Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1926
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Kettenbrüche mit kulminierenden und fastkulminierenden Perioden.

Von **K. Weber,** Freiburg i. B.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 16. Januar 1926.

§ 1.

Die Sätze von Thomas Muir.

Über Kettenbrüche mit kulminierenden und fastkulminierenden Perioden sind folgende zwei, von Th. Muir herrührende Sätze bekannt[1]):

I. Wenn der regelmäßige Kettenbruch

$$[\lambda, \varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n, \lambda, \varepsilon_n \ldots \varepsilon_1, \varepsilon_0, 2\lambda]$$

mit kulminierender Periode die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl D sein soll, so müssen die Teilnenner des Kettenbruchs $[\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n]$ die Gleichung befriedigen:

1) $$2 A_{n-1} = B_n.$$

Ist dies der Fall, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung darin, daß λ die Form hat:

2) $$\lambda = x \cdot A_n - (-1)^n \cdot A_{n-1} \cdot B_{n-1},$$

wo x eine ganze Zahl bedeutet. Dann ist

3) $$D = \lambda^2 + 4x \cdot A_{n-1} - (-1)^n \cdot 2 \cdot B_{n-1}^2.$$

Mit $\frac{A_n}{B_n}$ wird der Näherungsbruch n^{ter} Ordnung bezeichnet.

[1]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, § 27, S. 112/113.

II. Wenn der Kettenbruch

$$[\overline{\lambda, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n, \lambda - 1, \varepsilon_n \ldots \varepsilon_1, \varepsilon_0, 2\lambda}]$$

mit fastkulminierender Periode die Quadratwurzel aus einer ganzen Zahl D ($\neq 8{,}12$) sein soll, so müssen die Teilnenner des Kettenbruches $[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n]$ die Gleichung befriedigen:

4) $$2 A_{n-1} = B_n + A_n.$$

Ist dies der Fall, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung darin, daß λ die Form hat:

5) $$\lambda = \frac{1 + (2x + 1) A_n}{2} - (-1)^n A_{n-1} \cdot B_{n-1}.$$

Dann ist

6) $$D = \lambda^2 + (2x + 1) B_n - (-1)^n \cdot 2 \cdot B_{n-1}^2.$$

Die Zahlen D, deren Quadratwurzeln kulminierende oder fastkulminierende Perioden besitzen, haben noch die Eigenschaft, daß sie durch die quadratische Form $x^2 - (-1)^n \cdot 2y^2$ dargestellt werden können. Das Problem, dessen Lösung bisher noch nicht gegeben worden ist, besteht nun darin, einmal alle Kettenbrüche zu finden, welche den Bedingungsgleichungen 1) und 4) genügen und ferner die Darstellung der Zahlen D durch die Form $x^2 - (-1)^n \cdot 2y^2$ anzugeben.

Im folgenden wird eine Lösung des Problems durchgeführt und zugleich gezeigt, wie eng die behandelten Fragen mit der Theorie der binären, quadratischen Formen der Determinante $\Delta = \pm 2$ verknüpft sind.

Die Bedingungsgleichungen 1) und 4) lassen sich leicht auf eine einzige Kongruenz zurückführen, welche die Grundlage für alle weiteren Betrachtungen liefert.

Für den Kettenbruch $[\varepsilon_0 \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n]$ gilt die Beziehung:

$$A_n \cdot B_{n-1} - A_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1}.$$

Schreibt man

$$A_{n-1} \cdot B_n = (-1)^n + A_n \cdot B_{n-1}$$

und multipliziert mit 2, so erhält man bei Benützung von 1) oder 4) die Kongruenz:

7) $$B_n^2 \equiv (-1)^n \cdot 2 \pmod{A_n}.$$

Es gilt auch die Umkehrung:

Zwei Zahlen A_n und B_n, welche die Kongruenz 7) erfüllen, bestimmen einen Kettenbruch $[\varepsilon_0\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n]$, für den die Gleichung 1) oder 4) gilt, je nachdem B_n gerade oder ungerade ist.

§ 2.

Die Kongruenz $a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1}$.

Wir untersuchen den Zusammenhang der beiden Zahlen a_1 und p_1 in der Kongruenz

$$1) \qquad a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1} \qquad \left.\begin{matrix} a_1 \equiv 0 \\ p_1 \equiv 1 \end{matrix}\right\} \pmod 2,$$

wo $0 < a_1 < p_1$ sein soll. Betrachten wir die Kettenbruchentwicklung

$$2) \qquad \frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots \varepsilon_n], \quad \text{wo } n \text{ gerade sein soll,}$$

so wird die Aufgabe gestellt, die Beziehungen zwischen den Teilnennern ε_i des Kettenbruchs zu finden.

