

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft III.

November- und Dezembersitzung

München 1926

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags B. Oldenbourg München

Flächen mit drei ausgezeichneten Systemen geodätischer Linien, die sich zu einem Dreiecksnetz verknüpfen lassen.

Von Robert Sauer.

Mit 16 Abbildungen.

Vorgelegt von Seb. Finsterwalder in der Sitzung am 6. November 1926.

In einer Arbeit von S. Finsterwalder über „Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation“¹⁾ sind Dreiecksnetze erwähnt, welche von drei Systemen gerader Linien erzeugt werden und bei denen in jedem Knotenpunkt sechs Dreiecke zusammenreffen. Ein triviales Beispiel bildet das Netz, welches aus lauter kongruenten gleichseitigen Dreiecken besteht. Insbesondere hat S. Finsterwalder angegeben, daß aus den Durchmessern und Tangenten eines Kreises ein Dreiecksnetz der verlangten Beschaffenheit hergestellt werden kann. Diese Bemerkungen waren der Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen²⁾, welche schließlich zu der Erkenntnis führten, daß die Tangenten jeder beliebigen ebenen Kurve 3. Klasse bei passender Anordnung ein Dreiecksnetz der beschriebenen Art bilden und daß umgekehrt jedes solche Dreiecksnetz eine zerfallende oder nicht zerfallende Kurve 3. Klasse zur Umhüllenden besitzt. Bei dem Netz der kongruenten gleichseitigen Dreiecke artet die umhüllende Kurve 3. Klasse in drei unendlich ferne Punkte aus, bei dem von Kreisdurchmessern und Kreistangenten gebildeten Dreiecksnetz zerfällt sie in einen Kreis und dessen Mittelpunkt.

¹⁾ S. Finsterwalder, „Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation“, Jahresbericht der Mathematikervereinigung, 6, 1899, p. 52 und 71.

²⁾ H. Graf und R. Sauer „Über dreifache Geradensysteme in der Ebene usw.“, Sitzungsber. der bayer. Akad. der Wissensch., math.-naturw. Abtlg., 12. Juli 1924.

Nachdem bereits früher eine räumlich-geometrische¹⁾ und eine liniengeometrische²⁾ Analogie der ebenen Dreiecksnetze mitgeteilt wurden, soll in der vorliegenden Arbeit eine flächengeometrische Verallgemeinerung besprochen werden, welche wiederum auf die bereits zitierte Abhandlung von S. Finsterwalder³⁾ zurückgeht: Anstelle der das ebene Netz erzeugenden Geraden treten drei Systeme geodätischer Linien, welche durch eine entsprechende Verknüpfung wie in der Ebene auf einer krummen Oberfläche ein Dreiecksnetz mit je sechs in jedem Knotenpunkt zusammentreffenden Dreiecken hervorbringen. Diese Dreiecksnetze werde ich stets als „geodätische Dreiecksnetze“ bezeichnen; sie stellen eine Eigenschaft der die Fläche überdeckenden unausdehnbaren Haut dar, betreffen also ein von der Verbiegung der Flächen unabhängiges Problem.

Von vornherein ist zu erwarten, daß auf einer beliebigen Oberfläche ein derartiges Dreiecksnetz aus geodätischen Linien nicht gebildet werden kann. Für zwei einfache Flächengattungen jedoch lassen sich unschwer geodätische Dreiecksnetze angeben:

Auf jeder Drehfläche existieren, wie S. Finsterwalder angegeben hat, ∞^1 dreh-symmetrische geodätische Dreiecksnetze; aus Symmetriegründen lassen sich nämlich die zu einer beliebigen geodätischen Linie einer Drehfläche kongruenten und symmetrischen Kurven mit den Meridianen stets zu einem geodätischen Dreiecksnetz verknüpfen.

Weiterhin ist klar, daß die sämtlichen ebenen Dreiecksnetze durch eine Zentralprojektion vom Mittelpunkt einer Kugel aus in Netze sphärischer Dreiecke bzw. durch eine Beltramische Abbildung in geodätische Dreiecksnetze auf Flächen negativen konstanten Krümmungsmaßes verwandelt werden können.

Daß die Mannigfaltigkeit der geodätischen Dreiecksnetze mit den soeben aufgeführten besonderen Typen keineswegs erschöpft ist,

¹⁾ R. Sauer „Die Raumeinteilungen, welche durch Ebenen erzeugt werden usw.“, Sitzungsber. der bayer. Akad. der Wissensch., math.-naturw. Abtlg., 13. Juni 1925.

²⁾ H. Graf u. R. Sauer „Über besondere Geradenanordnungen im Raume usw.“, Sitzungsber. der bayer. Akad. der Wissensch., math.-naturw. Abtlg., 6. März 1926.

³⁾ S. S. 353 unten Anm. 1.

wird ohne weiteres als sehr wahrscheinlich gelten können. In der Tat hat F. Ahl¹⁾ in seiner Dissertation auf Veranlassung von P. Stäckel²⁾ nach umfangreichen Rechnungen ein geodätisches Dreiecksnetz gefunden, welches von einer Fläche nicht konstanten Krümmungsmaßes getragen wird, die nicht auf eine Drehfläche verbiegbar ist und von Ahl als spezielle Spiralfäche erkannt wurde. Ich will an dieser Stelle auf das Ahlsche Beispiel nicht näher eingehen, weil ich es später als Sonderfall der in § 3 gefundenen Flächen nochmals zu erwähnen habe.

In der vorliegenden Abhandlung wird zunächst die Mannigfaltigkeit der sämtlichen Flächen, auf denen geodätische Dreiecksnetze möglich sind, diskutiert. Das entsprechende Problem für die Flächen, auf denen aus geodätischen Linien Möbiussche Netze gebildet werden können, hat S. Finsterwalder in der schon mehrfach zitierten Abhandlung gelöst, indem er fand, daß die allgemeinsten Flächen der verlangten Art die Flächen konstanten Krümmungsmaßes sind. Ein so einheitliches Ergebnis läßt sich für das Problem der Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen nicht erwarten, da die Mannigfaltigkeit dieser Flächen eine wesentlich umfassendere ist. Infolgedessen werde ich mich im späteren Verlaufe der Betrachtungen darauf beschränken, aus der Gesamtheit der geodätischen Dreiecksnetze einzelne einfache und besonders merkwürdige, bisher noch unbekannte Typen herauszugreifen und näher zu besprechen.

§ 1.

Untersuchungen über die Existenz und die Mannigfaltigkeit der geodätischen Dreiecksnetze.

Um einen Einblick in die Mannigfaltigkeit der geodätischen Dreiecksnetze zu gewinnen, übertrage ich die Untersuchung der infinitesimalen d. h. unendlich engmaschigen geodätischen Dreiecksnetze ins Endliche dadurch, daß ich anstelle der krummen Oberflächen, welche geodätische Dreiecksnetze enthalten, gewisse polyedrische Gebilde treten lasse, welche aus lauter ebenen und geradlinig begrenzten Dreiecken zusammengesetzt sind, derart, daß

¹⁾ F. Ahl, Inaugural-Dissertation, Kiel, 1901.

²⁾ P. Stäckel, Math. Annalen 56 (1902), p. 502.

in jedem Knotenpunkt sechs Dreiecke zusammentreffen. Für diese Dreiecksgefüge kann dann eine sehr einfache geometrische Erzeugungsweise angegeben werden. Schließlich kehrt man zu dem ursprünglichen Problem dadurch zurück, daß man durch einen Grenzprozeß die polyedrischen Gebilde in geodätische Dreiecksnetze überführt. Der Gedanke, krumme Oberflächen durch polyedrische Dreiecksgefüge mit je sechs um jeden Knotenpunkt gelagerten Dreiecken näherungsweise zu ersetzen und mit Hilfe dieser Dreiecksgefüge geometrische Sätze über die betreffenden krummen Flächen zu gewinnen, stammt von S. Finsterwalder und wurde von ihm in den „Mechanischen Beziehungen bei der Flächen-deformation“ dazu benutzt, um den Satz von der Unveränderlichkeit des Gaußischen Krümmungsmaßes bei der Verbiegung in einfacher Weise anschaulich zu machen und zu beweisen.

Die erste Aufgabe ist es nun, eine charakteristische Eigenschaft der geodätischen Dreiecksnetze ausfindig zu machen, welche sich auf die entsprechenden polyedrischen Dreiecksgefüge übertragen läßt.

Zu diesem Zwecke betrachtet man irgend ein geodätisches unendlich engmaschiges Dreiecksnetz. Die Bögen der geodätischen Linien zwischen je zwei unendlich benachbarten Knotenpunkten sollen durch die Sehnen ersetzt werden. Die geodätischen Netzdreiecke gehen dadurch über in ebene Dreiecke mit geradlinigen Seiten, deren Längen klein seien von der 1. Ordnung. Die drei in einem Knotenpunkt P sich scheidenden geodätischen Linien haben die Flächennormale im Punkte P als gemeinsame Hauptnormale. Ersetzt man nun die geodätischen Bögen zwischen aufeinanderfolgenden Knotenpunkten durch ihre Sehnen, so erhält man drei in P sich schneidende Geradenpaare. Die drei die stumpfen Winkel dieser Sehnenpaare halbierenden Geraden fallen bis auf Größen 1. Ordnung mit der Flächennormale in P zusammen und die Winkel der Sehnendreiecke weichen, wie leicht einzusehen ist, von den Winkeln der geodätischen Dreiecke um kleine Beträge von der 2. Ordnung ab. Es sind demnach von den sechs in einem Knotenpunkt zusammentreffenden Winkeln der Sehnendreiecke jeweils die gegenüberliegenden Winkel paarweise einander gleich bis auf kleine Größen 2. Ordnung. Wären die netzbildenden Kurven nicht geodätische Linien, so würden

sich die gegenüberliegenden Winkel jeweils um kleine Abweichungen der 1. Ordnung unterscheiden.

Man überträgt nun das polyedrische Gefüge der infinitesimalen Sehnendreiecke ins Endliche derart, daß anstelle der von der 1. Ordnung kleinen Dreiecksseiten endliche Strecken gesetzt werden. Die von der 2. Ordnung kleinen Winkelunterschiede sollen dabei verschwindend bleiben. Man gelangt so zu polyedrischen Gefügen, bei denen in jedem Knotenpunkt sechs endliche Dreiecke zusammentreffen und welche noch die besondere Eigenschaft haben, daß stets von den sechs Dreieckswinkeln, welche einen Knotenpunkt als gemeinsamen Scheitel besitzen, jeweils die gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich sind. Die Summe der sechs in einem Knotenpunkt zusammentreffenden Winkel ist dabei gewöhnlich von 2π verschieden, die von den Knotenpunkten ausgehenden Sechskante können also im allgemeinen nicht zu einer Ebene ausgebreitet werden.

Wenn man ein polyedrisches Dreiecksgefüge der beschriebenen Art zugrunde legt und allmählich immer engermaschige Gefüge betrachtet¹⁾ derart, daß die Polygonzüge in stetige Kurven übergehen, so werden an der Grenze die polyedrischen Gebilde zu krummen Flächen, welche von geodätischen Dreiecksnetzen überdeckt sind. Ich werde nun zunächst die endlichen polyedrischen Dreiecksgefüge besprechen und hernach die Ergebnisse auf die durch einen Grenzprozeß¹⁾ entstehenden geodätischen Dreiecksnetze übertragen.

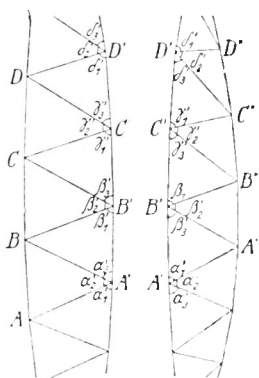
Um die allgemeinsten polyedrischen Gefüge von der verlangten Beschaffenheit zu erhalten, gebe ich eine Erzeugungsweise an, durch die sich jedes derartige polyedrische Dreiecksgefüge herstellen läßt.

Zunächst kann man einen ebenen unbegrenzten Polygonzug . . . $A B C D$. . . beliebig vorgeben (Figur 1a). Von jedem Eckpunkt . . . A, B, C, D . . . werden nach je zwei vorgegebenen Winkeln in der Ebene des Polygonzuges Strahlen gezogen, die sich paarweise in . . . A', B', C', D' . . . schneiden. Verbindet man noch die letztgenannten Schnittpunkte durch

¹⁾ Man vgl. dazu die Bemerkungen Seite 359 über den Grenzprozeß.

einen zweiten Polygonzug $\dots A' B' C' D' \dots$, so erhält man einen nach beiden Richtungen sich erstreckenden ebenen Streifen.

