\sin^2 2\beta} = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\operatorname{ctg} 2\beta \cos 2\alpha}{k}, \qquad \frac{4\nu^2}{\sin^2 2\beta} = \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{4k^2}.$$

Durch Elimination von ν ergibt sich folgende Beziehung zwischen den Scheitelkrümmungen λ_1 und λ_2 der Paraboloide des Büschels:

$$\frac{4\nu^2}{\sin^2 2\beta} = \frac{\sin^2 2\beta}{4}\left(\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{\operatorname{ctg} 2\beta \cos 2\alpha}{k}\right)^2 = \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{4k^2}.$$

$$\sin^2\beta \cos^2\beta (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1 \lambda_2 + \frac{\cos 2\beta \sin 2\beta \cos 2\alpha}{2k}(\lambda_1 + \lambda_2)$$
$$+ \frac{\cos^2 2\beta \cos^2 2\alpha}{4k^2} - \frac{1}{4k^2} = 0,$$

$$\sin^2\beta \cos^2\beta (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \lambda_1 \lambda_2 (\cos^4\beta + \sin^4\beta)$$
$$+ \frac{\cos 2\alpha}{2k}(\lambda_1 + \lambda_2)(\cos^2\beta - \sin^2\beta)\sin 2\beta$$
$$- \frac{\sin^2 2\beta \cos^2 2\alpha}{4k^2} - \frac{\sin^2 2\alpha}{4k^2} = 0,$$

$$\left(\lambda_1 \cos^2\beta - \lambda_2 \sin^2\beta - \frac{\cos 2\alpha \sin 2\beta}{2k}\right) \times$$
$$\left(\lambda_1 \sin^2\beta - \lambda_2 \cos^2\beta + \frac{\cos 2\alpha \sin 2\beta}{2k}\right) - \frac{\sin^2 2\alpha}{4k^2} = 0.$$

Die Beziehung ist quadratisch in den Scheitelkrümmungen und geht bei Vertauschung von λ_1 und λ_2 in sich selbst über. Außerdem enthält sie die Größe ε, die in der Gleichung des Büschels vorkommt und den Maßstab der Grundkurve bestimmt, nicht. Wenn also die Hauptkrümmungen λ_1 und λ_2 einer Fläche diese Bedingung erfüllen, so läßt sich auf dieser Fläche *nicht* bloß *eine* Kurve nach allen Richtungen verschieben, sondern eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von solchen Kurven, die aus einer von ihnen durch eine affine Umformung hervorgehen. Diese besteht in einer ähnlichen Umformung im Verhältnis ε in Bezug auf die Abmessungen parallel der Tangenten-(XY-)Ebene, verbunden mit einer Maßstabsänderung im Verhältnis ε^2 der Abmessungen in der Normalen-(Z)Richtung. Man kann sich die Mannigfaltigkeit der verschiebbaren Kurven mit parallelen Achsen und den Mittelpunkten auf der gemeinsamen Z-Achse zu einem korbartigen Geflecht in der Gestalt einer flachen Schale vereinigt denken, wobei die Kurven starr und die Verbindung der Kurven untereinander beweglich ist. Eine solche Schale läßt sich dann überall auf die Fläche auflegen bezw. nach allen Richtungen auf der Fläche verschieben, wobei die dabei nötige Umformung der Schale nur von den Verbindungen übernommen wird.

Satz 2: Zwischen den Hauptkrümmungen einer Weingartenschen Fläche, auf welcher sich eine bestimmte unendlichkleine geschlossene Raumkurve nach allen Richtungen verschieben läßt, besteht eine symmetrische quadratische Beziehung von hyperbolischem Typus mit stumpfem Asymptotenwinkel. Eine solche Fläche läßt noch die Verschiebung einer einfachen Mannigfaltigkeit anderer Kurven zu, welche aus der ursprünglichen Kurve durch eine bestimmte affine Umformung hergeleitet werden können.

Die symmetrische quadratische Beziehung zwischen den Hauptkrümmungen, welche von drei Konstanten α, β und k abhängig ist, kann durch geeignete Wahl der letzteren, mit welcher eine bestimmte Form der beweglichen Kurve verbunden ist, wesentlich vereinfacht werden. Sie kann insbesondere in lineare Beziehungen zerfallen.

1. Wird der Phasenwinkel α gleich Null oder $\frac{\pi}{2}$ gesetzt, so verschwindet das konstante Glied. Die beiden Linearfaktoren, in welche die Beziehung zerfällt, sagen dann gleich Null gesetzt, das Gleiche aus: $\lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{tg}^2\beta - \frac{2\operatorname{tg}\beta}{k} = 0$. Die verschieblichen Raumkurven sind hier symmetrische Achterellipsen von der Gleichung

$$x = \varepsilon\cos\beta\cos\varphi, \quad y = \varepsilon\sin\beta\sin\varphi, \quad 2z = \pm\frac{\varepsilon^2}{4k}\sin 2\beta\cos 2\varphi.$$

Die Gleichungen ihrer Projektionen auf die Symmetrieebenen lauten:

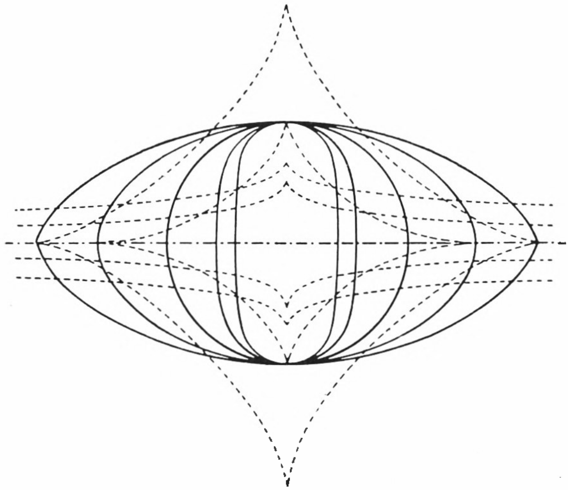
$$2z \pm \frac{\varepsilon^2}{4k} \sin 2\beta = \pm \frac{\operatorname{tg}\beta}{k} x^2, \qquad 2z \mp \frac{\varepsilon^2}{4k} \sin 2\beta = \mp \frac{\operatorname{ctg}\beta}{k} y^2.$$

2. Für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ vereinfacht sich die Beziehung ohne zu zerfallen in:

$$(\lambda_1 \cos^2\beta - \lambda_2 \sin^2\beta)(\lambda_1 \sin^2\beta - \lambda_2 \cos^2\beta) - \frac{1}{4k^2} = 0.$$

Die verschiebbare Kurve ist in diesem Falle eine antisymmetrische aus vier kongruenten Stücken bestehende Achterellipse.

3. Für $k = \infty$ zerfällt die Beziehung in: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \operatorname{tg}\beta$ bzw. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \operatorname{ctg}\beta$. Die Weingartenschen Flächen haben konstantes Hauptkrümmungsverhältnis und die verschiebbaren Kurven sind ähnliche Ellipsen. Die Drehflächen von der genannten Eigenschaft lassen sich leicht bestimmen und durch Quadraturen ausdrücken. Ihre Formen sind in Fig. 2 zusammengestellt. Unter ihnen befindet



Figur 2

sich natürlich die Kugel, dem Falle $\operatorname{tg}\beta = 1$ entsprechend. Wenn die Querkrümmung größer als die Meridiankrümmung ist, haben die Flächen spindelförmige Gestalt und nähern sich mit wachsendem

Verhältnis dem Drehzylinder. Für das Verhältnis 2 : 1 von Querkrümmung zur Meridiankrümmung wird der Meridian der Drehfläche eine gemeine Zykloide mit der Rollbahn als Drehachse, entsprechend der bekannten Eigenschaft der Zykloide, daß ihr Krümmungsradius doppelt so lang als die Normale vom Fußpunkt bis zur Rollbahn ist. Überwiegt dagegen die Meridiankrümmung, so nehmen die Drehflächen eine stark abgeplattete Form an mit der Krümmung Null an den Schnittpunkten mit der Drehachse. Die Meridiankurven lassen sich durch Aneinanderreihung der Krümmungskreise sehr bequem graphisch bestimmen; die dabei mitanfallenden Evoluten sind in der Fig. 2 gestrichelt eingetragen.

4. Der Fall $\beta = \frac{\pi}{4}$ vereinfacht die Beziehung ganz besonders, nämlich in:

$$\frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4} - \frac{1}{4k^2} = 0 \quad \text{oder:} \quad \lambda_1 - \lambda_2 = \pm \frac{1}{k}.$$

Er umfaßt also die Flächen konstanter Hauptkrümmungsdifferenz.

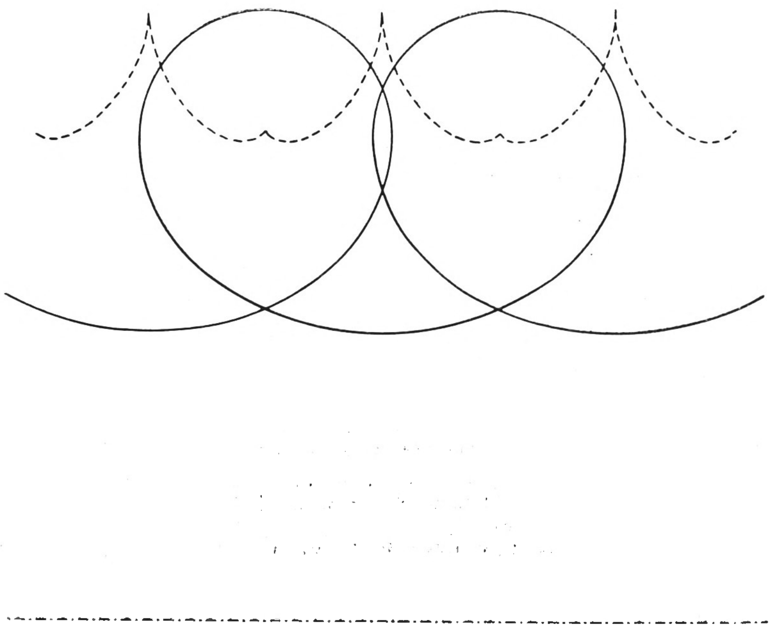
Die auf dieser Flächengattung verschieblichen Kurven sind Achterkreise von der Gleichung:

$$x = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{2} \cos\varphi, \quad y = \frac{\varepsilon \sqrt{2}}{2} \sin\varphi, \quad 2z = \frac{\varepsilon^2}{4k} \cos 2(\varphi - a)$$

Hieraus folgt:

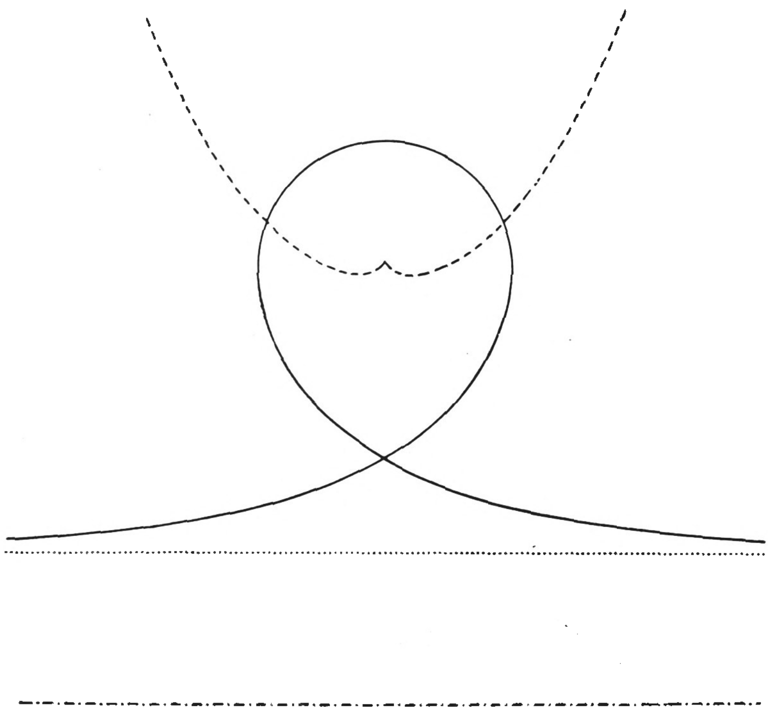
Satz 3: Auf den Flächen konstanter Hauptkrümmungsdifferenz lassen sich Achterkreise von unendlichkleinem Radius in allen Richtungen verschieben (aber nicht drehen!).

Die partielle Differentialgleichung 2. O., der diese Flächen genügen, läßt sich natürlich leicht aufstellen. Ist H der Ausdruck für die mittlere Krümmung ($H = \lambda_1 + \lambda_2$) und K jener für das Krümmungsmaß ($K = \lambda_1 \lambda_2$), so stellt $H^2 - 4K = \frac{1}{k^2}$ jene Gleichung dar. Für die Drehflächen unter ihnen ist der Meridian durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt, die sich nur auf eine nicht separierbare Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen läßt. Dagegen ist auch hier eine schrittweise graphische Integration aus der Definitionsgleichung: $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{k}$ heraus sehr einfach auszuführen. Geht man von einem Punkt mit Tangentenrichtung aus, so ist der Querkrümmungsradius ϱ_2 als Länge der Normalen vom Fußpunkt bis zur Drehachse gegeben und damit auch der Meridiankrümmungsradius $\varrho_1 = \frac{k\varrho_2}{k + \varrho_2}$. Zeichnet man den zugehörigen Krümmungskreis und nimmt man darauf einen zum Ausgangspunkt benachbarten Punkt an, so ist in diesem wieder die Tangente und damit der Querkrümmungsradius bekannt, woraus der Meridiankrümmungsradius im Nachbarpunkt folgt usw. Auf diesem Wege wurde der Formenschatz der Drehflächen konstanter Hauptkrümmungsdifferenz erschlossen, wie er in den nachstehenden Figuren 3 bis 11 dargestellt ist. Die Meridiankurven zerfallen in zwei Gruppen, je nachdem der achsenfernste Punkt mehr oder weniger als 3,66.. k von der Drehachse absteht. Sie sind in den Figuren in einheitlichem Maßstab ($k = 20$ mm) gezeichnet.