Wir setzen

$$[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n] = \frac{A_n}{B_n}, \qquad [\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n] = \frac{A_{n-1,1}}{B_{n-1,1}},$$

$$3) \qquad \begin{aligned} A_n &= p_1, & A_{n-1} &= b_1, \\ B_n &= a_1, & B_{n-1} &= p_2. \end{aligned}$$

Dann ist $A_n \cdot B_{n-1} - A_{n-1} \cdot B_n = (-1)^{n+1} = -1$ oder

$$4) \qquad a_1 \cdot b_1 = 1 + p_1 \cdot p_2.$$

Außerdem ist bekanntlich

$$5) \qquad \begin{cases} [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_1] = \dfrac{B_{n-1}}{B_{n-2}}, \\ [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \ldots, \varepsilon_2] = \dfrac{B_{n-2,1}}{B_{n-3,1}} \end{cases}$$

und wir setzen

$$6) \qquad \begin{aligned} B_{n-1} &= p_2, & B_{n-2,1} &= b_2, \\ B_{n-2} &= a_2, & B_{n-3,1} &= p_3. \end{aligned}$$

Wegen der bekannten Formel

$$B_{n-1} \cdot B_{n-3,1} - B_{n-2} \cdot B_{n-2,1} = (-1)^{n-1} = -1$$

ist dann

7) $$a_2 b_2 = 1 + p_2 p_3.$$

Wegen $a_1 \equiv 0 \pmod 2$ kann man setzen: $a_1 = 2 b_1'$.

Aus 1) wird dabei

$$a_1 \cdot b_1' \equiv 1 \pmod{p_1}.$$

Der Vergleich mit Gleichung 4) ergibt

$$b_1' = b_1,$$

weil die Kongruenz $a_1 \cdot x \equiv 1 \pmod{p_1}$ nur eine positive Lösung kleiner als p_1 hat. Somit gilt für die Kette 2):

8) $$a_1 = 2 b_1.$$

Aus dieser Gleichung folgt eine Beziehung zwischen ε_n und ε_0. Wegen 3) und 8) ist

$$B_n = 2 \cdot A_{n-1} \text{ oder}$$

$$\varepsilon_n \cdot B_{n-1} + B_{n-2} = 2 \varepsilon_0 B_{n-1} + 2 B_{n-2,1}.$$

Mit Benützung von 6) folgt hieraus:

9) $$\varepsilon_n \cdot p_2 + a_2 = 2 \varepsilon_0 \cdot p_2 + 2 b_2.$$

Multipliziert man 9) mit a_2, so hat man

$$a_2^2 = a_2 (2 \varepsilon_0 - \varepsilon_n) \cdot p_2 + 2 a_2 b_2 \text{ und wegen 7)}$$

$$a_2^2 = a_2 (2 \varepsilon_0 - \varepsilon_n) p_2 + 2 + 2 p_2 p_3, \text{ daher:}$$

10) $$a_2^2 \equiv 2 \pmod{p_2}.$$

Satz: Aus der Kongruenz $a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1}$ folgt für $a_1 = 2 b_1$ die andere $a_2^2 \equiv 2 \pmod{p_2}$,

wobei $a_2 < a_1$ und $p_2 < p_1$ ist.

Multipliziert man 9) mit b_2 und berücksichtigt 7), so ist

$$\varepsilon_n \cdot b_2 \cdot p_2 + a_2 b_2 = 2 \varepsilon_0 b_2 p_2 + 2 b_2^2,$$

11)
$$\begin{cases} 2 b_2^2 = 1 + p_2 \cdot [b_2 (\varepsilon_n - 2 \varepsilon_0) + p_3], \\ 2 b_2^2 \equiv 1 \pmod{p_2}. \end{cases}$$

Die lineare Kongruenz

$$b_2 x \equiv 1 \pmod{p_2}$$

hat wegen 7) und 11) die beiden positiven Lösungen a_2 und $2b_2$. Weil $a_2 < p_2$, so kann man setzen:

$$2b_2 = a_2 + k \cdot p_2.$$

Es sind nur 2 Fälle möglich:

α) $k = 0$. Dann ist

$$2b_2 = a_2, \text{ d. h. auch } a_2 \text{ ist gerade.}$$

Zieht man jetzt die Gleichung 7) von der ersten Gleichung 11) ab, so ergibt sich links Null, und man erhält:

$$\varepsilon_n = 2\varepsilon_0.$$

β) $k = 1$. In diesem Fall ist

$$2b_2 = a_2 + p_2.$$

Jetzt ist a_2 ungerade, da p_2 stets ungerade ist.
Aus Gl. 7) und 11) folgt aber jetzt:

$$\varepsilon_n = 2\varepsilon_0 + 1.$$

Der Fall $2b_2 = a_2 + k \cdot p_2$, wo $k > 1$, ist unmöglich, weil sich sonst $b_2 > p_2$ ergäbe.