Mit der Annahme dieses Streifens ist dann, abgesehen von den verschiedenen Möglichkeiten der Deformation, stets ein einziges polyedrisches Gebilde der verlangten Art bestimmt. Man kann nämlich in eindeutiger Weise zu dem beispielsweise auf der rechten Seite benachbarten Streifen gelangen, indem man der Reihe nach die Strecken $\dots A' B', B' C', C' D' \dots$ und die zugehörigen Dreieckswinkel überträgt, derart, daß nach der Zusammenfügung der beiden Streifen für jeden Knotenpunkt $\dots A', B', C', D' \dots$ die gegenüberliegenden Winkel paarweise gleich werden (Figur 1a und 1b). Man sieht, daß der Polygonzug $\dots A' B' C' D' \dots$ der Figur 1a zu dem gleichnamigen Polygonzug der Figur 1b notwendigerweise symmetrisch ist.



Figur 1a.

Figur 1b.

Durch Wiederholung des nämlichen Verfahrens kann man einen Streifen nach dem anderen konstruieren und bekommt so durch Zusammenfügen der einzelnen Streifen ein unbegrenztes polyedrisches Gefüge von der gewünschten Beschaffenheit. Das zusammengesetzte Gefüge ist noch mannigfach deformierbar und wird erst dadurch starr fixiert, daß man zwei sich schneidenden Polygonzügen eine starre Gestalt im Raume zuweist.

In den entstandenen polyedrischen Gebilden sind die drei Systeme von Polygonzügen untereinander vollkommen gleichberechtigt. Jeder der drei Polygonzüge führt in analoger Weise zu einem System aufeinanderfolgender in die Ebene ausbreitbarer Streifen. So können in den Figuren 1a und 1b etwa längs der Polygonzüge $\dots C B' A'' \dots, \dots D C' B'' \dots$ usw. bzw. längs der Polygonzüge $\dots A A' A'' \dots, \dots B B' B'' \dots$ usw. analoge Streifen wie die in den Figuren dargestellten aus den einzelnen Dreiecken zusammengesetzt werden. Die Ränder je zwei benachbarter Streifen sind nach der Ausbreitung in die Ebene stets zueinander symmetrisch. Die sämtlichen abwickelbaren

Streifen der drei soeben besprochenen Streifensysteme, welche in dem Polyedergefüge enthalten sind, ergeben beim Grenzübergang zum infinitesimalen Dreiecksgefüge geodätische Streifen.

Die Erzeugungsweise der hier besprochenen Polyedergefüge kann mit Vorteil verwendet werden, um Modelle von Flächen mit geodätischen Dreiecksnetzen herzustellen. Dabei gewinnt man auch einen ungefähren Einblick in die Krümmungsverhältnisse der betreffenden Flächen: Je nachdem die aufeinanderfolgenden in die Ebene abgewickelten geodätischen Streifen beim Aneinanderlegen längs der gemeinsamen Dreiecksseiten sich überdecken oder lückenlos die Ebene ausfüllen oder zwischeneinander einen Spalt lassen, ist das Krümmungsmaß der Fläche in dem betreffenden Gebiete im allgemeinen negativ, gleich Null oder positiv.

Ich wende mich jetzt zur näheren Erörterung des Grenzübergangs von den endlichen Polyedergefügen zu den infinitesimalen geodätischen Dreiecksnetzen:

Was zunächst den Anfangsstreifen betrifft, so soll verlangt werden, daß die Verteilung der Knotenpunkte . . . A, B, C, D . . . (Figur 1a) sowie die Verteilung der diesen Knotenpunkten zugeordneten Winkel nach stetigen und differenzierbaren Gesetzen geregelt sei. Wenn man dann nach den zugrunde gelegten stetigen Gesetzen das Dreiecksgefüge des ersten Streifens immer engmaschiger annimmt, so wird dadurch ein Grenzprozeß definiert, durch welchen das polyedrische Dreiecksgefüge in ein ganz bestimmtes geodätisches Dreiecksnetz verwandelt wird. Umgekehrt ist klar, daß jedes geodätische Dreiecksnetz durch einen derartigen Grenzprozeß entstanden gedacht werden kann.

Hinsichtlich der Aneinanderreihung der einzelnen Streifen wurde bereits festgestellt, daß zwei sich schneidende Polygonzüge noch in eine willkürliche Lage und Gestalt gebracht werden können. Beim Übergang ins infinitesimale Gebiet kann man nun nach wie vor den ersten Streifen beliebig in den Raum einbetten, wobei der eine Streifenrand eine willkürliche Raumkurve bildet. Wenn diese Raumkurve nicht etwa zu einer geraden Linie ausartet, also nicht gleichseitig den Charakter einer geodätischen Linie und einer Haupttangentenkurve für die entstehende Fläche hat, so ist die Anfügung des Nachbarstreifens im Infinitesimalen

eindeutig bestimmt, während sie im Endlichen noch eine Bewegungsmöglichkeit zuläßt. Um zu einer wirklichen Fläche zu gelangen, muß man nämlich dafür Sorge tragen, daß in jedem Knotenpunkte die drei Halbierenden der stumpfen Winkel der in dem Punkte sich schneidenden Sehnenpaare bis auf eine Abweichung 1. Ordnung miteinander zusammenfallen und so die Richtung der Flächennormalen bis auf einen Fehler 1. Ordnung festlegen.

Man kann das Zusammenfallen der drei Winkelhalbierenden im Endlichen für sämtliche Knotenpunkte nicht gleichzeitig exakt erreichen, wohl aber läßt sich die Forderung stets für einen Knotenpunkt jedes Randes, an dem zwei Streifen zusammengefügt werden, verwirklichen. So lassen sich beispielsweise die in Figur 1a und 1b dargestellten Streifen so aneinander ansetzen, daß die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle B B' B''$, $\sphericalangle C B' A''$, $\sphericalangle A' B' C'$ zusammenfallen. Das Sechskant mit der Spitze B' kann dann in dreifacher Weise in zwei symmetrische Hälften zerlegt werden und ist einem Kegel 2. Ordnung einbeschrieben und einem Kegel 2. Ordnung umbeschrieben. Für die benachbarten Knotenpunkte A' , C' usw. weichen im infinitesimalen Gefüge die drei Winkelhalbierenden jeweils um eine Größe 2. Ordnung untereinander ab, die sich schließlich zu einem Werte 1. Ordnung steigert, wenn man um unendlich viele Knotenpunkte längs des gemeinsamen Randes vorwärtsght. Würde man beim Ansetzen des zweiten Streifens das Dreieck $A' B' A''$ um einen Winkel der 1. Ordnung verdrehen, so würde diese Schwenkung eine entsprechende Drehung der benachbarten Dreiecke des zweiten Streifens verursachen und, wenn man um unendlich viele Knotenpunkte längs des gemeinsamen Randes der beiden Streifen weiterrückt, schließlich zu endlichen Verdrehungen der Dreiecke führen. Es würden also „Faltungen“ eintreten und die Streifengefüge könnten keine eigentliche Fläche mehr repräsentieren. Diese Überlegungen sind im Einklang mit der Tatsache, daß eine biegsame Fläche nicht verbogen werden kann, wenn eine einzige Kurve der Fläche starr bleiben soll, vorausgesetzt, daß diese Kurve nicht Haupttangentenkurve der Fläche ist.

Es wurde erkannt, daß die polyedrischen Dreiecksgefüge der beschriebenen Art durch einen Grenzprozeß in geodätische Drei-

ecksnetze übergehen und daß auf diese Weise sich sämtliche geodätischen Dreiecksnetze ergeben. Wenn man nun die Mannigfaltigkeit der polyedrischen Dreiecksgefüge untersucht, so gewinnt man damit gleichzeitig Einblick in die Mannigfaltigkeit der geodätischen Dreiecksnetze:

Jedes geodätische Dreiecksnetz samt der dasselbe tragenden undehnbaren Haut ist durch den ersten geodätischen Streifen (Figur 1a) bestimmt. Dieser erste Streifen selbst enthält drei willkürliche Funktionen einer Veränderlichen. Die erste Funktion regelt die Verteilung der Knotenpunkte $\dots A, B, C, D \dots$ (Figur 1a), die beiden anderen Funktionen bestimmen die Winkel, welche die Richtungen $\dots A A', B B', C C' \dots$ bzw. $\dots B A', C B', D C' \dots$ mit den Polygonseiten $\dots A B, B C, C D \dots$ einschließen.

Zunächst könnte man vermuten, daß eine vierte willkürliche Funktion, welche die Gestalt des Polygonzuges $\dots A B C D \dots$ bestimmt, noch in die Überlegungen einbezogen werden müßte. Die Gestalt des Polygonzuges $\dots A B C D \dots$ hat aber, wie sich unschwer zeigen läßt, nach dem infinitesimalen Grenzprozeß keine Bedeutung mehr. Man kann vielmehr immer den ersten Polygonzug geradlinig voraussetzen, ohne dadurch die Mannigfaltigkeit der geodätischen Dreiecksnetze einzuschränken.

Ich fasse die bisherigen Ergebnisse zu folgendem Satze zusammen:

Die sämtlichen geodätischen Dreiecksnetze und die von ihnen überdeckten undehnbaren Häute haben die Mannigfaltigkeit von drei willkürlichen Funktionen einer Veränderlichen. Die eine willkürliche Funktion regelt die Aufeinanderfolge der Knotenpunkte auf einer der geodätischen Netzkurven, die beiden anderen willkürlichen Funktionen bestimmen die Winkel, unter denen diese Kurve jeweils von den zweiten und dritten geodätischen Linien des Netzes in den Knotenpunkten geschnitten wird. Nach Festsetzung dieser Anfangsbedingungen ist die undehnbare Haut samt dem geodätischen Dreiecksnetz eindeutig bestimmt.

Die gewonnenen Ergebnisse sollen nun mit der analytischen Behandlung des Problems der geodätischen Dreiecksnetze in Zusammenhang gebracht werden.

Man kann zwei Systeme der geodätischen Linien eines Netzes stets als Parameterkurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ einführen und zwar derart, daß das dritte System der geodätischen Netzkurven in der Form $u - v = \text{const.}$ erscheint. Die Frage nach den allgemeinsten geodätischen Dreiecksnetzen läuft dann darauf hinaus, die ersten Fundamentalgrößen E, F, G einer Fläche als Funktionen von u und v so zu bestimmen, daß die Beziehungen

$$u = \text{const.}, \quad v = \text{const.}, \quad u - v = \text{const.}$$

die Gleichung der geodätischen Linien befriedigen. Diese drei Bedingungen lassen sich mit Hilfe der Christoffelschen Drei-Indizes-Symbole in folgender Weise darstellen:

$$\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + 2 \left[\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \right] = 0.$$

In ausführlicher Schreibweise ergeben sich hieraus folgende drei partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung:

$$\text{I)} \quad F \frac{\partial E}{\partial u} + E \frac{\partial E}{\partial v} - 2 E \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

$$\text{II)} \quad 2 G \frac{\partial F}{\partial v} - G \frac{\partial G}{\partial u} - F \frac{\partial G}{\partial v} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad & G \frac{\partial E}{\partial u} + (3 F + 2 G) \frac{\partial E}{\partial v} - 2 F \frac{\partial F}{\partial u} + 2 F \frac{\partial F}{\partial v} \\ & - (2 E + 3 F) \frac{\partial G}{\partial u} - E \frac{\partial G}{\partial v} = 0. \end{aligned}$$

Die durch geometrische Erwägungen abgeleiteten Ergebnisse lassen sich jetzt in folgende analytische Form kleiden:

Das Lösungssystem der drei partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung, von denen das Problem der geodätischen Dreiecksnetze beherrscht wird,

enthält drei willkürliche Funktionen einer Veränderlichen; man kann nämlich fordern, daß für $v=v_0$ die drei Funktionen E, F, G drei willkürlich vorgegebenen differenzierbaren Funktionen E_0, F_0, G_0 der einen Veränderlichen u gleich werden. Als Realitätsbedingung für die sich ergebende Fläche hat man $E_0 > 0, G > 0, E_0 G_0 > F_0^2$ zu beachten. Die Funktion E_0 regelt die Verteilung der Knotenpunkte auf der geodätischen Linie $v=v_0$, die drei Funktionen E_0, F_0, G_0 zusammen bestimmen die Winkel, unter denen die geodätische Linie $v=v_0$ von den geodätischen Netzkurven $u-v=\text{const.}$ und $u=\text{const.}$ geschnitten wird.

Durch die bisher gewonnenen Ergebnisse ist einerseits erwiesen, daß auf einer beliebigen Oberfläche im allgemeinen kein geodätisches Dreiecksnetz existiert. Andererseits zeigt sich die Vermutung, daß die Mannigfaltigkeit der geodätischen Dreiecksnetze durch die in der Einleitung angegebenen Typen keineswegs erschöpft sei, bestätigt; denn nur bei sehr spezieller Wahl der zur Verfügung stehenden willkürlichen Funktionen gelangt man zu den bereits bisher bekannten geodätischen Dreiecksnetzen.