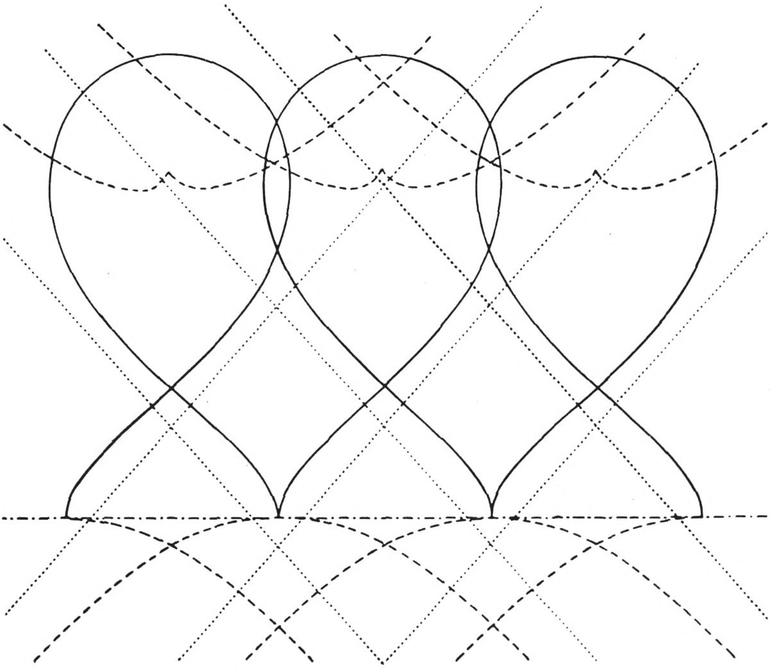


Figur 3

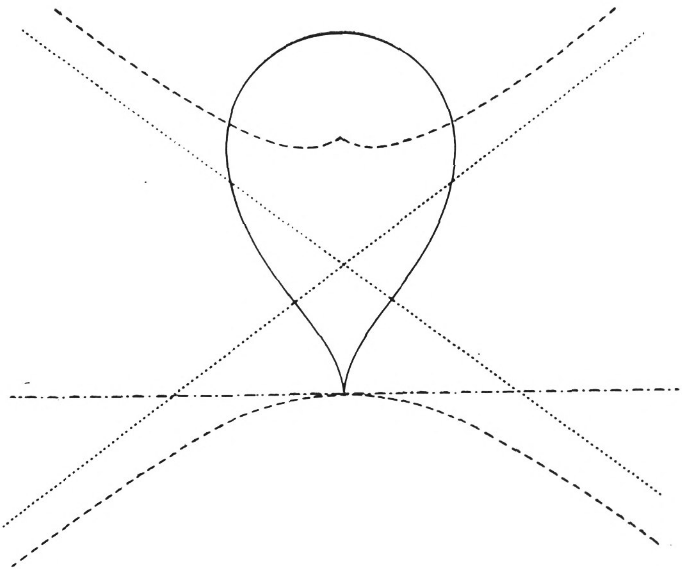
In der ersten Gruppe besteht die Meridiankurve aus einer Wiederholung von kongruenten und symmetrischen Zweigen, die eine Reihe von Schlingen bilden, in denen der Krümmungsradius von einem Minimum $< k$ in einem Punkt mit achsenparalleler Tangente allmählich zum Werte k in einem Punkt mit achsensenkrechter Tangente anwächst und schließlich ein Maximum $> k$ mit achsenparalleler Tangente erreicht. Solange der Krümmungsradius wächst, ist die Drehfläche positiv gekrümmt, wenn er abnimmt, negativ; im ersteren Teil ist die Differenz $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ positiv, im zweiten im gleichen Betrage negativ, wenn jeweils der Querkrümmungsradius positiv gerechnet und das Vorzeichen des Meridiankrümmungsradius dementsprechend bestimmt wird. Siehe Fig. 3, in welcher die Evolute des Meridians gestrichelt und die Drehachse strichpunktiert eingetragen ist.



Figur 4



Figur 5



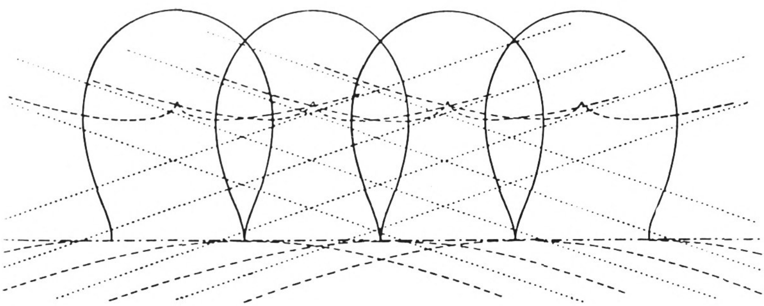
Figur 6

Ist der Abstand des achsenfernsten Punktes gerade gleich $3{,}66 \cdot\cdot k$, so besteht der Meridian der Drehfläche aus einer einzigen Schleife mit einer zur Drehachse parallelen Asymptote im Abstande k. Siehe Fig. 4.

Sinkt jener Abstand unter die angegebene Grenze, so reicht die Meridiankurve bis an die Drehachse, hat aber einen Wendepunkt dort wo ϱ_2 den Wert k erreicht. Sie sitzt mit einer Art Dornspitze auf der Achse auf und besteht aus unendlichvielen symmetrischen und kongruenten Wiederholungen, die sich zu herzförmigen Schleifen zusammenschließen. Siehe Fig. 5, in welcher die Normalen in den Wendepunkten, die zugleich Asymptoten der Evolute sind, punktiert eingetragen sind. In der Gegend der Dornspitzen hat die Evolute eine maskierte Singularität mit der Krümmung Null.

Es folgt nun ein besonderer Fall, der beim Maximalabstand $2{,}62 .. k$ von der Drehachse erreicht wird und dadurch ausgezeichnet ist, daß die Wiederholung der symmetrischen und kongruenten Zweige wegfällt, da sich die Kurve schließt. Siehe Fig. 6.

Diese Wiederholung tritt alsbald wieder auf, wenn der obige Wert des Größtabstandes unterschritten wird. Es trennen sich die Spitzen wieder und es treten Überschneidungen der einzelnen Schleifen auf. Siehe die Figuren 7 und 8.