Aus $B_{n-1} = \varepsilon_1 \cdot B_{n-2,1} + B_{n-3,2}$ oder wegen 6)
$p_2 = \varepsilon_1 \cdot b_2 + B_{n-3,2}$

folgert man für den Fall

$2b_2 = a_2 + p_2$ d. h.
$2b_2 = a_2 + \varepsilon_1 \cdot b_2 + B_{n-3,2}$,

daß $\varepsilon_1 < 1$ sein muß. Daher ist $\varepsilon_1 = 1$.

Ergebnis: Besteht für 2 positive, ganze Zahlen $a_1 < p_1$ die Kongruenz

$$a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1}, \text{ wo } \begin{matrix} a_1 \equiv 0 \\ p_1 \equiv 1 \end{matrix} \pmod 2 \text{ ist,}$$

so ergibt sich aus dem Kettenbruch

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$$

die neue Kongruenz

$$a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_2},$$

wobei a_2, p_2 durch die Formel definiert sind:

$$\frac{p_2}{a_2} = [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_1].$$

Ist a_2 eine gerade Zahl, so ist $\varepsilon_n = 2\,\varepsilon_0$;

ist a_2 eine ungerade Zahl, so ist $\varepsilon_n = 2\,\varepsilon_0 + 1$

und zugleich ist $\varepsilon_1 = 1$.

Der Kettenbruch für $\frac{p_2}{a_2}$ enthält 2 Elemente weniger als der für $\frac{p_1}{a_1}$.

Es bleibt noch der Fall zu behandeln

$$a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1}, \qquad a_1 \equiv 1 \pmod{2}.$$

Da wir p_1 stets als ungerade annehmen, so ist $(p_1 - a_1)$ eine gerade Zahl. Man kann den Kettenbruch für $\frac{p_1}{p_1 - a_1}$ aus demjenigen für $\frac{p_1}{a_1}$ ableiten.

Sei $$\frac{p_1}{p_1 - a_1} = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m].$$

Dann besteht nach dem Vorigen jedenfalls eine der beiden Gleichungen $\beta_m = 2\,\beta_0$ oder $\beta_m = 2\,\beta_0 + 1$.

Für ε_0 und ε_n sind nur 2 Fälle möglich:

1. $\varepsilon_0 > 1$ $\varepsilon_n = 1$. In diesem Fall ist

$$\frac{p_1}{p_1 - a_1} = [1, \varepsilon_0 - 1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1} + 1].$$

2. $\varepsilon_0 = 1$ $\varepsilon_n = 1$. Jetzt ist

$$\frac{p_1}{p_1 - a_1} = [\varepsilon_1 + 1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1} + 1].$$

In beiden Fällen ist $\varepsilon_n = 1$.

§ 3.

Abbau und Aufbau der Ketten.

Liegt die Kongruenz vor

$a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1}$ mit der $(n+1)$-gliedrigen Kette[1])

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n],\ n \text{ gerade},$$

so gelangt man zur Kongruenz

$a_2^2 \equiv 2 \pmod{p_2}$ mit der $(n-1)$-gliedrigen Kette

$$\frac{p_2}{a_2} = [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_1].$$

Ist jetzt a_2 gerade, so kann man in derselben Weise eine $(n-3)$-gliedrige Kette bestimmen

$$\frac{p_3}{a_3} = [\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n-3}, \varepsilon_{n-2}], \text{ wobei wieder:}$$
$$a_3^2 \equiv 2 \pmod{p_3}.$$

Ist aber a_2 ungerade, so bildet man:

$$\frac{p_2}{p_2 - a_2} = [\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{m-1}, \beta_m],$$

wo jetzt $(p_2 - a_2)$ wieder gerade ist, und bestimmt

$$\frac{p_3}{a_3} = [\beta_{m-1}, \beta_{m-2}, \ldots, \beta_2, \beta_1].$$

Da in diesem Falle, wie in § 2 gezeigt, $\varepsilon_1 = 1$ ist, so kann m nicht größer sein als $(n-1)$. Die neue Kette $\frac{p_3}{a_3}$ hat dann höchstens $(n-3)$ Glieder. Man erkennt, daß durch Fortsetzung des Verfahrens die Gliederzahl der Ketten immer kleiner wird, bis man schließlich zu einer eingliedrigen Kette kommt. Es soll dieses Verfahren als Abbau der gegebenen Kette $\frac{p_1}{a_1}$ bezeichnet werden, und wir können somit den Satz aussprechen:

[1]) Statt „Kettenbruch" sagen wir kürzer „Kette".