Legt man als Anfangsstreifen einen Streifen zugrunde, bei dem an jedem der beiden Ränder die anliegenden Winkel paarweise gleich sind (Figur 2), so gelangt man zu drehsymmetrischen Netzen; denn die aus dem Anfangsstreifen vermöge der auseinandergesetzten Erzeugungsweise abgeleiteten nachfolgenden Streifen werden alle der Reihe nach symmetrisch bzw. kongruent. Um Streifen von der in Figur 2 veranschaulichten Art zu erhalten, hat man im wesentlichen eine willkürliche Funktion einer Veränderlichen zur Verfügung. Dies entspricht der Tatsache, daß die Gesamtheit der auf Drehflächen verbiegbaren Häute von einer willkürlichen Funktion einer Veränderlichen abhängt.



Figur 2.

Die geodätischen Dreiecksnetze auf den Flächen konstanten Krümmungsmaßes erscheinen von vornherein gegenüber den all-

gemeinen geodätischen Dreiecksnetzen sehr beschränkt; denn sie haben nicht die Mannigfaltigkeit willkürlicher Funktionen, sondern hängen ebenso wie die ebenen Dreiecksnetze nur von einer endlichen Anzahl willkürlicher Parameter ab¹⁾. Die ebenen Dreiecksnetze erhält man, wenn man die sämtlichen Seiten der Dreiecke . . . $AB A'$, $BA' B'$, $BC B'$, $CB' C'$, $CD C'$. . . (Figur 1a) ein und dieselbe ebene Kurve 3. Klasse berühren läßt. Die in einer früheren Arbeit¹⁾ mitgeteilte lineare Konstruktion der ebenen Dreiecksnetze erscheint sonach gewissermaßen als Spezialfall der hier erörterten Erzeugungsweise der infinitesimalen geodätischen Dreiecksnetze. Auf einen wesentlichen Unterschied sei jedoch dabei aufmerksam gemacht: Die durch lineare Konstruktionen erzeugten ebenen Dreiecksnetze bestehen aus Dreiecken von endlicher Größe. Sie können durch fortgesetzte Halbierung beliebig engmaschig unterteilt und schließlich infinitesimal gedacht werden. Die hier betrachtete Erzeugungsweise der geodätischen Dreiecksnetze auf krummen Oberflächen geht den entgegengesetzten Weg; sie liefert durch den Grenzübergang zu infinitesimalen Dreiecksgefügen zunächst unendlich engmaschige geodätische Dreiecksnetze, aus denen dann nachträglich geodätische Dreiecksnetze von beliebiger endlicher Maschenreihe herausgegriffen werden können.

Die in § 1 angestellten Untersuchungen haben über die Existenz und die Mannigfaltigkeit der geodätischen Dreiecksnetze Aufschluß verschafft. In den folgenden Paragraphen will ich zwei besondere bisher unbekannte Gattungen von geodätischen Dreiecksnetzen näher betrachten. Diese Dreiecksnetze werden im Anschluß an die schon in der Einleitung zitierten drehsymmetrischen Netze gefunden werden und außerdem einen innigen Zusammenhang mit gewissen geodätischen Dreiecksnetzen auf Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes aufweisen. Es wird sich außerdem zeigen, daß die im Folgenden besprochenen Netze aus der in § 1 auseinandergesetzten Erzeugungsweise gewonnen werden, wenn man über die zur Verfügung stehenden drei willkürlichen

¹⁾ H. Graf u. R. Sauer, „Über dreifache Geradensysteme in der Ebene usw.“, Sitzungsber. der bayer. Akad. der Wiss., math.-naturw. Abtlg., 12. Juli 1924.

Funktionen für den ersten geodätischen Streifen besonders einfache Festsetzungen trifft.

§ 2.

Merkwürdige Drehflächen, welche neben den drehsymmetrischen geodätischen Dreiecksnetzen noch zwei „singuläre“ geodätische Dreiecksnetze tragen.

Es liegt nahe zu fragen, ob auf Drehflächen neben den von S. Finsterwalder angegebenen drehsymmetrischen Netzen noch andere geodätische Dreiecksnetze möglich sind. Um Netze zu erhalten, welche dem Charakter der Drehflächen angepaßt sind, sollen auch die gesuchten Dreiecksnetze aus drei Systemen kongruenter, durch Drehung auseinander hervorgehender Kurven bestehen.

Nun gibt es, wie gemeinsame Überlegungen mit Herrn H. Graf gezeigt haben, zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten, um zwei Systeme beliebiger kongruenter Kurven einer Drehfläche so miteinander zu verknüpfen, daß in dem von den zwei Systemen kongruenter Kurven gebildeten Vierecksnetz jedes System von Diagonalkurven wiederum lauter kongruente und durch Drehung ineinander überführbare Kurven umfaßt.

Es seien für die zwei zugrunde gelegten Systeme kongruenter Kurven die Parameter α und β so eingeführt, daß die einzelnen Kurven des Vierecknetzes, dessen sämtliche Diagonalkurven aus Systemen kongruenter Kurven bestehen sollen, dadurch erhalten werden, daß man α und β gleich Null oder gleich ganzzahligen positiven oder negativen Vielfachen einer konstanten beliebigen Größe ε setzt. Durch $A\alpha + B\beta = \text{const.}$, wobei A und B irgendwelche Konstanten bedeuten, wird dann stets ein System von Kurven dargestellt, welche in dem Vierecksnetz der Kurven $A\alpha = \text{const.}$ und $B\beta = \text{const.}$ als Diagonalkurven erscheinen. Die sämtlichen Kurven eines jeden solchen Systems sollen bei jeder der beiden erwähnten, im Folgenden näher besprochenen Verknüpfungsmöglichkeiten wiederum kongruent sein.

Das Problem, auf Drehflächen von den bekannten drehsymmetrischen Netzen abweichende geodätische Dreiecksnetze kongruenter Kurven zu finden, wird nun dadurch in Angriff ge-

nommen, daß man zwei Systeme kongruenter geodätischer Linien als Parametersysteme $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ einführt, also nach einer der beiden erwähnten, im Folgenden näher auseinander-gesetzten Arten so miteinander verknüpft, daß jedes System von Diagonalkurven wiederum aus kongruenten Kurven besteht. Dabei sucht man zu erreichen, daß irgendeine Diagonalkurve $A\alpha + B\beta = C$ geodätische Linie sei. Dann nämlich bilden stets die Kurven $A\alpha = \text{const.}$, $B\beta = \text{const.}$ und das System der zu der geodätischen Linie $A\alpha + B\beta = C$ kongruenten Kurven $A\alpha + B\beta = \text{const.}$ ein geodätisches Dreiecksnetz.

Ich bespreche zunächst allgemein, indem ich die Forderung, daß die netzbildenden Kurven geodätische Linien seien, fürs erste beiseite lasse, die beiden schon erwähnten Möglichkeiten, zwei Systeme kongruenter Kurven einer Drehfläche so anzuordnen, daß jedes Diagonalkurvensystem wieder von kongruenten Kurven gebildet wird:

- I. Eine erste Möglichkeit, die Forderung zu erfüllen, bieten natürlich die drehsymmetrischen Kurvennetze:

Wenn man zwei ganz beliebige Kurven C_1 und C_2 einer Drehfläche nach konstanten Drehwinkeln kongruent wiederholt, so ergibt sich stets ein Vierecksnetz, dessen sämtliche Diagonalkurven zu Systemen kongruenter und nach gleichen Drehwinkeln aufeinanderfolgender Kurven zusammengefaßt werden können.

- II. Eine zweite Möglichkeit, die vorstehende Forderung zu befriedigen, ergibt sich, wenn man die kongruenten Kurven nicht nach gleichen Drehwinkeln, sondern nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinander folgen läßt; die auf diese Weise entstehenden Kurvennetze weisen dann keine Drehsymmetrie mehr auf.

Die Radien u der Breitenkreise und die Winkel v der Meridianebenen gegen eine feste Anfangslage seien als Parameter einer Drehfläche eingeführt. Durch

$$v + f_1(u) = 0 \quad \text{. und } \quad v + f_2(u) = 0$$

sind dann zwei beliebige Kurven der Drehfläche bestimmt. Nun betrachten wir die beiden Kurvensysteme

$$1) \quad v + f_1(u) = \log^n \alpha,$$

$$2) \quad v + f_2(u) = \log^n \beta.$$

Die Logarithmenbasis n ist eine beliebige positive Zahl, α und β sind die Parameter für die beiden Kurvensysteme $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$, welche aus kongruenten und nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinander folgenden Kurven bestehen, wenn die Parameter α und β nach konstanten Intervallen sich ändern. Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich, wenn A und B willkürliche Konstante bedeuten:

$$A\alpha + B\beta = n^v (A n^{f_1(u)} + B n^{f_2(u)}).$$

Die Kurvensysteme

$$A\alpha + B\beta \equiv \gamma = \text{const.}$$

haben also die Gleichung

$$n^v (A n^{f_1(u)} + B n^{f_2(u)}) = \gamma,$$

oder nach v aufgelöst

$$v + \log^n (A n^{f_1(u)} + B n^{f_2(u)}) = \log^n \gamma;$$

d. h. die sämtlichen Kurven irgend eines durch lineare Kombination aus den Parameterkurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ gebildeten Systems

$$A\alpha + B\beta \equiv \gamma$$

bestehen aus kongruenten Kurven und folgen nach dem nämlichen Logarithmus des Drehwinkels aufeinander wie die Kurven der Parametersysteme, wenn γ , ebenso wie α und β , nach konstanten Intervallen sich ändert. Somit ergibt sich folgende Tatsache:

Sind auf einer Drehfläche zwei beliebige Kurven C_1 und C_2 vorgegeben, so bilden die sämtlichen zu C_1 und C_2 kongruenten Kurven, deren Aufeinanderfolge durch einen Logarithmus des Drehwinkels mit beliebiger Basis n geregelt wird, ein Vierecksnetz von der Art, daß die sämtlichen Diagonalkurven sich wiederum zu Systemen kongruenter Kurven zusammenfassen lassen und dabei nach einem Logarithmus mit der nämlichen Basis aufeinander folgen.

Jetzt wird angenommen, die beiden zugrunde gelegten Kurven C_1 und C_2 und somit auch die beiden Systeme der zu ihnen kongruenten Kurven seien geodätische Linien. Ich untersuche für jede der beiden auseinander gesetzten Verknüpfungsmöglichkeiten, ob sich erreichen läßt, daß außer den zu C_1 und C_2 kongruenten Kurven noch ein System kongruenter Diagonalkurven aus geodätischen Linien besteht. Die drei Systeme geodätischer Linien bilden dann ein Dreiecksnetz.

Für die erste Möglichkeit der Verknüpfung, wenn also die kongruenten Kurven jedes Systems nach konstanten Winkeln aufeinander folgen, kann man unschwer einsehen, daß nur in folgenden zwei Fällen geodätische Dreiecksnetze existieren:

1. C_1 und C_2 sind symmetrische geodätische Linien einer beliebigen Drehfläche. Die zu C_1 und C_2 kongruenten Kurven bilden mit den Meridianen ein geodätisches Dreiecksnetz. Man erhält hier also die bekannten von Finsterwalder angegebenen drehsymmetrischen Netze.
2. C_1 und C_2 sind beliebige Schraubenlinien eines Drehzylinders: Jedes Diagonalkurvensystem des Vierecksnetzes, das von den zu C_1 und C_2 kongruenten Kurven gebildet wird, besteht wiederum aus Schraubenlinien, also aus geodätischen Linien. Bei der Abwicklung des Zylinders in die Ebene ergeben die zu C_1 und C_2 kongruenten Kurven zusammen mit den Systemen der Diagonalkurven ein von Parallelstrahlenbüscheln erzeugtes Möbiussches Netz.

Während die erste Verknüpfungsmöglichkeit nur bekannte oder triviale geodätische Dreiecksnetze lieferte, werde ich bei der zweiten Möglichkeit der Verknüpfung, wenn also die kongruenten Kurven nach Logarithmen des Drehwinkels aufeinander folgen, zu neuen Typen gelangen:

Irgendeine Drehfläche sei mittels der Parameter u und v vorgegeben durch die Gleichungen:

$$x = u \cos v,$$

$$y = u \sin v,$$

$$z = f(u).$$

Daraus findet man das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = (1 + f'^2(u)) du^2 + u^2 dv^2.$$

Setzt man $1 + f'^2(u) = \varphi^2(u)$, also $f(u) = \int \sqrt{\varphi^2(u) - 1} du$,
so kommt

$$ds^2 = \varphi^2(u) du^2 + u^2 dv^2.$$

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien hat die allgemeine Lösung

$$v = k_1 \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - k_1^2}} + k_2,$$

wobei k_1 und k_2 zwei voneinander unabhängige Integrationskonstanten sind.