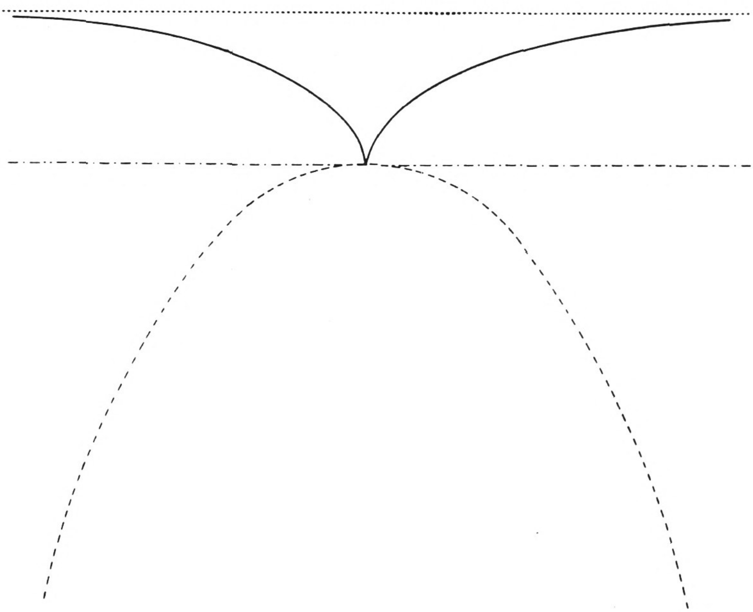


Figur 7

Figur 8

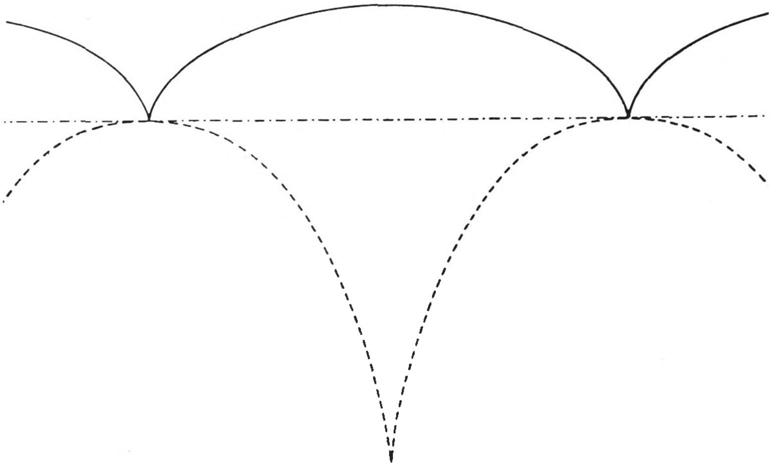
In dem Maße, wie der Größtabstand von der Achse gegenüber der Konstanten k klein wird und die Krümmung der Fläche wächst, nähert sich die Form der einzelnen Schleife des Meridians einem Halbkreis und die Fläche selbst einer Kugel von kleinem Radius.

Bei allen bisherigen Beispielen ist die Differenz: Meridiankrümmung minus Querkrümmung $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{k}$ in den achsenfernen Teilen der Fläche positiv und wechselt ihr Vorzeichen beim Überschreiten desjenigen Teiles der parabolischen Kurve, der zu den Meridianpunkten mit achsensenkrechter Tangente gehört. Jene Teile der parabolischen Kurve, welche von den Wendepunkten der Meridiane gebildet werden, geben zu keinem Wechsel im Vorzeichen jener Differenz Anlaß. Es gibt aber noch Meridianformen, die außerhalb der Achse keine senkrechte Tangente besitzen und für die die Krümmungsdifferenz $\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}$ dauernd negativ ist. Sie beginnen mit dem Falle, in dem der Größtabstand von der Drehachse gleich k wird, der aber erst im unendlichfernen Punkt der Achse auftritt. Der Meridian hat wie



Figur 9

in Fig. 4 eine achsenparallele Asymptote im Abstand k und eine Art Dornspitze auf der Drehachse. Siehe Fig. 9, die auch als Fortsetzung von Fig. 4 aufgefaßt werden könnte. Wird der Größtabstand kleiner als k, so treten sich wiederholende Bogen ohne Wendepunkte mit Spitzen auf der Drehachse auf, welche sich mit weiter abnehmendem Größtabstand mehr und mehr Halbkreisen nähern. Siehe Fig. 10 und 11.



Figur 10

Figur 11

Das gleiche graphische Integrationsverfahren würde sich auch auf die Bestimmung der Meridiane der Drehflächen anwenden lassen, deren Krümmungen in der allgemeinen symmetrischen quadratischen Beziehung zueinander stehen, die die Verschieblichkeit einer unendlichkleinen geschlossenen Kurve auf der Fläche ausdrückt.

II. Flächen mit ungeschlossenen Raumkurven.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen sich auch auf ungeschlossene Kurven erweitern, wobei zwar die Anschaulichkeit Einbuße erleidet, aber doch bemerkenswerte Gesichtspunkte anderer Art auftreten. Beginnen wir wieder mit dem einfachsten Fall der ebenen Indikatrix, die in diesem Falle eine Hyperbel ist, von der aber nur der achsennahe Teil, der aus zwei ebenen symmetrischen Kurvenstücken besteht, bei der Verschiebbarkeit in Betracht kommt. Die Flächen, auf denen er verschoben werden kann, sind negativ gekrümmt und haben konstantes Verhältnis ihrer Hauptkrümmungen, woraus ohne weiteres die Isogonalität der Haupttangentenkurven folgt. Zu diesen Flächen gehören als Sonderfall die Minimalflächen, bei welchen die Isogonalität in Orthogonalität übergeht. Auf ihnen lassen sich demnach „unendlichkleine“ gleichseitige Hyperbeln nach allen Richtungen verschieben. Als Sonderfall dieser Hyperbeln kann man auch das rechtwinklige Haupttangentenpaar auffassen. Man kann also ein Rechtwinkelkreuz mit unendlichkurzen Armen auf einer Minimalfläche nach allen Richtungen verschieben, ohne daß es um Größen zweiter Ordnung (auf das Verhältnis von Armlänge zum Hauptkrümmungsradius als Größe erster Ordnung bezogen) aus der Fläche heraustritt. Bei den Flächen mit konstantem negativen Hauptkrümmungsverhältnis tritt an Stelle des Rechtwinkelkreuzes ein schiefwinkliges Andreaskreuz.

Ähnliche Verhältnisse treten auf, wenn man die Verschieblichkeit ungeschlossener nichtebener unendlichkleiner Stücke von Raumkurven untersucht. Gleich den geschlossenen müssen auch sie der Schnitt zweier in den Scheitelpunkten sich nahezu berührender Schmiegungsparaboloide sein, also Kurven vierter Ordnung erster Art mit einem Doppelpunkt im Unendlichen auf der gemeinsamen Achse. Auch sie sind dann Grundkurven von Paraboloidbüscheln, wobei dann die für die Scheitelkrümmungen der Paraboloide eines Büschels geltende Beziehung für die Flächen, auf denen die Verschiebung der Grundkurve des Büschels möglich ist, als Beziehung zwischen den Hauptkrümmungen auftritt. Ähnlich wie bei den geschlossenen Grundkurven ist auch in diesem Falle das Büschel die „penultimate“[1]) Form eines Büschels von sich berührenden Paraboloiden, zwischen deren Scheitelkrümmungen die gleiche Beziehung besteht, nur mit dem Unterschiede, daß im Falle der ungeschlossenen Grundkurve die Paraboloide sich berühren und schneiden und zwar in zwei reellen Parabeln, deren Ebenen durch die gemeinsame Achse aller

[1]) Fastberührende, im Gegensatz zur ultimaten, d. h. berührenden Form.