Der Abbau der Kette

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$$

führt stets auf eine eingliedrige Kette.

Wir haben daher noch zu untersuchen, welche eingliedrigen Ketten möglich sind.

Sei $\frac{p}{a} = [\varepsilon]$ eine eingliedrige Kette mit der Eigenschaft

$$a^2 \equiv 2 \pmod{p}.$$

Aus $p = \varepsilon$, $a = 1$ folgt:

$$1^2 \equiv 2 \pmod{\varepsilon};$$

also ist $\varepsilon = 1$.

Es gibt somit nur eine eingliedrige Kette von der verlangten Eigenschaft:

$$\frac{p}{a} = [1], \text{ also } p = 1, \quad a = 1.$$

Man kann nun auch umgekehrt verfahren und aus einer gegebenen Kette $\frac{p}{a}$ eine neue herleiten mit größerer Gliederzahl.

Sei $\frac{p}{a} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$, $a^2 \equiv 2 \pmod{p}$.

Ist $a \equiv 0 \pmod 2$, so ist die neue Kette

$$\frac{P}{A} = [\varkappa, \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_0, 2\varkappa]$$

und $A^2 \equiv 2 \pmod{P}$.

Ist dagegen $a \equiv 1 \pmod 2$, so ist die neue Kette

$$\frac{P}{A} = [\varkappa, \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_0, 2\varkappa + 1].$$

So ist man imstande, aus der einzigen eingliedrigen Kette alle Ketten überhaupt abzuleiten. Dieses Verfahren soll als Aufbau der Ketten bezeichnet werden.

Aufstellung der Ketten.

I. Die 3-gliedrigen Ketten.

Aus $\frac{p}{a} = [1]$ folgt, da hier a ungerade ist, die einzige 3-gliedrige Kette

1) $\frac{P}{A} = [\varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 1]$, wobei $A \equiv 0 \pmod 2$ ist.

Ist $\varepsilon_0 > 1$, so wird

$$\frac{P}{P-A} = [1, \varepsilon_0 - 1, 1, 2\varepsilon_0, 1], \text{ also 5-gliedrig.}$$

Nur wenn $\varepsilon_0 = 1$ ist, so erhält man

2) $\frac{P}{A_1} = \frac{P}{P-A} = [2, 2, 1]$

als einzige 3-gliedrige Kette, in der $A_1 = P - A$ ungerade ist.

II. Die 5-gliedrigen Ketten.

Erster Fall: A gerade.

Aus $\frac{p}{a} = [\varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 1]$, $a \equiv 0 \pmod 2$ folgt

1) $\frac{P}{A} = [\varepsilon_1, 2\varepsilon_0 + 1, 1, \varepsilon_0, 2\varepsilon_1]$.

Aus $\frac{p}{a} = [2, 2, 1]$, $a \equiv 1 \pmod 2$ erhält man

2) $\frac{P}{A} = [\varepsilon_1, 1, 2, 2, 2\varepsilon_1 + 1]$.

Zweiter Fall: A ungerade.

Jetzt setzt man in den erhaltenen 5-gliedrigen Ketten $\varepsilon_1 = 1$ und bildet $\frac{P}{P-A} = \frac{P}{A_1}$. Es ist entsprechend den obigen beiden Fällen

1) $\frac{P}{A_1} = [2\varepsilon_0 + 2, 1, \varepsilon_0, 1, 1]$,

2) $\frac{P}{A_1} = [2, 2, 2, 2, 1]$.

Aus der 3-gliedrigen Kette

$$\frac{P}{A} = [\varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 1] \text{ geht hervor für } \varepsilon_0 > 1:$$

$$3) \quad \frac{P}{A_1} = [1, \varepsilon_0 - 1, 1, 2\varepsilon_0, 1].$$

III. Die 7-gliedrigen Ketten.

α) $A \equiv 0 \pmod 2$. Aus den beiden Fällen von II erhält man die 5 Ketten

$$1) \quad \frac{P}{A} = [\varepsilon_2, 2\varepsilon_1, \varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 1, \varepsilon_1, 2\varepsilon_2],$$

$$2) \quad \frac{P}{A} = [\varepsilon_2, 2\varepsilon_1 + 1, 2, 2, 1, \varepsilon_1, 2\varepsilon_2],$$

$$3) \quad \frac{P}{A} = [\varepsilon_2, 1, 1, \varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 2, 2\varepsilon_2 + 1],$$

$$4) \quad \frac{P}{A} = [\varepsilon_2, 1, 2, 2, 2, 2, 2\varepsilon_2 + 1],$$

$$5) \quad \frac{P}{A} = [\varepsilon_2, 1, 2\varepsilon_0, 1, \varepsilon_0 - 1, 1, 2\varepsilon_2 + 1].$$