Ein System kongruenter geodätischer Linien, welche nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinander folgen, läßt sich mittels des Parameters p und der beliebigen Konstanten k darstellen durch die Beziehung

$$v + k \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - k^2}} = \log p.$$

Es seien nun drei derartige Kurvensysteme vorgegeben:

$$v + a \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = \log a,$$

$$v + b \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - b^2}} = \log \beta,$$

$$v + c \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - c^2}} = \log \gamma.$$

a, b, c, n sind beliebige Konstanten.

Es wird gefordert, daß die drei geodätischen Systeme ein Dreiecksnetz bilden. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß a, β und γ durch eine lineare Kombination verbunden werden können

$$Aa + B\beta + C\gamma = 0.$$

A, B, C bedeuten lediglich additive Konstanten für die Winkel v . Es wird sich zeigen, daß sie aus den folgenden Rechnungen alsbald herausfallen.

Durch Einsetzen der Ausdrücke für α , β , γ kommt

$$A n^a \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} + B n^b \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - b^2}} + C n^c \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - c^2}} = 0.$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$A n^a \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - a^2}} = X, \quad B n^b \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - b^2}} = Y, \quad C n^c \int \frac{\varphi(u) du}{u \sqrt{u^2 - c^2}} = Z,$$

so erhält man, wenn man zweimal nach u differenziert, drei in X , Y , Z homogene lineare Gleichungen:

$$X + Y + Z = 0,$$

$$\frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}} X + \frac{b}{\sqrt{u^2 - b^2}} Y + \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} Z = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{a}{u^2 - a^2} \left[\frac{(a \ln n) \varphi(u)}{u} - \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}} \right] X + \frac{b}{u^2 - b^2} \left[\frac{(b \ln n) \varphi(u)}{u} - \frac{u}{\sqrt{u^2 - b^2}} \right] Y \\ + \frac{c}{u^2 - c^2} \left[\frac{(c \ln n) \varphi(u)}{u} - \frac{u}{\sqrt{u^2 - c^2}} \right] Z = 0. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen können, ohne daß gleichzeitig X , Y , Z verschwinden, dann und nur dann nebeneinander bestehen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}} & \frac{b}{\sqrt{u^2 - b^2}} & \frac{c}{\sqrt{u^2 - c^2}} \\ \frac{(a \ln n) \varphi(u)}{u(u^2 - a^2)} - \frac{a u}{(u^2 - a^2)^{3/2}} & \frac{(b \ln n) \varphi(u)}{u(u^2 - b^2)} - \frac{b u}{(u^2 - b^2)^{3/2}} & \frac{(c \ln n) \varphi(u)}{u(u^2 - c^2)} - \frac{c u}{(u^2 - c^2)^{3/2}} \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Durch Ausrechnen der Determinante folgt:

$$\ln n \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)(u^2 - c^2)}} \cdot \begin{vmatrix} (u^2 - a^2)^{3/2} & (u^2 - b^2)^{3/2} & (u^2 - c^2)^{3/2} \\ a(u^2 - a^2) & b(u^2 - b^2) & c(u^2 - c^2) \\ a^3 & b^3 & c^3 \\ u^2 - a^2 & u^2 - b^2 & u^2 - c^2 \\ a\sqrt{u^2 - a^2} & b\sqrt{u^2 - b^2} & c\sqrt{u^2 - c^2} \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}.$$

Wenn also eine Drehfläche ein Dreiecksnetz der verlangten Art enthalten soll, so muß $\varphi(u)$ dem berechneten Ausdruck gleich sein. Umgekehrt überzeugt man sich leicht, daß stets, wenn $\varphi(u)$

gleich dem gefundenen Ausdruck gesetzt ist, die zugehörigen Drehflächen ein geodätisches Dreiecksnetz der gewünschten Beschaffenheit tragen.

Die Funktion $\varphi(u)$ enthält die vier Konstanten $\ln n, a, b, c$. Dabei kommt es jedoch nur auf die Verhältnisse dieser vier Zahlen an; geht man nämlich von einer bestimmten Drehfläche zu einer Biegungsdrehfläche vermöge der Substitutionen

$$u = v u', \quad v = \frac{1}{v'} v'$$

über, so ergibt sich für das Quadrat des Linienelements

$$ds^2 = v^2 \varphi^2(v u') du'^2 + u'^2 dv'^2.$$

Setzt man $v^2 \varphi^2(v u') = \bar{\varphi}^2(u')$, so erscheinen dabei, wie man sich leicht überzeugt, $a, b, c, \ln n$ um den gemeinsamen Faktor $\frac{1}{v}$ geändert. So entspricht also einer homogenen Änderung der vier Konstanten lediglich der Übergang einer Drehfläche zu einer Biegungsdrehfläche, das geodätische Dreiecksnetz und die von ihm überdeckte undeformbare Haut bleiben dieselben.

Im Folgenden ist es zweckmäßig, statt der Logarithmen mit der Basis n , welche die Aufeinanderfolge der einzelnen Winkel v bestimmen und für jede Biegungsfläche verschieden sind, die Logarithmen zu betrachten, welche die Aufeinanderfolge der den v -Winkeln zugehörigen Punkte auf dem Breitenkreis $u = a$ regeln. Diese Logarithmen berechnen sich als

$$a \log p = \log p \sqrt[n]{a}$$

und sind für alle Biegungsflächen die nämlichen. Ich werde daher in den weiteren Betrachtungen neben a, b, c als vierte Konstante $\mu = \sqrt[n]{a}$ zugrunde legen.

Variiert man μ unter Festhaltung der Verhältnisse $a:b:c$, so bekommt man, wie unschwer einzusehen ist, die zu den ursprünglichen Flächen bzw. deren Biegungsdrehflächen ähnlichen Flächen. Wenn man also die zu jeder Fläche gehörenden ∞^2 Biegungsdrehflächen und ähnlichen Flächen ausscheidet, so behält man schließlich eine Mannigfaltigkeit von zwei Parametern; denn als wesentliche Konstanten bleiben lediglich die beiden Verhältnisse $a:b:c$. Man kann somit folgendes Ergebnis aussprechen:

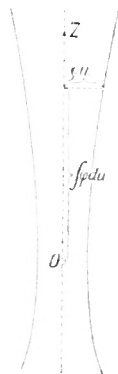
Abgesehen von Biegung und Ähnlichkeit gibt es ∞^2 Drehflächen, auf denen neben den bekannten dreh-symmetrischen geodätischen Dreiecksnetzen noch gewisse „singuläre“ geodätische Dreiecksnetze existieren. Sie werden von drei Systemen kongruenter, nach Logarithmen des Drehwinkels aufeinander folgender Kurven erzeugt, sind also nicht dreh-symmetrisch angeordnet.

Wir wenden uns jetzt zur Diskussion der gefundenen Drehflächen:

Es sei $|a| > |b| > |c|$. Dann ist die Funktion $\varphi(u)$ reell für $u \geq |a|$. Die Drehflächen sind demnach imaginär, so lange $u < |a|$ bleibt. Sie haben, da $\varphi(a) = \infty$ wird, den Breitenkreis $u = a$ zum Äquator¹⁾, alle übrigen reellen Breitenkreise besitzen Radien größer als a . Weil $\varphi(u)$ mit wachsendem u ständig abnimmt, hat der Meridian keinen Wendepunkt. Die Drehflächen sind also hyperbolisch gekrümmt.

Die imaginären Breitenkreise $u = b$ und $u = c$ haben ebenso wie der reelle Breitenkreis $u = a$ die Bedeutung von Äquator-kreisen, da die Funktion $\varphi(u)$ ebenso wie für $u = a$ auch für $u = b$ und $u = c$ nach ∞ strebt.

Um über die Gestalt der Drehflächen weitere Aufschlüsse zu gewinnen, untersucht man das Verhalten der Funktion $\varphi(u)$, wenn $u \rightarrow \infty$ geht. Je nachdem nämlich $\varphi(u)$ sich einem von Null verschiedenen Wert nähert oder schließlich der Null als Grenze zustrebt, treten zwei wesentlich verschiedene Fälle ein. Die Verhältnisse werden anschaulich gemacht, wenn man die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Meridianen liegenden abwickelbaren Streifen betrachtet. In Figur 3 ist ein Streifen dieser Art schematisch dargestellt: Auf einer Z -Achse denkt man sich die Werte $\int \varphi(u) du$, senkrecht dazu nach beiden Seiten die Längen ϱu aufgetragen. ϱ bedeutet einen willkürlichen Proportionalitätsfaktor, den man schließlich beim Grenzübergang zu unendlich schmalen



Figur 3

¹⁾ Als „Äquator“ bezeichne ich der Kürze halber diejenigen Breitenkreise, welche geodätische Linien sind.

Streifen unendlich klein annehmen muß. Durch Zusammenfügen beliebig vieler kongruenter Streifen der besprochenen Art kann man drehsymmetrische Gebilde bzw. an der Grenze Drehflächen herstellen. Indem man die Streifenzahl variiert, gelangt man zu den ∞^1 Biegungsdrehflächen.

Die beiden Hauptfälle $\varphi(\infty) \neq 0$, $\varphi(\infty) = 0$ haben nun für die angegebenen Streifen eine anschauliche Bedeutung:

Je nachdem nämlich $\varphi(\infty) \neq 0$ oder $\varphi(\infty) = 0$ zugrunde gelegt wird, schließt die Tangente des Streifenrandes, wenn man sich von O entfernt, mit der Z -Achse an der Grenze einen von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel ein oder sie nähert sich schließlich der zur Z -Achse senkrechten Richtung. Im ersteren Falle gibt es neben unendlich vielen Biegungsdrehflächen mit Rückkehrkanten stets unendlich viele Biegungsdrehflächen, welche die erzeugenden Streifen ihrer ganzen Ausdehnung nach enthalten und sich entweder mit einem asymptotischen Kegel, wie z. B. das Drehhyperboloid, oder ohne einen asymptotischen Kegel, wie z. B. das Drehparaboloid oder das Katenoid, ins Unendliche erstrecken. Im letzteren Falle dagegen sind Biegungsdrehflächen, welche ins Unendliche verlaufen, ausgeschlossen; es ist nicht möglich, die Streifen in ihrem ganzen Verlaufe längs der Z -Richtung zu einer Drehfläche zusammenzufügen, sondern jede hierher gehörige Drehfläche hat zwei Breitenkreise als Rückkehrkanten.

Der zweite Fall liegt bei den hier behandelten Drehflächen vor, wie man sich durch Berechnung von $\varphi(\infty)$ überzeugt. Die Drehflächen mit singulären geodätischen Dreiecksnetzen werden also stets von zwei Breitenkreisen als Rückkehrkanten abgegrenzt.

Die zu beiden Seiten des reellen Äquators liegenden Teile der Drehflächen sind im allgemeinen nicht zueinander symmetrisch; denn beim Überschreiten des Äquators $u = a$ ändern die Wurzeln $\sqrt{u^2 - b^2}$ und $\sqrt{u^2 - c^2}$ ihr Vorzeichen nicht, dagegen geht die Wurzel $\sqrt{u^2 - a^2}$ durch Null vom Positiven ins Negative oder umgekehrt.

Weiterhin seien nun die von den Kurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, $\gamma = \text{const.}$ erzeugten geodätischen Dreiecksnetze auf den hier gewonnenen Drehflächen betrachtet:

Zu dem Äquator jeder hyperbolisch gekrümmten Drehfläche gibt es, wie aus dem Clairautschen Satz folgt, zwei hinsichtlich der Meridiane symmetrische Systeme kongruenter geodätischer Linien, welche sich an den Äquator mittels unendlich vieler Umgänge asymptotisch anschmiegen und als ausgearteten Fall den Äquator selbst unter ihrer Mannigfaltigkeit enthalten. Die hier gefundenen Drehflächen haben nun einen reellen und zwei imaginäre Äquatorkreise¹⁾ und aus den Gleichungen für die drei Systeme netzbildender geodätischer Linien (vgl. Seite 369) ergibt sich unmittelbar folgende Tatsache:

Drei von den sechs paarweise symmetrischen Systemen geodätischer Linien, welche die drei Äquatorkreise asymptotisch umhüllen¹⁾, sind gerade diejenigen Kurvensysteme, welche die „singulären“ geodätischen Dreiecksnetze bilden.

Auf diese Weise erscheinen die geodätischen Dreiecksnetze dem Charakter der von ihnen überdeckten Drehflächen vollkommen angepaßt: Die drei Systeme der netzbildenden geodätischen Linien sind gegenüber den übrigen geodätischen Linien der betreffenden Drehflächen deutlich ausgezeichnet; freilich ist nur für den reellen Äquator die asymptotische Umhüllung der Anschauung zugänglich.

Aus Symmetriegründen ist klar, daß jede der hier betrachteten Drehflächen zwei hinsichtlich der Meridiane symmetrische geodätische Dreiecksnetze enthält: Ebenso wie die den Konstanten a, b, c entsprechenden Systeme geodätischer Linien ein Dreiecksnetz bilden, entspricht den Konstanten $-a, -b, -c$, welche zur nämlichen Funktion $q(u)$ führen, ein zweites und zwar zum ersten hinsichtlich der Meridiane symmetrisches Dreiecksnetz. Weitere „singuläre“ geodätische Dreiecksnetze sind dagegen im allgemeinen auf den betrachteten Drehflächen nicht möglich.