Paraboloide des Büschels gehen und auf der gemeinsamen Scheitelberührebene senkrecht stehen. Die Scheitelstücke jener gemeinsamen Schnittparabeln bilden nun ein krummliniges und im allgemeinen auch schiefwinkliges Kreuz, das eine Art Asymptotenpaar für die Grundkurve der penultimaten Form des Paraboloidbüschels darstellt. Auf den Flächen, die aus Schmiegungsparaboloiden des Büschels und zwar des penultimaten oder des ultimaten zusammengesetzt sind, läßt sich dann das krumme Kreuz und die zu ihm penultimate Grundkurve verschieben, wobei die Gestalt und gegenseitige Lage der Kreuzarme und die Gestalt der Grundkurve, nicht aber die gegenseitige Lage des Kreuzes zur Grundkurve, unverändert bleiben.

Um nun zur rechnerischen Festlegung überzugehen, betrachten wir das im vorigen Sinne „ultimate“ Büschel von Paraboloiden mit ν als Büschelparameter: $lx^2+2mxy+ny^2-2z+\nu(p^2x^2-q^2y^2)=0$. Nach den Koordinaten geordnet:

$$(l+\nu p^2)x^2+2mxy+(n-\nu q^2)y^2-2z=0.$$

Wenn diese Gleichung durch Drehung des Koordinatensystems um die Z-Achse auf die Form $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2-2z=0$ gebracht wird, genügen λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung in λ:

$$(l+\nu p^2-\lambda)(n-\nu q^2-\lambda)-m^2=0$$

oder:

$$\lambda^2-\lambda(l+n+\nu(p^2-q^2))+ln-m^2+\nu(np^2-lq^2)-\nu^2p^2q^2=0.$$

Hieraus folgt: $\lambda_1+\lambda_2=l+n+\nu(p^2-q^2)$ und:

$$\lambda_1\lambda_2=ln-m^2+\nu(np^2-lq^2)-\nu^2p^2q^2.$$

Die Elimination von ν aus der vorigen Gleichung führt zu folgender Beziehung zwischen den Scheitelkrümmungen λ_1 und λ_2 eines Paraboloides des Büschels:

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2(p^2-q^2)^2+(\lambda_1+\lambda_2)^2p^2q^2-(\lambda_1+\lambda_2)(lq^2+np^2)(p^2+q^2)\\+(l+n)(np^4+lq^4)-(ln-m^2)(p^2-q^2)^2=0.\end{aligned}$$

Man kann sie folgendermaßen zusammenfassen:

$$\begin{aligned}(p^2\lambda_1+q^2\lambda_2-(lq^2+np^2))(q^2\lambda_1+p^2\lambda_2-(lq^2+np^2))\\+m^2(p^2-q^2)^2=0.\end{aligned}$$

Sie stellt die Beziehung zwischen den Hauptkrümmungen der Flächen dar, auf welchen jener Teil der Grundkurve des Büschels, der in unmittelbarer Nähe des allen Paraboloiden gemeinsamen, im Anfangspunkt des Koordinatensystems gelegenen Berührpunktes liegt, nach allen Richtungen verschoben werden kann. Auf den gleichen Flächen können auch die entsprechenden Teile der Grundkurve eines penultimaten Büschels verschoben werden, dessen Gleichung sich nur um das Glied $\nu\varepsilon^2$ von der des ultimaten Büschels unterscheidet.

Der in Betracht kommende Teil der Grundkurve des ultimaten Büschels besteht aus den zwei Parabelscheitelbögen, welche die Ebenen $px \pm qy = 0$ aus dem Paraboloid $lx^2 + 2mxy + ny^2 - 2z = 0$ ausschneiden. Er hat die Form eines unendlichkleinen recht- oder schiefwinkligen Kreuzes mit geraden oder krummen Balken, wobei die Ebene der Balkenkrümmung immer senkrecht zur gemeinsamen Tangentenebene im Schnittpunkt der Kreuzbalken steht. Ein solches Kreuz ist durch drei Größen bestimmt, nämlich durch den Winkel der beiden Balken und ihre Krümmungen. Auch in die quadratische Gleichung zwischen λ_1 und λ_2 gehen nur drei wesentliche Konstante ein, die sich durch die fünf Größen l, m, n, p, q, ausdrücken.

Satz 4: Zwischen den Hauptkrümmungsradien einer *Weingartenschen* Fläche, auf welcher sich eine bestimmte, unendlichkleine, *ungeschlossene* Raumkurve nach allen Richtungen verschieben läßt, besteht eine symmetrische quadratische Beziehung von hyperbolischem Typus mit *spitzem* Asymptotenwinkel. Auf einer solchen Fläche läßt sich auch noch ein spitz- oder rechtwinkliges Kreuz mit unendlich kurzen, gebogenen oder geraden Balken verschieben, das als Asymptotenpaar jener Raumkurve gelten kann.

Im Einzelnen sind folgende Sonderfälle der Beziehung hervorzuheben:

1. $m = 0$. Die Beziehung wird linear:

$$p^2\lambda_1 + q^2\lambda_2 - (lq^2 + mp^2) = 0.$$

Das verschiebbare Kreuz ist symmetrisch zu den Halbierungsebenen des Winkels der beiden Balken; es stellt sich immer symmetrisch zu den Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche ein. Die Balkenkrümmung ist: $\frac{lq^2 + np^2}{p^2 + q^2}$.