β) $A \equiv 1 \pmod 2$. Setzt man in den eben erhaltenen 7-gliedrigen Ketten $\varepsilon_2 = 1$ und bildet $\frac{P}{P - A}$, so erhält man die 5 neuen Ketten

$$1) \quad \frac{P}{A_1} = [2\varepsilon_1 + 1, \varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 1, \varepsilon_1, 1, 1],$$

$$2) \quad \frac{P}{A_1} = [2\varepsilon_1 + 2, 2, 2, 1, \varepsilon_1, 1, 1],$$

$$3) \quad \frac{P}{A_1} = [2, 1, \varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 2, 2, 1],$$

$$4) \quad \frac{P}{A_1} = [2, 2, 2, 2, 2, 2, 1],$$

$$5) \quad \frac{P}{A_1} = [2, 2\varepsilon_0, 1, \varepsilon_0 - 1, 1, 2, 1].$$

Außerdem erhält man aus den beiden 5-gliedrigen Ketten mit geradem A noch zwei weitere 7-gliedrige Ketten, wenn man dort $\varepsilon_1 > 1$ setzt und $\frac{P}{P-A}$ bildet:

6) $$\frac{P}{A_1} = [1, \varepsilon_1 - 1, 2\varepsilon_0 + 1, 1, \varepsilon_0, 2\varepsilon_1 - 1, 1],$$

7) $$\frac{P}{A_1} = [1, \varepsilon_1 - 1, 1, 2, 2, 2\varepsilon_1, 1].$$

Die Kongruenz $a_1^2 \equiv -2 \pmod{p_1}$.

In der Kette

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$$

nimmt man n ungerade. Die für gerades n durchgeführten Betrachtungen gelten ganz entsprechend für ungerades n, so daß sich ihre Durchführung hier erübrigt. Der Hauptunterschied ist der, daß die einfachste Kette jetzt zweigliedrig ist, und daß es diesmal zwei solcher Ketten gibt.

Zum Aufbau der Ketten seien folgende Beispiele gegeben:

I. Die 2-gliedrigen Ketten.

$\alpha)$ $a_1 \equiv 0 \pmod 2$: $\quad \frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, 2\varepsilon_0]$.

$\beta)$ $a_1 \equiv 1 \pmod 2$: $\quad \frac{p_1}{a_1} = [2, 1]$.

II. Die 4-gliedrigen Ketten.

$\alpha)$ $a_1 \equiv 0 \pmod 2$:

1) $\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_1, 2\varepsilon_0, \varepsilon_0, 2\varepsilon_1]$,

2) $\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_1, 1, 2, 2\varepsilon_1 + 1]$.

$\beta)$ $a_1 \equiv 1 \pmod 2$:

1) $\frac{p_1}{a_1} = [2\varepsilon_0 + 1, \varepsilon_0, 1, 1]$

2) $\frac{p_1}{a_1} = [2, 2, 2, 1]$,

3) $\frac{p_1}{a_1} = [1, \varepsilon_0 - 1, 2\varepsilon_0 - 1, 1]$.

§ 4.

Die Ketten und ihr Zusammenhang mit quadratischen Formen.

Sei

$$1) \qquad a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1}, \qquad a_1 \equiv 0 \pmod 2,$$

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n], \qquad \frac{p_1}{b_1} = [\varepsilon_n, \varepsilon_{n-1}, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_0],$$

$$\frac{p_2}{a_2} = [\varepsilon_{n-1}, \varepsilon_{n-2}, \ldots, \varepsilon_2, \varepsilon_1].$$

Nach § 2 Gl. 4) ist $a_1 b_1 - p_1 p_2 = 1$ und also wegen $a_1 = 2 b_1$:

$$2) \qquad a_1^2 - 2 p_1 p_2 = 2.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die quadratischen Formen

$$\begin{cases} p_1 x^2 \pm 2 a_1 x y + 2 p_2 y^2, \\ 2 p_1 x^2 \pm 2 a_1 x y + p_2 y \end{cases}$$

oder in der üblichen Abkürzung

$$(p_1, \pm a_1, 2 p_2) \quad \text{und} \quad (2 p_1, \pm a_1, p_2)$$

die Determinante $D = 2$ besitzen.