Die zur Rede stehenden singulären Dreiecksnetze kann man mit der in § 1 auseinandergesetzten Erzeugungsweise in einen einfachen Zusammenhang bringen:

Die Verhältnisse der drei Konstanten a, b, c bestimmen umkehrbar eindeutig die beiden konstanten Winkel ψ und χ , nach

¹⁾ Den Äquatorkreisen entsprechen die Parameter $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$.

denen der Äquator $u = a$ von den übrigen netzerzeugenden Kurven geschnitten wird. Es ist

$$\cotg \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \cotg \chi = \frac{c}{\sqrt{a^2 - c^2}},$$

oder

$$\cos \psi = \frac{b}{a}, \quad \cos \chi = \frac{c}{a}.$$

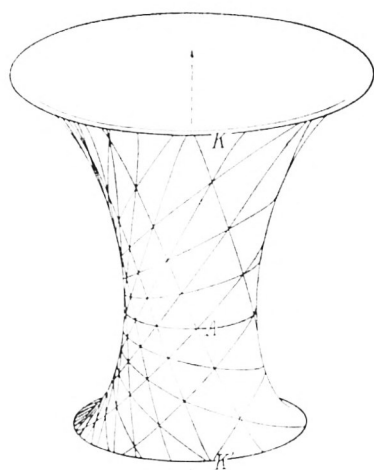
Bedenkt man noch, daß die Verteilung der Netzknotenpunkte auf dem Äquator $u = a$ durch einen Logarithmus dargestellt wird, so gelangt man zu folgendem Ergebnis:

Wenn man für die in § 1 angegebene Erzeugungsweise die Aufeinanderfolge der Knotenpunkte der ersten geodätischen Linie durch einen Logarithmus bestimmt und den diesen Knotenpunkten zugeordneten Winkeln zwei konstante Werte ψ , χ erteilt, so sind die sich ergebenden Netze mit den in diesem Paragraphen betrachteten „singulären“ Netzen auf Drehflächen identisch.

Die erste geodätische Linie, welche der Erzeugungsweise zugrunde gelegt wird, liefert den reellen Äquator der Drehfläche. Eine ähnliche Vergrößerung oder Verkleinerung des ersten Streifens entspricht einer Änderung der Basis des Logarithmensystems, von dem die Reihe der Knotenpunkte auf der ersten geodätischen Linie abhängt. Man sieht von neuem, wie die Gesamtheit der hierher gehörigen Drehflächen, abgesehen von Biegung und Ähnlichkeit, von zwei Parametern bestimmt ist, und zwar erscheinen die beiden Parameter hier in der Form der zwei konstanten Winkel, unter denen die der Erzeugung zugrunde gelegte erste geodätische Linie von den übrigen geodätischen Linien des Netzes geschnitten wird.

Eine Drehfläche der hier behandelten Art samt darauf liegendem geodätischen Dreiecksnetz zeigt die schematische Figur 4. Fläche und Netz sind, entsprechend den vorangehenden Ausführungen, in Bezug auf den Äquator A unsymmetrisch. Die beiden Breitenkreise K und K' , welche als Rückkehrkanten die Drehfläche abschließen, schneiden das geodätische Dreiecksnetz ab,

ohne sich dabei seinem Verlaufe anzupassen. In dieser Hinsicht erscheint die Form der Drehflächen den „singulären“ Netzen nicht so weitgehend angemessen wie den drehsymmetrischen geodätischen Dreiecksnetzen.



Figur 4.

Das Netz ist nach beiden Richtungen des Äquators hin unbegrenzt fortsetzbar und überdeckt die Drehfläche dabei unendlich vielfach. Nach der einen Seite hin werden die Netzdreiecke unendlich weit und erreichen das Unendliche nach einer endlichen Anzahl von Knotenpunkten, nach der anderen Seite hin häufen sich die Netzdreiecke gegen das Unendliche und werden immer kleiner.

Bemerkenswert ist auch der Grundriß des Dreiecksnetzes auf die Äquatorebene. Er stellt nämlich ein ebenes Dreiecksnetz dar, welches

aus drei Systemen jeweils kongruenter und durch Drehung um ein gemeinsames Zentrum auseinander hervorgehender Kurven besteht und trotzdem nicht drehsymmetrisch ist; die kongruenten Kurven folgen nicht in gleichen Winkeln, sondern nach einer logarithmischen Skala aufeinander.

Nach Untersuchung des allgemeinen Falles seien noch zwei Spezialisierungen betrachtet:

- I. Setzt man $c = 0$, so wird das eine System der netzerzeugenden geodätischen Linien zu Meridianen.

Für die Funktion $\varphi(u)$ erhält man durch Einsetzen von $c = 0$ den einfacheren Ausdruck

$$\ln n \varphi(u) = \frac{u^2 (a^2 - b^2)}{(a \sqrt{u^2 - b^2} - b \sqrt{u^2 - a^2}) \sqrt{(u^2 - a^2)(u^2 - b^2)}}.$$

Die zugehörigen Drehflächen und Dreiecksnetze weisen gegenüber dem allgemeinen Falle keine augenfällige Besonderheit auf. Insbesondere sind auch die durch $c = 0$

spezialisierten Flächen in Bezug auf den Äquator unsymmetrisch.

- II. Etwas wesentlich Neues ergibt sich, wenn man von den drei Konstanten a, b, c zwei einander bis auf das Vorzeichen gleichsetzt, wenn man also annimmt, daß von den drei Systemen netzbildender Kurven zwei Systeme zueinander symmetrisch sind.

Für $b = -c$, wobei $|b| < |a|$ oder $|b| > |a|$ sein mag¹⁾, erhält man für die Funktion $\varphi(u)$ nach kurzen Umrechnungen

$$\ln n \varphi(u) = \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}.$$

Die Gleichung des Meridians der Drehfläche lautet dann

$$z = f(u) = \int \sqrt{\varphi^2(u) - 1} du = \int \sqrt{\frac{a^2 \left(1 + \left(\frac{1}{\ln n}\right)^2\right) - u^2}{u^2 - a^2}} du.$$

Um das Krümmungsmaß K der Fläche zu berechnen, wird in dem Ausdruck

$$K = - \frac{1}{\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right) \right]$$

für $\sqrt{E} = \varphi(u) = \frac{a}{\ln n \sqrt{u^2 - a^2}}$ und für $\sqrt{G} = u$ gesetzt.

Man erhält dann

$$K = - \left(\frac{\ln n}{a} \right)^2.$$

Demnach gehen für $b = -c$ die allgemeinen in diesem Paragraphen besprochenen Drehflächen in Drehflächen konstanten negativen Krümmungsmaßes über und es ist leicht einzusehen, wie dabei die in Figur 4 schematisch dargestellte Flächenform in den hyperbolischen Typus der pseudosphärischen Flächen ausartet.

So hat man folgendes Ergebnis:

Wenn man zwei der netzerzeugenden Systeme von geodätischen Linien hinsichtlich der Meridiane symmetrisch annimmt, so erhält man statt der all-

¹⁾ $|b| = |a|$ hat keinen Sinn, weil hierbei zwei von den netzerzeugenden Systemen geodätischer Linien miteinander identisch werden.

gemeinen bisher von uns untersuchten, hinsichtlich des Äquators unsymmetrischen Drehflächen gewisse hinsichtlich des Äquators symmetrische Flächen, nämlich die pseudosphärischen Drehflächen vom hyperbolischen Typus.

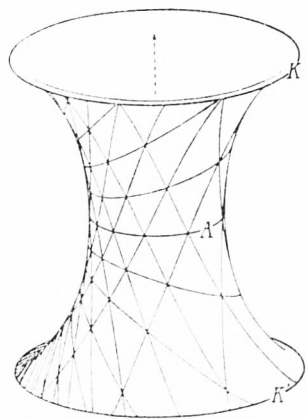
Die auf pseudosphärischen Flächen liegenden geodätischen Dreiecksnetze, die man für $b = -c$ erhält, müssen notwendigerweise durch die Beltramische Abbildung in ein ebenes Dreiecksnetz übergeführt werden können. In der Tat lassen sie sich in die schon in der Einleitung erwähnten ebenen Dreiecksnetze abbilden, welche von den Tangenten und Durchmessern eines Kreises erzeugt werden. Eine analoge Übertragung der ebenen Dreiecksnetze auf Flächen konstanten positiven Krümmungsmaßes ist in reeller Weise nicht möglich.

Ein wesentlicher Unterschied der allgemeinen in diesem Paragraphen behandelten geodätischen Dreiecksnetze gegenüber den speziellen Netzen auf pseudosphärischen Flächen besteht darin, daß jede der allgemeinen in diesem Paragraphen betrachteten Drehflächen jeweils nur zwei zueinander symmetrische „singuläre“ Netze trägt, während jede pseudosphärische Ausartung ∞^1 „singuläre“ geodätische Dreiecksnetze aus kongruenten geodätischen Linien enthält. Der Grund liegt darin, daß für $b = -c$ aus der Funktion $\varphi(u)$ die Konstanten b und c herausfallen. Man kann deshalb zu jedem vorgegebenen a und $\ln n$ für $b = -c$ noch irgend einen Wert annehmen. Jedem dieser Werte entspricht dann ein singuläres Dreiecksnetz. Die beiden die zueinander symmetrischen Systeme geodätischer Netzkurven umhüllenden Breitenkreise $u = b$, in welche das Paar der imaginären Äquatorkreise des allgemeinen Falles ausgeartet erscheint, haben eine von Null verschiedene geodätische Krümmung. Die Berührung dieser Breitenkreise durch die geodätischen Linien ist daher nicht mehr asymptotisch. Die zwei zueinander symmetrischen Systeme der netzbildenden geodätischen Linien sind ihre gegenseitigen Fortsetzungen über die berührenden Breitenkreise hinaus. Das dritte System der netzbildenden geodätischen Linien umhüllt auch im pseudosphärischen Falle den Äquator $u = a$ asymptotisch.

Für $|b| = |c| < |a|$ und $|b| = |c| > |a|$ ergeben sich zwei verschiedene Netztypen:

Bei $|b| = |c| < |a|$, wenn also das die beiden symmetrischen Kurvensysteme umhüllende Paar der Breitenkreise $u = b$ imaginär ist, erhält man ein Gebilde, das sich von dem in Figur 4 dargestellten Falle im wesentlichen nur durch die Symmetrie hinsichtlich des Äquatorkreises unterscheidet. Ein Beispiel gibt die schematische Figur 5. Die Bezeichnungen sind die gleichen wie in Figur 4.

Bei $|b| = |c| > |a|$, wenn also das die beiden symmetrischen Systeme der netzbildenden geodätischen Linien umhüllende Paar der Breitenkreise $u = b$ reell ist, erhält man ein für die Anschauung von den vorangehenden Netzen wesentlich verschiedenes Dreiecksnetz. In der schematischen Figur 6 ist ein Netz dieser Art gezeichnet. K, K', A haben wieder die nämliche Bedeutung wie in den vorangehenden Figuren; B und B' bezeichnen die beiden umhüllenden Kreise $u = b$. Man sieht, wie die beiden zueinander symmetrischen Systeme geodätischer Linien in den Berührungspunkten der Breitenkreise B und B' , welche zugleich Netzknotenpunkte sind, ineinander übergehen und ihre gegenseitigen Fortsetzungen bilden. Das dritte System der netzbildenden geodätischen Linien, welches den Äquator umhüllt, ist in der Figur über die Kreise B und B' hinaus fortgesetzt.

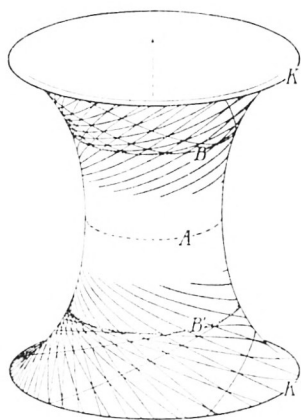


Figur 5.

Das Netz besteht aus zwei zum Äquator symmetrischen, voneinander getrennten Teilen. Jede dieser beiden Netzzonen wird von einer Rückkehrkante und von einem der beiden Breitenkreise B und B' abgegrenzt. Die Rückkehrkanten schneiden das Dreiecksnetz ab, ohne sich seinem Verlauf anzupassen. Die beiden Breitenkreise B, B' dagegen sind Diagonalkurven des Dreiecksnetzes.

