Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1927. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1927
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über die Grundgleichungen der Flächentheorie.

Von **Aurel Voss** in München.

Vorgetragen in der Sitzung am 15. Januar 1927.

Diese Gleichungen, häufig auch Codazzische Gleichungen genannt, werden in sehr verschiedener Art entwickelt. Die folgende Herleitung ist vielleicht besonders einfach.

Für die Richtungscosinus X, Y, Z der Flächennormale hat man, wenn

1) $$\Sigma X x_{uu} = D, \quad \Sigma X x_{vv} = D'', \quad \Sigma X x_{uv} = D',$$

2) $$\Sigma X_u x_u = -D, \quad \Sigma X_u x_v = \Sigma X_v x_u = -D', \quad \Sigma X x_{vv} = -D''$$

gesetzt wird, durch Differentiation von 1)

3) $$\begin{aligned} &\Sigma X x_{uuv} + \Sigma X_v x_{uu} = D_v, \quad \Sigma X x_{vvu} + \Sigma X_u x_{vv} = D''_u, \\ &\Sigma X x_{vuu} + \Sigma X_u x_{uv} = D'_u, \quad \Sigma X x_{vuu} + \Sigma X_v x_{uv} = D'_v, \end{aligned}$$

also aus 3)

4) $$\Sigma X_v x_{uu} - \Sigma X_u x_{uv} = D_v - D'_u, \quad \Sigma X_v x_{uv} - \Sigma X_u x_{vv} = D'_v - D''_u.$$

Aus 4) erhält man sogleich die beiden Codazzischen Gleichungen, wenn man die zweiten Ableitungen der x, y, z durch ihre Werte nach 5) ersetzt und die Gleichungen 2) zur Entfernung der $\Sigma X_u x_u$, $\Sigma X_u x_v$, $\Sigma X_v x_u$, $\Sigma X_v x_v$ benutzt. Aus den Formeln, die auch für y, z; Y, Z unverändert gültig bleiben

5) $$\begin{aligned} x_{uu} &= A x_u + A_1 x_v + XD, \\ x_{uv} &= B x_u + B_1 x_v + XD', \\ x_{vv} &= C x_u + C_1 x_v + XD'' \end{aligned}$$

hat man sogleich die gesuchten Gleichungen

I) $$\begin{aligned} &D_v - D'_u + D'(A - B_1) + D'' A_1 - DB = 0, \\ &D_u - D'_v + D'(C_1 - B) + DC - D'' B_1 = 0. \end{aligned}$$

Es ist jetzt nur noch nötig zu zeigen, daß zum Bestehen aller 6 Integrabilitätsbedingungen, von denen bei 4) nur zwei benutzt werden, nur noch eine einzige neue Gleichung erforderlich ist.

Setzt man

$$\Sigma x_u^2 = \varepsilon'^2, \quad \Sigma x_v^2 = \varepsilon''^2, \quad \Sigma x_u x_v = f,$$

so hat man die Identitäten

$$\begin{aligned}
\text{a)}\quad & x_u x_{uuv} + x_{uv} x_{uu} = (\varepsilon' \varepsilon'_u)_v, \\
& x_u x_{vuu} + x_{uv} x_{uu} = (\varepsilon' \varepsilon'_v)_u. \\
\text{b)}\quad & x_v x_{vuu} + (x_{vu})^2 = (\varepsilon'' \varepsilon''_u)_u, \\
& x_v x_{uuv} + x_{vv} x_{uu} = f_{uv} - (\varepsilon' \varepsilon'_v)_v, \\
\text{c)}\quad & x_u x_{vvu} + x_{uu} x_{vv} = f_{uv} - (\varepsilon'' \varepsilon''_u)_u, \\
& x_u x_{uvv} + (x_{uv})^2 = (\varepsilon' \varepsilon'_v)_v, \\
\text{d)}\quad & x_v x_{vvu} + x_{vu} x_{vv} = (\varepsilon'' \varepsilon''_v)_u, \\
& x_v x_{uvv} + x_{vu} x_{vv} = (\varepsilon'' \varepsilon''_u)_v.
\end{aligned}$$

in denen links die Σ Zeichen in Bezug auf x, y, z der Kürze wegen fortgelassen sind, und erhält durch Bildung der Differenzen der a), b), c), d)

$$\begin{aligned}
6)\ \text{a}_1)\quad & x_u (x_{uuv} - x_{vuu}) = 0, \qquad \text{d}_1)\ x_v (x_{vvu} - x_{uvv}) = 0. \\
\text{b}_1)\quad & x_v (x_{vuu} - x_{uuv}) + (x_{uv})^2 - x_{uu} x_{vv} = (\varepsilon'' \varepsilon''_u)_u + (\varepsilon' \varepsilon'_v)_v - f_{uv}. \\
\text{c}_1)\quad & x_u (x_{vvu} - x_{uvv}) + x_{uu} x_{vv} - (x_{uv})^2 = f_{uv} - (\varepsilon'' \varepsilon''_u)_u - (\varepsilon' \varepsilon'_v)_v.
\end{aligned}$$

und aus 4), 6) folgt jetzt, daß alle Integrabilitätsbedingungen vermöge der einzigen neuen Gleichung

$$\text{II)} \qquad x_{uu} x_{vv} - (x_{uv})^2 = f_{uv} - (\varepsilon' \varepsilon'_v)_v - (\varepsilon'' \varepsilon''_u)_u$$

erfüllt sind, aus der durch Bildung des Krümmungsmaßes sofort das Theorema egregium von Gauss folgt.

Die Gleichungen 5), die oft recht umständlich hergeleitet werden, sind übrigens völlig selbstverständlich. Denn bei gegebenem x, y, z kann man immer die Gleichungen

$$\begin{aligned}
x_{uu} &= A x_u + A_1 x_v + XD, \\
y_{uu} &= A y_u + A_1 y_v + YD, \\
z_{uu} &= A z_u + A_1 z_v + ZD,
\end{aligned}$$

falls $\varepsilon'^2 \varepsilon''^2 - f^2 \neq 0$ ist[1]), nach den A, A_1 auflösen. Bei der Multiplikation derselben mit X, Z und Y, und Addition entsteht $1 = 1$; und für die A, A_1 erhält man durch dasselbe Verfahren mit den x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v die bekannten Werte der A, A_1, endlich ebenso die der B, B_1; C, C_1. Man sieht übrigens sofort, daß die ganze nach I) folgende Betrachtung bei Voraussetzung der ersten Elemente der Flächentheorie eigentlich selbstverständlich ist.

[1]) Der besondere Fall $\varepsilon'^2 \varepsilon''^2 - f^2 = 0$ wird gewöhnlich nicht erwähnt. Ihm entsprechen nur die dem imaginären Kreise umschriebenen Developpabelen, vgl. z. B. G. Darboux, Théorie générale des surfaces I, S. 179.