Von der Kongruenz 1) gelangt man nach den Ausführungen des § 1 zu einer neuen Kongruenz $a_2^2 \equiv 2 \pmod{p_2}$, zu der wieder quadratische Formen gehören, und indem man das Verfahren fortsetzt, erhält man eine Reihe von Kongruenzen

$$\begin{aligned} a_1^2 &\equiv 2 \pmod{p_1}, \\ a_2^2 &\equiv 2 \pmod{p_2}, \\ &\cdots\cdots \\ a_n^2 &\equiv 2 \pmod{p_n}, \end{aligned}$$

denen jeweils quadratische Formen mit der Determinante $D = 2$ entsprechen. Alle auftretenden quadratischen Formen sind nun untereinander äquivalent, und wir wollen die Substitutionen aufsuchen, durch welche eine Form in die andere übergeführt wird. Zugleich erhält man dabei die Darstellungen der Zahl p_1 durch die Formen $(2, 0, -1)$ resp. $(1, 0, -2)$.

Wir benützen dazu den Begriff der benachbarten Form[1]).

[1]) Vgl. Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, § 63, 3. Aufl.

Zu jeder quadratischen Form lassen sich benachbarte Formen finden (a', b', a''), für welche

$$b' + b \equiv 0 \pmod{a'} \text{ ist.}$$

Wenn dann $b' + b = -a'\delta$ gesetzt wird, so geht die Form (a, b, a') durch die Substitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix}$ über in die Form (a', b', a''). Wir wollen abgekürzt schreiben:

$$(a, b, a') \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta \end{pmatrix} \to (a', b', a'').$$

Wir wollen im folgenden auch nur eigentliche Substitutionen betrachten, da die uneigentlichen Substitutionen aus diesen leicht herzuleiten sind.

I. $a_2 \equiv 0 \pmod 2$, $\quad \varepsilon_n = 2\varepsilon_0$.

A) Äquivalenz der Formen

$$(p_1, \pm a_1, 2p_2) \text{ und } (2p_2, \mp a_2, p_3).$$

Nach § 2 Gl. 3) und 6) ist

$$a_1 = B_n, \quad a_2 = B_{n-2}, \quad p_2 = B_{n-1}.$$

Es ist $\quad B_n = \varepsilon_n \cdot B_{n-1} + B_{n-2},$

$$a_1 = \varepsilon_n \cdot p_2 + a_2,$$
$$a_1 = 2\varepsilon_0 \cdot p_2 + a_2.$$

Daraus folgt:

3)
$$\begin{cases} -a_2 + a_1 = \varepsilon_0 \cdot 2p_2, \\ a_2 - a_1 = -\varepsilon_0 \cdot 2p_2. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bedeuten folgende Äquivalenzen:

4) $$(p_1, \pm a_1, 2p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \to (2p_2, \mp a_2, p_3).$$

Nach Gl. 3) ist auch

$$\pm (2p_2 - a_2) \pm a_1 = \pm (\varepsilon_0 + 1) \cdot 2p_2,$$

5) $$(p_1, \pm a_1, 2p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & \varepsilon_0 + 1 \end{pmatrix} \to (2p_2, \pm (2p_2 - a_2), p_3).$$

B) Äquivalenz der Formen

$$(2p_1, \pm a_1, p_2) \text{ und } (p_2, \mp a_2, 2p_3).$$

Wegen $a_1 = 2\varepsilon_0 \cdot p_2 + a_2$ ist

6) $$\begin{cases} -a_2 + a_1 = 2\varepsilon_0 \cdot p_2, \\ a_2 - a_1 = -2\varepsilon_0 \cdot p_2. \end{cases}$$

Somit

7) $$(2p_1, \pm a_1, p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 2\varepsilon_0 \end{pmatrix} \to (p_2, \mp a_2, 2p_3).$$

Ferner ist nach 6)

$$\pm (p_2 - a_2) \pm a_1 = \pm (2\varepsilon_0 + 1) \cdot p_2,$$

8) $$(2p_1, \pm a_1, p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 2\varepsilon_0 + 1 \end{pmatrix} \to (p_2, \pm (p_2 - a_2), p_3).$$