In den Figuren 4, 5 und 6 ist von den betreffenden Drehflächen jeweils nur ein Teil dargestellt, den man, um die gesamte Fläche zu erhalten, in Richtung der Drehachse periodisch wieder-

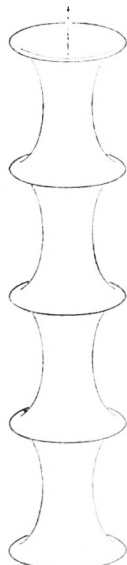
holen muß. Dabei haben zwei aufeinanderfolgende Teile immer eine Rückkehrkante gemeinsam, wie aus den schematischen Figuren 7 und 8 ersichtlich ist. Figur 7 bezieht sich auf den



Figur 6.



Figur 7.



Figur 8.

allgemeinen, Figur 8 auf den pseudosphärischen Fall der in diesem Paragraphen untersuchten Drehflächen.

Die in dem vorliegenden Paragraphen besprochenen geodätischen Dreiecksnetze lassen noch eine merkwürdige Verallgemeinerung zu, bei der anstelle der Drehflächen Flächen allgemeinerer Art treten. Darüber soll im folgenden Paragraphen berichtet werden.

§ 3.

Die Spiralfächen, auf denen geodätische Dreiecksnetze existieren.

Durch Drehung irgend einer Kurve um eine mit ihr starr verbundene Achse entstehen die Drehflächen. Wenn man nun die erzeugende Kurve proportional der Drehung einer Ähnlichkeits-transformation hinsichtlich eines festen Punktes auf der Drehachse unterwirft, so ergeben sich allgemeinere Flächen, welche

nach Lie als Spiralfächen¹⁾ bezeichnet werden. Für zahlreiche geometrische Probleme weisen die Spiralfächen eine weitgehende Analogie auf mit den Drehflächen, welche offenbar als ein besonderer Fall unter der Gesamtheit der Spiralfächen enthalten sind. Es wird sich herausstellen, daß auch die Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen über geodätische Dreiecksnetze der Drehflächen eine sinngemäße Verallgemeinerung auf Spiralfächen zulassen.

Die Kurve C_0 , welche durch Drehung um die Z -Achse und gleichzeitige Ähnlichkeitstransformation in Bezug auf den Anfangspunkt O eines rechtwinkligen Koordinatensystems eine Spiralfäche erzeugen soll, sei mittels der Funktionen r_0 , z_0 und ω_0 des Parameters u gegeben durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned}x &= r_0(u) \cos \omega_0(u), \\y &= r_0(u) \sin \omega_0(u), \\z &= z_0(u).\end{aligned}$$

Sei k die konstante Winkelgeschwindigkeit der Drehung, h der konstante Modul der Ähnlichkeitstransformation, so ergeben sich als Koordinaten der Spiralfäche, dargestellt durch die Parameter u und v :

$$\begin{aligned}(I) \quad x &= e^{hv} r_0(u) \cos(\omega_0(u) + kv)^1), \\y &= e^{hv} r_0(u) \sin(\omega_0(u) + kv), \\z &= e^{hv} z_0(u).\end{aligned}$$

Für $h = 0$ artet die Spiralfäche in eine Drehfläche aus.

Die Kurven $v = \text{const.}$ sind die der Erzeugung der Spiralfäche zugrunde gelegten zu C_0 ähnlichen Kurven; die Kurven $u = \text{const.}$, welche den Breitenkreisen der Drehflächen entsprechen, sind Kegelloxodromen auf Drehkegeln mit dem Ähnlichkeitszentrum O als Spitze. Die Grundrisse der Kurven $u = \text{const.}$ in einer zur Z -Achse senkrechten Ebene sind kongruente logarithmische Spiralen. Auf den Zylindern über diesen logarithmischen Spiralen erscheinen die Kurven $u = \text{const.}$ als geodätische Linien, d. h. als Schraubenlinien.

¹⁾ Darboux, Théorie des surfaces, Paris 1894, I, p. 108; Lévy, Paris, C. R. 87 (1878), p. 288; Lie-Scheffers, Geometrie der Berührungstranf., Leipzig 1896, p. 162.

Ist $f(u)$ irgend eine willkürliche Funktion von u , so bilden die Kurven $v + f(u) = \text{const.}$ stets ein System ähnlicher Kurven. Die der Erzeugung der Spiralfäche zugrunde gelegten zu C_0 ähnlichen Kurven sind also auf der Spiralfäche keineswegs ausgezeichnet, sondern man kann, abgesehen von den Kegelloxodromen, eine ganz beliebige Kurve C auf der Spiralfäche betrachten und durch gleichzeitige Drehung und Ähnlichkeitstransformation dieser Kurve C die Spiralfäche entstanden denken.

In entsprechender Weise wie zu jeder Drehfläche ∞^1 Biegungsdrehflächen und ∞^2 Biegungsschraubenflächen gehören, läßt sich jede Spiralfäche in ∞^2 Biegungsspiralflächen verbiegen. Man kann irgend eine Kurve $u = u_0$ der vorgegebenen Spiralfäche mit jeder beliebigen Kegelloxodrome, welche im Raum irgendwie vorgegeben ist, zur Deckung bringen; dadurch ist dann stets eine Biegungsspiralfäche bestimmt.

Die gesamten in § 2 durchgeführten Betrachtungen über Drehflächen werden nun in der Weise auf Spiralfächen übertragen, daß die Systeme kongruenter Kurven durch ähnliche Kurven ersetzt werden.

Zunächst erkennt man, daß es in völliger Analogie zu den vorhergehenden auf Drehflächen bezüglichen Untersuchungen auf den Spiralfächen zwei wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt, um zwei Systeme ähnlicher, durch Drehung auseinander hervorgehender beliebiger Kurven so zu verknüpfen, daß jedes System von Diagonalkurven wiederum aus lauter ähnlichen Kurven besteht. Dabei ist wiederum fürs erste die Forderung, daß die betrachteten Kurven geodätische Linien seien, beiseite gelassen.

- I. Die erste Möglichkeit der Verknüpfung besteht darin, daß man zwei beliebige Kurven C_1 und C_2 auf einer Spiralfäche nach konstanten Intervallen des Drehwinkels v in entsprechender Vergrößerung bzw. Verkleinerung wiederholt.

Hat nämlich C_1 die Gleichung

$$v + f_1(u) = 0$$

und C_2 die Gleichung

$$v + f_2(u) = 0,$$

so läßt sich das Vierecksnetz der zu C_1 und C_2 ähnlichen

und in konstanten Intervallen des Drehwinkels aufeinander folgenden Kurven $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ darstellen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} v + f_1(u) &= \alpha, \\ v + f_2(u) &= \beta. \end{aligned}$$

Jedes System $A\alpha + B\beta \equiv \gamma = \text{const.}$, wobei A und B willkürliche Konstante bedeuten, hat dann die Gleichung

$$v + \frac{1}{A+B} (Af_1(u) + Bf_2(u)) = \frac{\gamma}{A+B}.$$

Also wird in der Tat jedes Diagonalkurvensystem $\gamma = \text{const.}$ von ähnlichen Kurven gebildet, die um konstante Winkel gegeneinander verdreht sind. Einen besonderen Fall erhält man für $A + B = 0$. Unter dieser Annahme ergeben sich die auf der Spiralfäche liegenden Kegelloxodromen, welche zwar kein System ähnlicher Kurven darstellen, von denen aber jede einzelne Kurve in sich durch Ähnlichkeitstransformation verschoben werden kann.

Die hier betrachteten Netze aus ähnlichen Kurven bilden die naturgemäße Verallgemeinerung der drehsymmetrischen Netze auf Drehflächen. Während nun aber die drehsymmetrischen Netze auf Drehflächen für jede beliebige Drehfläche ∞^1 drehsymmetrische geodätische Dreiecksnetze mit sich bringen (vgl. Seite 368), gibt es analoge geodätische Dreiecksnetze auf beliebigen Spiralfächen nicht, weil zu dem ausgezeichneten geodätischen System der Meridiane der Drehflächen kein passendes Analogon auf den Spiralfächen existiert.

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhange der triviale Fall, in dem die Spiralfäche in einen Zylinder mit einer logarithmischen Spirale als Basis ausartet. Betrachtet man irgendwelche zwei geodätische Linien auf dem Zylinder, so bilden die zu diesen beiden Linien ähnlichen und nach konstanten Drehwinkel aufeinander folgenden Kurven mit dem System der Kegelloxodromen ein geodätisches Dreiecksnetz. Bei Abwicklung des Zylinders in die Ebene geht aus dem geodätischen Dreiecksnetz ein ebenes Dreiecksnetz hervor, dessen Umhüllende in

drei nicht in gerader Linie liegende Punkte ausartet¹⁾. Die beiden Systeme ähnlicher geodätischer Linien ergeben nämlich bei der Abwicklung in die Ebene zwei Parallelstrahlenbüschel, das System der Kegelloxodromen wird zu einem Geradenbüschel, dessen Scheitel im Endlichen liegt.

- II. Eine zweite Möglichkeit der Verknüpfung bietet sich, wenn man zwei Kurven C_1 und C_2 , welche wieder durch die Gleichungen

$$v + f_1(u) = 0 \text{ und } v + f_2(u) = 0$$

dargestellt seien, nicht nach konstanten, sondern nach logarithmisch sich ändernden Winkeln bei entsprechender ähnlicher Deformation aufeinanderfolgend wiederholt. Auf diese Weise ergeben sich zwei Systeme $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ ähnlicher Kurven:

$$v + f_1(u) = \log^n \alpha \text{ und } v + f_2(u) = \log^n \beta.$$

Analog wie auf Seite 367 folgt, daß auch jedes System

$$A\alpha + B\beta \equiv \gamma = \text{const.},$$

also jedes System von Diagonalkurven aus lauter ähnlichen, nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinanderfolgenden Kurven

$$v + \log^n (Au^{f_1(u)} + Bu^{f_2(u)}) = \log^n \gamma$$

besteht.

Um das Linienelement der Spiralfächen zu finden in Bezug auf die Kurven eines Vierecksnetzes der beschriebenen Art als Parameterkurven, soll aus den Gleichungen (I) der Seite 381 zunächst das Quadrat des Linienelements für die Parameter u und v berechnet werden. Dabei erhält man

$$ds^2 = e^{2h\nu} (E_1(u) du^2 + 2F_1(u) du dv + G_1(u) dv^2).$$

E_1 , F_1 und G_1 sind Funktionen von u allein²⁾.

¹⁾ H. Graf und R. Sauer, „Über dreifache Geradensysteme in der Ebene usw.“, Sitzungsber. der bayer. Akad. d. Wiss., math.-natur. Abt., 12. Juli 1924, p. 148.

²⁾ Darboux, Théorie des surfaces, I, p. 108.

Durch die Substitutionen

und
$$v = \log \xi^n$$
$$u = \log \left(\frac{\eta}{\xi} \right)^n$$

folgt für das Quadrat des Linienelements

$$(II) \quad ds^2 = \xi^{2k} \left(E_2 \left(\frac{\eta}{\xi} \right) d\xi^2 + 2 F_2 \left(\frac{\eta}{\xi} \right) d\xi d\eta + G_2 \left(\frac{\eta}{\xi} \right) d\eta^2 \right)^1,$$

wobei E_2 , F_2 und G_2 homogene Funktionen nullter Ordnung der beiden Veränderlichen ξ und η sind und $k = \frac{h}{\ln n} - 1$ gesetzt ist.

Die Kurven $\frac{\eta}{\xi} = \text{const.}$ bedeuten die Kegelloxodromen, die

Kurven $\xi = \text{const.}$ und $\eta = \text{const.}$ bilden ein Vierecksnetz der beschriebenen Art. Allgemein überzeugt man sich leicht²⁾, daß jedes Vierecksnetz der gewünschten Beschaffenheit auf ein Linienelement von der Form (II) führt und daß umgekehrt jedes Linienelement von der Form (II) ein Vierecksnetz der verlangten Art ergibt.

Nun kehre ich zum Problem der geodätischen Dreiecksnetze zurück und untersuche, ob geodätische Dreiecksnetze auf Spiralfächen existieren von der Art, daß die drei Systeme netzerzeugender geodätischer Linien ähnliche Kurven sind und nach einem Logarithmus des Drehwinkels aufeinander folgen.

Angenommen, es sei ein geodätisches Dreiecksnetz der verlangten Beschaffenheit gefunden, so mögen als Parameterkurven zwei der netzbildenden Systeme geodätischer Linien $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ in der Weise eingeführt werden, daß das dritte System der netzerzeugenden geodätischen Linien durch die Beziehung $\alpha - \beta = \text{const.}$ dargestellt wird.

Auf Grund der vorangehenden Überlegungen muß das Quadrat des Linienelements die Form haben:

$$ds^2 = \alpha^{2m} \left(U \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) d\alpha^2 + 2 V \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) d\alpha d\beta + W \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) d\beta^2 \right).$$

¹⁾ Darboux, Théorie des surfaces, III, p. 73.