2. $p = \pm q$. Die linear gewordene Beziehung vereinfacht sich auf $\lambda_1 + \lambda_2 = l + n$, d. h. die Flächen haben konstante Hauptkrümmungssumme oder mittlere Krümmung gleich $(l + n)$. Das verschiebbare Kreuz ist rechtwinklig, seine Balken haben verschiedene Krümmung, nämlich $\frac{l+n}{2} \pm m$, die nur im Falle $m = 0$ gleich werden. In diesem Falle stellt sich auch das Kreuz symmetrisch zu den Hauptkrümmungsrichtungen, im allgemeinen nicht. Auf derselben Fläche mit der mittleren Krümmung $l + n$ sind eine ganze Mannigfaltigkeit von rechtwinkligen Kreuzen verschiebbar, da m in der Beziehung zwischen λ_1 und λ_2 nicht vorkommt; es muß nur die Summe der beiden Balkenkrümmungen gleich der mittleren Krümmung der Fläche sein. Darunter sind auch solche mit geraden Balken, wenn $m = \frac{l+n}{2}$ ist. Diese stellen sich mit dem geraden Balken in eine Haupttangentenrichtung ein. In die positiv gekrümmten Teile der Fläche können sie nicht verschoben werden. Im Falle $l + n = 0$ werden die Flächen Minimalflächen. Die beiden Kreuzbalken haben absolut gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Krümmung. Das Kreuz kann nur in solchen Teilen der Minimalfläche verschoben werden, in dem die Hauptkrümmung der Fläche größer als die Balkenkrümmung des Kreuzes ist.

> Satz 5: Auf den Flächen konstanter mittlerer Krümmung und nur auf solchen, läßt sich eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von unendlichkleinen Rechtwinkelkreuzen nach allen Richtungen verschieben. Für alle diese Rechtwinkelkreuze ist die Summe der beiden Balkenkrümmungen gleich der konstanten Hauptkrümmungssumme der Fläche.

Die Drehflächen unter den Flächen konstanter mittlerer Krümmung sind wohl bekannt, ihre Meridiane sind Delaunaysche

Kurven,[1]) welche vom Brennpunkt eines auf der Drehachse abrollenden Kegelschnittes beschrieben werden.

3. $lq^2 + np^2 = 0$. Hier vereinfacht sich die Beziehung auf

$$(p^2\lambda_1 + q^2\lambda_2)(q^2\lambda_1 + p^2\lambda_2) + m^2(p^2 - q^2)^2 = 0.$$

Das Kreuz, welches auf den zugehörigen Flächen verschiebbar ist, hat, ohne rechtwinklig zu sein, gleich stark aber entgegengesetzt gekrümmte Balken, so daß es bei Umwendung um die Halbierungslinien des Winkels der Balken mit sich selbst zur Deckung kommt.

4. Kommt zu $lq^2 + np^2 = 0$ noch $m = 0$, so zerfällt die Beziehung in: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{q^2}{p^2}$ bzw. $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{p^2}{q^2}$. Die Flächen haben konstantes negatives Hauptkrümmungsverhältnis und das auf ihnen verschiebbare Kreuz ist eben und hat gerade Balken. Die hieher gehörigen Drehflächen haben ganz den Charakter des Katenoides, das den Sonderfall für $p = q$ darstellt. Paul Staeckel hat gezeigt, daß diese Drehflächen die einzigen Flächen sind, welche durch die Haupttangentenkurven in Rhomben geteilt werden.[2])

5. Im Falle $p = 0$ wird die Beziehung:

$$(\lambda_1 - l)(\lambda_2 + l) + m^2 = 0,$$

also bilinear. Die Paraboloide des Büschels berühren sich jetzt längs eines ebenen Schnittes durch die gemeinsame Achse und die Grundkurve des Büschels ist eine doppelt zählende Parabel, von welcher für unseren Zweck nur der scheitelnahe Bogen in Frage kommt.

An Stelle des verschieblichen Kreuzes tritt jetzt ein geodätischer Flächenstreifen von einer Länge, die von der ersten Ordnung und einer Breite, die von der zweiten Ordnung unendlich klein ist. Die Mittellinie des Streifens hat die geodätische Krümmung Null, aber eine endliche Normalkrümmung $\frac{1}{k}$. Außerdem ist noch der Winkel ψ charakteristisch, den die Streifenrichtung mit der konjugierten Richtung auf dem Paraboloid einschließt.

---

[1]) Enzykl. d. math. Wiss., III. D. 5, 36, S. 345.

[2]) Beiträge zur Flächentheorie III und IV, Leipziger Akademieberichte 1896. S. 491 und 1898, S. 12.

Die Normalkrümmung $\frac{1}{k}$ ist gleich l und ψ wird aus der Gleichung: $\operatorname{tg}\psi = -\frac{l}{m}$ bestimmt. Der Streifen paßt auf einen Drehzylinder vom Radius $r = \frac{l^2}{l^2 + m^2}$ und seine Mittellinie schließt mit den Mantellinien des Drehzylinders den Winkel ψ ein. Dieser Drehzylinder ist eine von den Flächen mit der Hauptkrümmungsbeziehung $(\lambda_1 - l)(\lambda_2 - l) + m^2 = 0$, wie man alsbald sieht, wenn man $\lambda_1 = 0$ setzt. Auf diesem Zylinder ist der Streifen in der Tat als starres Gebilde verschiebbar, wobei seine Längsrichtung immer den gleichen Winkel mit den Mantellinien einschließt. Auf den allgemeinen Flächen dieser Art ändert sich jedoch der Winkel der Streifenrichtung mit den Hauptkrümmungsrichtungen.