II. $a_2 \equiv 1 \pmod 2$, $\varepsilon_n = 2\varepsilon_0 + 1$.

A) Äquivalenz der Formen

$$(p_1, \pm a_1, 2p_2) \text{ und } (2p_2, \pm (p_2 \mp a_2), p_3).$$

Aus

$$a_1 = \varepsilon_n \cdot p_2 + a_2 = (2\varepsilon_0 + 1)p_2 + a_2 = (\varepsilon_0 + 1) \cdot 2p_2 + (a_2 - p_2),$$

ergibt sich die Äquivalenz:

9) $$(p_1, \pm a_1, 2p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & \varepsilon_0 + 1 \end{pmatrix} \to (2p_2, \pm (p_2 - a_2), p_3).$$

Wegen $a_1 = (2\varepsilon_0 + 1)p_2 + a_2 = \varepsilon_0 \cdot 2p_2 + (p_2 + a_2)$ ist

10) $$(p_1, \pm a_1, 2p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & \varepsilon_0 \end{pmatrix} \to (2p_2, \mp (p_2 + a_2), p_3).$$

B) Äquivalenz der Formen

$$(2p_1, \mp a_1, p_2) \text{ und } (p_2, \mp a_2, p_3).$$

Aus der Gleichung $a_1 = (2\varepsilon_0 + 1)p_2 + a_2$ folgt:

11) $$(2p_1, \pm a_1, p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 2\varepsilon_0 + 1 \end{pmatrix} \to (p_2, \mp a_2, p_3),$$

und aus $a_1 = (2\varepsilon_0 + 1)p_2 + a_2 = (2\varepsilon_0 + 2)p_2 + a_2 - p_2$ analog:

12) $$(2p_1, \pm a_1, p_2) \to \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 2\varepsilon_0 + 2 \end{pmatrix} \to (p_2, \pm (p_2 - a_2), p_3).$$

Ergebnis: Besteht für zwei Zahlen p_1 und a_1 die Kongruenz $a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1}$, wo $a_1 \equiv 0 \pmod 2$,

so ergeben sich aus der Kettenbruchentwicklung

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n]$$

Substitutionen, welche die quadratischen Formen $(p_1, \pm a_1, 2p_2)$ und $(2p_1, \pm a_1, p_2)$ überführen in äquivalente Formen, welche zu höchstens $(n-1)$-gliedrigen Ketten gehören, und welche man so auswählen kann, daß das neue Mittelglied a_2 wieder gerade ist. Da man beim Abbau der Kette für $\frac{p_1}{a_1}$ schließlich auf eine eingliedrige Kette kommt, so müssen die quadratischen Formen $(p_1, +a_1, 2p_2)$ und $(2p_1, +a_1, p_2)$ äquivalent sein zu denjenigen quadratischen Formen, welche der eingliedrigen Kette

$$\frac{p}{a} = [1]$$

zugeordnet werden können. Das sind aber die beiden Formen $(1, 0, -2)$ und $(2, 0, -1)$. Der Abbau liefert gleichzeitig die Substitutionen, durch welche diese Formen übergeführt werden in die Formen $(p_1, \pm a_1, 2p_2)$ und $(2p_1, +a_1, p_2)$.

Damit erhält man dann auch eine Darstellung der Zahlen p_1 resp. $2p_1$ durch die Formen $(x^2 - 2y^2)$ oder $(2x^2 - y^2)$.

Man wird zweckmäßig so vorgehen, daß man gleichzeitig mit dem Aufbau der Ketten, der sich aus der eingliedrigen Kette $\frac{p}{a} = [1]$ entwickelt und der im § 2 dargestellt ist, auch die Substitutionen bestimmt, welche die mit den Ketten entstehenden quadratischen Formen mit den Formen $(1, 0, -2)$ und $(2, 0, -1)$ verknüpfen. So erhält man mit allen $(n+1)$-gliedrigen Ketten auch alle zugehörigen Substitutionen und damit auch alle Zahlen p_1 oder $2p_1$ in der Form $(x^2 - 2y^2)$ resp. $(2x^2 - y^2)$.

Für die 3- und 5-gliedrigen Ketten sollen die Resultate angegeben werden.