²⁾ Das Linienelement (II) ändert nämlich bei den Substitutionen $\xi = \xi'^k f_1 \left(\frac{\eta'}{\xi'} \right)$ und $\eta = \xi'^k f_2 \left(\frac{\eta'}{\xi'} \right)$ seinen Charakter nicht.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Kurven $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ und $\alpha - \beta = \text{const.}$ der Gleichung der geodätischen Linien genügen, erhält man, wenn man in den auf Seite 362 angegebenen drei partiellen Differentialgleichungen $u = \alpha$, $v = \beta$,

$$E = \alpha^{2m} U \left(\frac{\beta}{\alpha} \right), \quad F = \alpha^{2m} V \left(\frac{\beta}{\alpha} \right), \quad G = \alpha^{2m} W \left(\frac{\beta}{\alpha} \right) \text{ einsetzt.}$$

Auf diese Weise ergeben sich gerade drei gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen $\frac{\beta}{\alpha} = x$ zur Bestimmung der drei unbekannten Funktionen $U(x)$, $V(x)$ und $W(x)$:

$$(U - xV) \frac{dU}{dx} + 2xU \frac{dV}{dx} = 2mUV,$$

$$2W \frac{dV}{dx} - (V - xW) \frac{dW}{dx} = 2mW^2,$$

$$(3V + (2-x)W) \frac{dU}{dx} + 2(1+x)V \frac{dV}{dx} + ((2x-1)U + 3xV) \frac{dW}{dx} = 2m(UW + 2V^2 + 3VW).$$

Aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen folgt, daß die drei angegebenen simultanen Differentialgleichungen stets eine und nur eine Lösung besitzen, wenn man für $x = 0$ bestimmte Anfangsbedingungen $U(0)$, $V(0)$, $W(0)$ vorgibt. Die Anfangsbedingungen müssen in dem Bereiche liegen, in dem die aus den Differentialgleichungen linear rechenbaren Ausdrücke $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dW}{dx}$ samt ihren partiellen Ableitungen nach U , V , W sich stetig verhalten. Die zugehörigen Spiralfächen sind reell, wenn $U(0) > 0$, $V(0) > 0$ und $U(0)W(0) > V(0)^2$ angenommen wird.

Es ist somit gezeigt, daß es geodätische Dreiecksnetze der verlangten Beschaffenheit gibt und daß neben der schon in den Differentialgleichungen enthaltenen Konstanten m noch drei Integrationskonstanten in das Problem eingehen.

Bei der Diskussion der vier Konstanten ist zunächst zu bedenken, daß die drei Größen $U(0)$, $V(0)$, $W(0)$ nur in ihren Verhältnissen wesentlich sind. Werden nämlich U , V , W um einen konstanten Faktor geändert, so bedeutet dies eine ähnliche Deformation der Spiralfäche; alle zueinander ähnlichen Spiralfächen sind aber, ebenso wie alle untereinander ähnlichen logarithmischen Spiralen der Ebene, miteinander identisch und können durch eine passende Drehung miteinander zur Deckung gebracht werden. Es bleiben also nur drei Konstante, nämlich m und die beiden Verhältnisse $U(0):V(0):W(0)$.

Die Deutung dieser drei Konstanten geschieht am einfachsten, wenn man die geodätische Linie $\beta = 0$ des Netzes mit den auf ihr liegenden Knotenpunkten betrachtet. Für $\beta = 0$ erhält man nämlich

$$ds_{\beta=0} = a^m \sqrt{U(0)} d\alpha, \quad \text{also } s_{\beta=0} = \frac{\sqrt{U(0)}}{m+1} a^{m+1}.$$

Die Bogenlänge $s_{\beta=0}$ ist vom Ähnlichkeitszentrum O an gerechnet. Wie man sieht, sind auf der geodätischen Linie $\beta = 0$ die Knotenpunkte nach einer Potenz angeordnet. Der Exponent dieser Potenz kann beliebig gewählt werden und bestimmt dadurch die Konstante m . Die Winkel ψ und χ , nach denen die geodätische Linie $\beta = 0$ in den Netzknotenpunkten von den geodätischen Linien $\alpha = \text{const.}$ und $\alpha - \beta = \text{const.}$ des Netzes geschnitten wird, haben die konstanten Werte

$$\psi = \arctg \frac{\sqrt{U(0)W(0)} - V(0)^2}{V(0)},$$

$$\chi = \arctg \frac{\sqrt{U(0)W(0)} - V(0)^2}{U(0) + V(0)}.$$

Man erkennt also, daß die Verhältnisse der Konstanten $U(0):V(0):W(0)$ die Winkel bestimmen, welche die Netzkurve $\beta = 0$ mit den Netzkurven $\alpha = \text{const.}$ sowie den Netzkurven $\alpha - \beta = \text{const.}$ bildet.

Auf diese Weise ergibt sich schließlich ein dem auf Seite 372 ausgesprochenen Satz analoges Resultat:

Abgesehen von der Biegung gibt es ∞^3 Spiralfächen, auf denen ein geodätisches Dreiecksnetz existiert, welches von drei Systemen ähnlicher Kur-

ven, die nach Logarithmen des Drehwinkels aufeinander folgen, gebildet wird.

Die Analogie zwischen den geodätischen Dreiecksnetzen dieses und des vorangehenden Paragraphen ist eine sehr weitgehende:

In ähnlicher Weise wie die in § 2 beschriebenen Dreiecksnetze von drei ausgezeichneten Systemen geodätischer Linien erzeugt werden, welche einen reellen und zwei imaginäre Äquatorkreise asymptotisch umhüllen, enthalten hier die drei Systeme der netzerzeugenden geodätischen Linien die drei ausgezeichneten Kurven $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\alpha - \beta = 0$, welche gleichzeitig Kegelloxodromen sind, da sie zu dem Kurvensystem $\frac{\beta}{\alpha} = \text{const.}$ gehören. Sie werden von den Kurven des geodätischen Dreiecksnetzes erst nach unendlich vielen Windungen der Spiralfäche erreicht. Dabei tritt entweder asymptotische Annäherung ein beim Fortschreiten von den inneren zu den äußeren Windungen der Spiralfäche (vgl. Seite 391, Typus III) oder Einmündung in das Ähnlichkeitszentrum (vgl. Seite 390, Typus I und Seite 393, Typus V). Ebenso wie bei den Drehflächen ist nur eine der drei ausgezeichneten geodätischen Linien $\alpha = 0$, $\beta = 0$ und $\alpha - \beta = 0$ reell.

Ein bemerkenswerter Unterschied zwischen den Drehflächen des § 2 und den in diesem Paragraphen untersuchten Spiralfächen besteht darin, daß auf jeder Drehfläche, welche ein „singuläres“ geodätisches Dreiecksnetz enthält, stets noch ein hinsichtlich der Meridiane symmetrisches zweites geodätisches Dreiecksnetz vorhanden ist, während auf den hier betrachteten Spiralfächen jeweils nur ein einziges geodätisches Dreiecksnetz liegt, welches die ∞^1 Windungen der Spiralfäche überdeckt.

Mit der in § 1 auseinandergesetzten Erzeugungsweise lassen sich die im Vorangehenden gefundenen geodätischen Dreiecksnetze auf Spiralfächen in einen einfachen Zusammenhang bringen:

Regelt man die Aufeinanderfolge der Knotenpunkte der ersten geodätischen Linie nach einer Potenz mit beliebigem Exponenten und erteilt den beiden Winkeln, welche jeweils den Knotenpunkten zuzuordnen sind, zwei beliebige konstante Werte, so sind die gemäß der Erzeugungsweise sich ergebenden,

geodätische Dreiecksnetze tragenden Flächen mit den in diesem Paragraphen besprochenen Spiralf lächen identisch.

Der Anfangsstreifen entspricht dabei dem abwickelbaren Streifen längs derjenigen reellen geodätischen Linie des Dreiecksnetzes, welche gleichzeitig Kegelloxodrome ist und welche das Analogon bildet zum reellen Äquator der in § 2 behandelten Drehflächen. Man kann die erste geodätische Linie stets in die Form irgend einer logarithmischen Spirale S bringen, welche das Ähnlichkeitszentrum der Spiralf läche zum asymptotischen Punkt hat und deren Ebene auf der Achse der Spiralf läche senkrecht steht. Der erste geodätische Streifen liegt dann auf einem Zylinder, dessen Mantellinien parallel zur Achse der Spiralf läche verlaufen. Die so bestimmte Biegungsspiralf läche ist samt dem darauf liegenden geodätischen Dreiecksnetz nur dann hinsichtlich der Ebene der Spirale S symmetrisch, wenn die beiden Winkel ψ und χ einander entgegengesetzt gleich angenommen werden.

Indem man den Exponenten der Potenz, welche die Aufeinanderfolge der Knotenpunkte auf der ausgezeichneten geodätischen Linie $\beta = 0$ des Netzes regelt, variiert, d. h. indem man der Konstanten m der Reihe nach verschiedene Werte erteilt, gelangt man zu einer Klassifikation der sämtlichen Spiralf lächen, welche geodätische Dreiecksnetze der beschriebenen Art tragen.

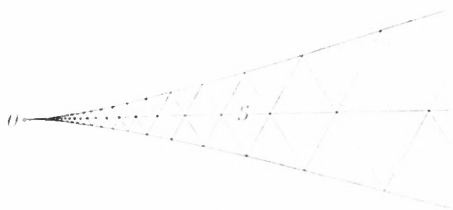
Zur Diskussion der verschiedenen sich ergebenden Flächen- und Netztypen betrachte ich jeweils die beiden in die Ebene ausgebreiteten geodätischen Streifen des Dreiecksnetzes zu beiden Seiten der ausgezeichneten geodätischen Linie $\beta = 0$. Ich werde die Kurve $\beta = 0$ im Folgenden mit S bezeichnen und erteile ihr in den in die Ebene abgewickelten Streifen die Gestalt einer geraden Linie. Es bedeutet dies keine Einschränkung, da der eine Rand des ersten geodätischen Streifens bei der in § 1 entwickelten Erzeugungsweise beliebig zugrundegelegt werden darf (vgl. Seite 361). Die äußeren Ränder der beiden an S benachbarten Streifen sind in den folgenden Figuren statt durch Polygonzüge durch stetige Kurven dargestellt, wie sie beim Grenzübergang der endlichen Polyedergefüge zu infinitesimalen Netzen auftreten. Die Winkel ψ und χ sind in den folgenden Figuren stets entgegengesetzt gleich

angenommen. Die Überlegungen gelten jedoch unverändert auch für $|\psi| \neq |\chi|$.

Nun bespreche ich der Reihe nach die einzelnen Typen und werde dabei drei verschiedene Gattungen von Spiralfächen erhalten, welche durch die Drehflächen und die abwickelbaren Spiralfächen als Ausartungen ineinander übergehen.

I. $m < -1$.

Die beiden ersten geodätischen Streifen sind in Figur 9 dargestellt. Die äußeren Streifenränder haben das Ähn-



Figur 9.

lichkeitszentrum O zur Spitze und verlaufen etwa wie eine Neilsche Parabel. Sie sind nach außen konkav: Die Flächen sind also hyperbolisch gekrümmt.

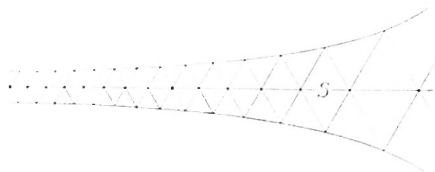
Dasjenige System der geodätischen Linien, welches die Kurve S enthält, mündet in das Ähnlichkeitszentrum O ein. O ist ein „Häufungspunkt“ des Netzes, d. h. das Netz verengt sich unbegrenzt bei Annäherung an O . Entfernt man sich mehr und mehr von O , so werden die Netzdreiecke schließlich unendlich weit und erreichen das Unendliche nach einer endlichen Anzahl von Knotenpunkten.

II. $m = -1$.

Die Potenz artet in einen Logarithmus aus. Die ∞^1 Windungen der Spiralfäche werden miteinander identisch, die Spiralfächen gehen in die stets hyperbolisch gekrümmten Drehflächen über, welche ich im vorhergehenden Paragraphen untersucht habe.

Die beiden Anfangsstreifen sind in Figur 10 dargestellt. Sie werden durch zwei Exponentialkurven abgegrenzt, welche S zur Asymptote haben. Nach der einen Seite zu

werden die Netzdreiecke kleiner und kleiner und häufen sich gegen das Unendliche, nach der anderen Seite hin erreichen sie das Unendliche nach einer endlichen Anzahl von Knotenpunkten. (Vgl. Seite 376.)

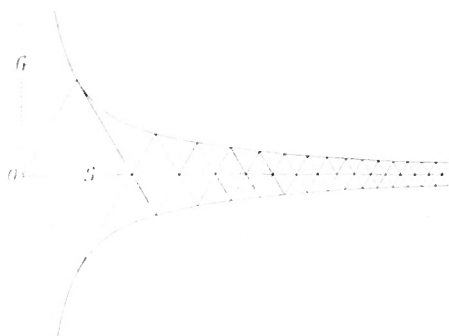


Figur 10.