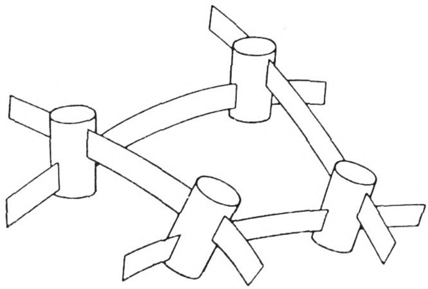
6. Verschwindet außer p auch noch m, so lautet die Hauptkrümmungsbeziehung $(\lambda_1 - l)(\lambda_2 - l) = 0$, oder $\lambda_1 = l$. Die hieher gehörigen Flächen haben die eine Hauptkrümmung konstant, sind also Röhrenflächen vom Radius l. Der auf ihnen verschiebliche Streifen ist dadurch ausgezeichnet, daß $\psi = \frac{\pi}{2}$ wird, er ist also ein unendlichkleines Mantelstück eines geraden Kreiszylinders von verschwindender Höhe und stellt sich beim Verschieben immer in die eine Hauptkrümmungsrichtung der Fläche ein. Wird auch noch $l = 0$, so wird der Streifen eben und die durch $\lambda_1 = 0$ gekennzeichneten Flächen sind abwickelbare allgemeinster Art.

7. Tritt zu $p = 0$ noch $l = 0$, so zieht sich die Hauptkrümmungsbeziehung auf $\lambda_1 \lambda_2 = -m^2$ zusammen und die entsprechenden Flächen haben konstantes negatives Krümmungsmaß. Die Grundkurve des Paraboloidbüschels ist jetzt eine doppelt zählende Gerade geworden und alle Paraboloide haben einen windschiefen Streifen längs dieser Geraden gemeinsam. Das Scheitelstück des Streifens stellt das auf den pseudosphärischen Flächen beliebig verschiebbare unendlichkleine Gebilde dar. Es ist nur mehr von e i n e r Konstanten abhängig, die das Maß der Drehung der Tangentenebene des Streifens beim Fortschreiten längs seiner geradlinigen Achse, also seine Verwindung bestimmt. Es ist:

$\frac{d\alpha}{ds} = \pm m$, wobei $d\alpha$ den Winkel der Tangentenebenen bedeutet, deren Berührpunkte den Abstand ds haben. Dieser verwundene Streifen stellt sich bei der Verschiebung mit seiner Längsachse in eine der Haupttangentenrichtungen ein und kann als starres Gebilde längs einer Haupttangentenkurve verschoben werden. Das entspricht dem Umstande, daß die Haupttangentenkurven der Flächen konstanter negativer Krümmung auch konstante Torsion haben, entsprechend dem Satze von Enneper, daß die Torsion der Haupttangentenkurven der Wurzel aus dem negativen Krümmungsmaß gleich ist.

Satz 6: Auf den Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes lassen sich zwei zueinander symmetrische, unendlichkleine, gewundene Streifen mit geradliniger Achse unbeschränkt verschieben, wobei sich die Längsrichtung des einen in die eine, die des symmetrischen in die andere Haupttangentenrichtung der Fläche einstellt.

Im allgemeinen Falle sowie in den unter 1. bis 4. erwähnten Sonderfällen bestimmt das bewegliche Kreuz in jedem Punkt der Fläche zwei Richtungen, die einen festen Winkel bilden. Werden diese Richtungen zu Kurven zusammengefaßt, so bilden diese ein isogonales oder orthogonales System von Flächenkurven, längs welcher die Normalkrümmung konstant ist. Legt man durch die einzelnen Tangenten einer solchen Flächenkurve die Normalebenen zur Fläche im Berührpunkt, so bilden diese eine abwickelbare Fläche, auf der die Flächenkurve gelegen ist. Wird diese abwickelbare Fläche in die Ebene ausgebreitet, so geht dabei die Flächenkurve in einen Kreis über, dessen Radius durch die Krümmung des zugehörigen Kreuzbalkens bestimmt und daher für alle Flächenkurven der einen Schar derselbe ist. Umgekehrt kann jede der Flächenkurven durch Verbiegung einer schmalen, dünnen Lamelle, die in unverbogenem Zustand kreisförmig ist, erhalten werden. Sorgt man jetzt noch dafür, daß die Lamelle senkrecht zu der zu erzeugenden Fläche steht und daß die Lamellen der verschiedenen Flächenkurven sich unter konstantem Winkel schneiden, so kann man die gesuchten Flächen mechanisch als Lamellengeflecht erzeugen. Die dazu nötigen Verbindungsstücke habe ich schon vor vielen Jahren angegeben.[1]) Es sind zylindrische Röhrenstücke, die an gegenüberliegenden Stellen geschlitzt sind um die Lamellen aufzunehmen und unter bestimmtem Winkel gegenseitig festzuhalten. Siehe Fig. 12. Werden demnach zwei Reihen biegsamer kreisförmiger Lamellen von verschiedenem aber innerhalb jeder Reihe gleichem Radius so zu einem Geflecht vereinigt, daß die Lamellen hochkant zum Geflecht stehen und sich unter konstantem Winkel schneiden, so ahmt das Geflecht bei fortschreitender Verdichtung seiner Maschen eine Fläche nach, auf welcher ein unendlichkleines Kreuz mit krummen Balken unbeschränkt verschieblich ist und zwischen deren Hauptkrümmungen eine symmetrische quadratische Beziehung besteht.



Figur 12

[1]) Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 6. Bd. 1899, S. 58.