III. — $1 < m < 0$.

Die beiden Anfangsstreifen sind in Figur 11 gezeichnet.

Die Flächen sind wiederum hyperbolisch gekrümmt, jedoch von den unter I angegebenen Flächen dadurch verschieden, daß das Ähnlichkeitszentrum O nicht Häufungs-



Figur 11.

punkt des Netzes ist, sondern nach einer endlichen Anzahl von Knotenpunkten erreicht wird. Entfernt man sich von O , so werden die Netzdreiecke kleiner und häufen sich gegen das Unendliche. Dasjenige System der geodätischen Linien, welches die Kurve S enthält, umhüllt S asymptotisch beim Fortschreiten von den inneren zu den äußeren Windungen der Spiralfäche.

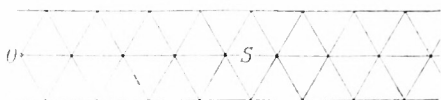
Der Verlauf des Netzes erinnert an den Verlauf der auf Seite 374 besprochenen „singulären“ geodätischen Dreiecksnetze auf Drehflächen.

Ein wesentlicher Unterschied liegt darin, daß die Streifen des hier besprochenen Typus III im Ähnlichkeitszentrum O eine im Endlichen gelegene Grenze besitzen, während die auf Seite 374 angegebenen Netze nach beiden Seiten des Äquators hin sich unendlich weit erstrecken. Dementsprechend haben die äußeren Ränder der in Figur 10 dargestellten Streifen nur die eine Asymptote S , während die Ränder der in Figur 11 gezeichneten Streifen etwa wie eine Hyperbel verlaufen, welche S und G zu Asymptoten besitzt.

IV. $m = 0$.

Die Knotenpunkte auf S folgen in gleichen Abständen aufeinander. Sowohl durch die in § 1 auseinandergesetzte Erzeugungsweise als auch mittels der auf Seite 386 angegebenen Differentialgleichungen findet man leicht, daß die Spiralfäche in einen Zylinder ausartet, dessen Basis irgend eine logarithmische Spirale ist. Das geodätische Dreiecksnetz geht nach Ausbreitung des Zylinders in die Ebene in ein ebenes Dreiecksnetz über, welches von drei Parallelstrahlenbüscheln gebildet wird und durch Hinzunahme eines vierten Parallelstrahlenbüschels zu einem Möbiusschen Netz ergänzt werden kann.

Die beiden Anfangsstreifen bestehen aus zwei Reihen kongruenter gleichseitiger Dreiecke, wie Figur 12 zeigt.



Figur 12.

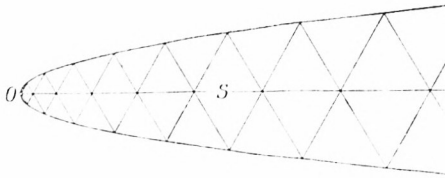
Bemerkung: Man vergleiche die hier genannten Netze mit den auf Seite 383 erwähnten Dreiecksnetzen, welche auf den nämlichen Zylindern liegen, aber nicht zu Möbiusschen Netzen sich vervollständigen lassen.

V. $m > 0$.

Die beiden Anfangsstreifen sind in Figur 13 gezeichnet. Die Ränder verlaufen etwa wie eine Parabel.

Die Flächen sind elliptisch gekrümmt. Das Ähnlichkeitszentrum O ist nicht Häufungspunkt des Netzes, sondern wird

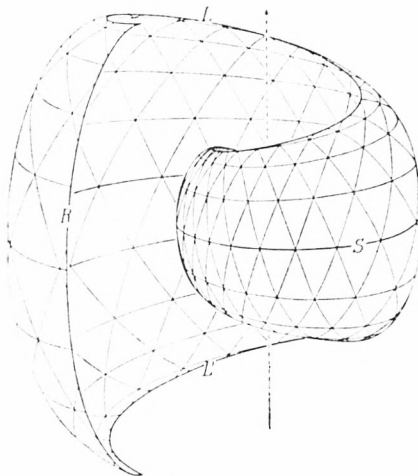
nach einer endlichen Anzahl von Knotenpunkten erreicht. Wenn man sich vom Ähnlichkeitszentrum entfernt, werden die Netzdreiecke unendlich groß, erreichen das Unendliche jedoch erst nach unendlich vielen Schritten. Dasjenige



Figur 13.

System der geodätischen Linien, welches die Kurve S enthält, mündet in den Ähnlichkeitspunkt.

In der schematischen Figur 14 ist eine an der Kurve R abgeschnittene Spiralfäche des Typus V samt darauf liegendem geodätischen Dreiecksnetz schematisch angegeben.



Figur 14.

Die logarithmische Spirale S zerlegt die Fläche und das Dreiecksnetz in zwei symmetrische Hälften. Die beiden Kegelloxodromen L und L' begrenzen die Fläche als Rückkehrkanten, ohne Diagonalkurven des Dreiecksnetzes zu sein.

Was auf Seite 380 über die periodische Aufeinanderfolge der einzelnen Teile der Drehfläche gesagt wurde, gilt in ähnlicher Weise auch für die hier besprochenen Spiralfächen. Die einzelnen längs der Rückkehrkanten zusammenstoßenden Flächenteile sind jedoch hier nicht kongruent.

Das schon in der Einleitung angegebene Beispiel, welches F. Ahl auf Veranlassung von P. Stäckel berechnet hat (vgl. Seite 355, Fußnote 1), ist eine besondere Fläche des Typus V. Sie ergibt sich für die Anfangsbedingungen $m = 1$, $U(0) = 4$, $V(0) = -2$, $W(0) = 3$, also $\psi = -\chi = \arctg \sqrt{2}$. Bei diesen speziellen Anfangsbedingungen kann man für das System der Differentialgleichungen, welches auf Seite 386 aufgestellt wurde, die Lösung angeben, nämlich:

$$U = (2 - x)^2, \quad V = -(2 - x)(1 - 2x), \quad W = 3(1 - 2x).$$

In der Dissertation von F. Ahl sind noch zwei Linienelemente zu imaginären Flächen angegeben, welche ein geodätisches Dreiecksnetz tragen. Das eine Linienelement gehört zu einer imaginären Drehfläche und ordnet sich den in § 2 besprochenen Drehflächen unter, das andre Linienelement führt auf eine imaginäre Spiralfäche, welche ebenso wie das reelle Beispiel von Ahl dem auf Seite 393 angegebenen Typus V zuzurechnen ist.

Zum Schlusse seien noch einige Bemerkungen angefügt über diejenigen Spiralfächen, welche sich auf Drehflächen verbiegen lassen¹⁾.

Man zeigt leicht die Richtigkeit folgenden Satzes:

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Drehfläche Biegungsfläche einer Spiralfäche sei, ist die Proportionalität des geodätischen Krümmungsradius ϱ der Breitenkreise und der Bogenlänge s des Meridians, also die Bedingung

$$\varrho = k_1 s + k_2,$$

wobei k_1 und k_2 Konstanten bedeuten.

Nach einfachen Rechnungen erhält man für den Meridian der Drehfläche die Gleichung

$$z = \int \sqrt{\frac{1}{z_1^2} r^2 z_2^2 - 1} \, dr.$$

¹⁾ L. Raffy, Par. soc. math. 20 (1892), p. 22.

z und r sind rechtwinkelige Koordinaten, die Z -Achse ist die Drehachse.

z_1 bedeutet eine willkürliche Konstante und führt bei Variierung auf das System der ähnlichen Drehflächen. Die ähnlichen Drehflächen haben hier die charakteristische Eigenschaft, gleichzeitig Biegungsdrehflächen zu sein.

Die willkürliche Konstante z_2 bestimmt ∞^1 ineinander nicht verbiegbare und zueinander nicht ähnliche Drehflächen, welche auf Spiralfächen verbogen werden können. Dabei sind drei Haupttypen zu unterscheiden:

I. $z_2 > 0$.

Die Flächen sind elliptisch gekrümmt. In der schematischen Figur 15 ist eine Drehfläche des Typus I schematisch dargestellt.

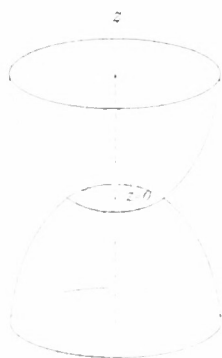
II. $z_2 = 0$.

Die Drehflächen arten in einen Drehkegel oder Drehzylinder aus.

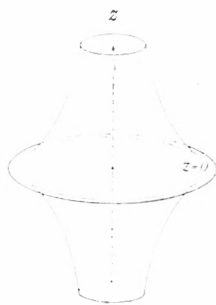
III. $z_2 < 0$.

Die Flächen sind hyperbolisch gekrümmt. Ein Beispiel zeigt die schematische Figur 16.

Der Breitenkreis $z = 0$ ist für die Flächen der Typen I und III Rückkehrkante. Die Drehflächen sind in Bezug auf die Ebene $z = 0$



Figur 15.



Figur 16.

symmetrisch und verlaufen ins Unendliche. In den Figuren 15 und 16 sind die Flächen durch beliebige Breitenkreise abgeschnitten.

Die durch Verbiegung der hier besprochenen Drehflächen entstehenden Spiralfächen haben ebenso wie die in der Figur 14 abgebildete Fläche zwei Kegelloxodromen zu Rückkehrkanten. Sie lassen sich stets zu der im Ähnlichkeitszentrum die Achse senkrecht schneidenden Ebene symmetrisch verbiegen. Dabei entspricht die in der Symmetrieebene liegende logarithmische Spirale S einem Meridian der Drehfläche.

Jede Spiralfäche, welche durch Verbiegung aus einer Drehfläche entsteht, trägt natürlich ebenso wie die Drehfläche selbst ∞^1 Systeme geodätischer Dreiecksnetze. Diese Netze sind von den auf Seite 388 beschriebenen geodätischen Dreiecksnetzen in charakteristischer Weise verschieden:

Das eine System der geodätischen Linien, nämlich die den Meridianen der Drehfläche entsprechenden Linien, umfaßt ebenso wie bisher lauter ähnliche Kurven. Diese umhüllen im Falle der hyperbolischen Krümmung die Spirale S asymptotisch, wenn man den Verlauf der Windungen von innen nach außen verfolgt, und münden im Falle der elliptischen Krümmung ins Ähnlichkeitszentrum. Die beiden andren, zur Ebene der Spirale S stets symmetrischen Systeme netzbildender geodätischer Linien bestehen im Gegensatz zu den früher betrachteten geodätischen Dreiecksnetzen nicht aus ähnlichen Kurven; sie umhüllen daher nicht eine Kegelloxodrome wie in den früheren Fällen, sondern eine Kurve konstanter geodätischer Krümmung. Der Winkel, unter denen die Spirale S jeweils von den beiden übrigen geodätischen Linien des Netzes in den Knotenpunkten geschnitten wird, bleibt nicht konstant, sondern ändert sich, wie aus der Gestalt der Biegungsdrehflächen vermöge des Clairautschen Satzes sich ergibt, von Knotenpunkt zu Knotenpunkt.

Man sieht, daß die Form der Spiralfächen den sie überdeckenden geodätischen Dreiecksnetzen viel weniger angepaßt ist als die Form der Biegungsdrehflächen, weil nur bei den Biegungsdrehflächen die Drehsymmetrie der Netze deutlich zur Anschauung kommt. Außerdem schneiden bei den Biegungsspiralfächen, im Gegensatz zu den Biegungsdrehflächen, die beiden Rückkehrkanten das Netz ab, ohne Diagonalkurven des Netzes zu sein.

Den Übergang zwischen den Netzen der Typen I und III bilden die geodätischen Dreiecksnetze auf den zylindrischen Spiral-

flächen, wie sie durch Verbiegung eines Drehkegels oder eines Drehzylinders mit daraufliegendem geodätischen Dreiecksnetz in einen Zylinder mit logarithmischer Spirale als Basis entstehen. Dabei gehen sämtliche Mantellinien des Drehkegels, dagegen nur eine Mantellinie des Drehzylinders in Kegelloxodromen der abwickelbaren Spiralfäche über.

Die in der vorliegenden Arbeit untersuchten Dreiecksnetze sind deshalb bemerkenswert, weil sie ihren geodätischen Charakter bei der Verbiegung nicht ändern und sonach eine wesentliche Eigenschaft der die betreffenden Flächen überdeckenden undehnbaren Haut anschaulich darstellen. Ein ähnliches Interesse verdienen wohl auch die allgemeineren Dreiecksnetze, welche nicht von geodätischen Linien, sondern von Linien nicht verschwindender konstanter geodätischer Krümmung erzeugt werden. Freilich ist dieses Problem viel umfassender und schwieriger. Es ist bisher auch für die Ebene noch nicht allgemein gelöst.