I. Die 3-gliedrige Kette.

Es war $\begin{matrix} p_1 \\ a_1 \end{matrix} = [\varepsilon_0, 1, 2\varepsilon_0 + 1].$

Man findet

$$(2, 0, -1) \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_0 + 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow (p_1, a_1, 2),$$

$$p_1 = 2 \cdot (\varepsilon_0 + 1)^2 - 1^2.$$

II. Die 5-gliedrigen Ketten.

1) $$\begin{matrix} p_1 \\ a_1 \end{matrix} = [\varepsilon_1, 2\varepsilon_0 + 1, 1, \varepsilon_0, 2\varepsilon_1],$$

$$(1, 0, -2) \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1(2\varepsilon_0 + 2) + 1 & 2\varepsilon_0 + 2 \\ \varepsilon_1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (p_1, a_1, 2p_2);$$

also: $$p_1 = [\varepsilon_1(2\varepsilon_0 + 2) + 1]^2 - 2 \cdot \varepsilon_1^2,$$

2) $$\begin{matrix} p_1 \\ a_1 \end{matrix} = [\varepsilon_1, 1, 2, 2, 2\varepsilon_1 + 1],$$

$$(1, 0, -2) \rightarrow \begin{pmatrix} 4\varepsilon_1 + 3 & 4 \\ -(\varepsilon_1 + 1) & -1 \end{pmatrix} \rightarrow (p_1, a_1, 2p_2);$$

also diesmal: $$p_1 = (4\varepsilon_1 + 3)^2 - 2(\varepsilon_1 + 1)^2.$$

§ 5.

Kettenbrüche mit kulminierender Periode.

In § 3 sind die Ketten aufgestellt worden, welche der in § 1 angegebenen Bedingungsgleichung

1) $$2A_{n-1} = B_n$$

genügen. Mit Benützung der Gleichungen 2) und 3) des § 1

2) $$\lambda = x \cdot A_n - (-1)^n \cdot A_{n-1} \cdot B_{n-1},$$

3) $$D = \lambda^2 + 4x A_{n-1} - (-1)^n \cdot 2 \cdot B_{n-1}^2$$

erhält man schließlich diejenigen Zahlen D, deren Quadratwurzel eine kulminierende Periode besitzt.

Verwendet man die Bezeichnungen § 2, Gl. 3), so erhält man für λ und D die Ausdrücke

4) $$\lambda = p_1 x - (-1)^n \cdot b_1 \cdot p_2,$$

5) $$D = \lambda^2 + 4b_1 x - (-1)^n \cdot 2p_2^2.$$

Setzt man in 5) den Wert von λ aus 4) ein, so kommt

6) $$D = p_1^2 x^2 + 2x \cdot \{(-1)^{n+1} \cdot b_1 \cdot p_1 \cdot p_2 + 2 b_1\} + p_2^2 \cdot \{b_1^2 - 2(-1)^n\}.$$

Der Ausdruck für D ist eine quadratische Form, in der $y = 1$ gesetzt ist. Es gelten die beiden folgenden Sätze, deren einfacher Beweis hier übergangen werden soll.

I. Die quadratische Form für D hat die Determinante $A = (-1)^n \cdot 2$.

II. Die quadratische Form für D entsteht durch Komposition der Form $(p_1, a_1, 2p_2)$ mit sich selbst.

Für den Fall, daß n gerade ist, soll noch die Darstellung der Zahl D durch die Form $(1, 0, -2)$ angegeben werden. Der Fall für ungerades n erledigt sich in ganz entsprechender Weise. Wir setzen zur Abkürzung in 6)

$$\begin{aligned} -b_1 p_1 p_2 + 2 b_1 &= A_1, \\ p_2^2 - (b_1^2 - 2) &= P_1. \end{aligned}$$

Dann liegt die quadratische Form (p_1^2, A_1, P_1) vor, und wir fragen nach der Substitution, durch welche die Form $(1, 0, -2)$ übergeführt wird in die Form (p_1^2, A_1, P_1).

Im § 4 ist gezeigt worden, wie die Substitutionen zu finden sind, durch welche die Form $(1, 0, -2)$ in die Form $(p_1, a_1, 2p_2)$ oder in die Form $(2p_1, a_1, p_2)$ übergeht.

Wir behandeln beide Fälle getrennt.

I. Fall.

Sei

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

die Substitution, durch welche die Form $(1, 0, -2)$ übergeht in die Form $(p_1, a_1, 2p_2)$, und sei $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

Es bestehen dann die Gleichungen

7) $$\left\{ \begin{aligned} p_1 &= \alpha^2 - 2\gamma^2, \\ 2p_2 &= \beta^2 - 2\delta^2, \\ a_1 &= \alpha\beta - 2\gamma\delta. \end{aligned} \right. \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = +1)$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt, daß β gerade sein muß:

$$\beta = 2\beta'.$$

Die drei Gleichungen gehen daher über in:

$$8) \qquad \begin{cases} p_1 = a^2 \quad - 2\gamma^2, \\ p_2 = 2\beta'^2 - \delta^2, \\ b_1 = a\beta' \quad - \gamma\delta. \end{cases}$$

Setzt man

$$9) \qquad T = \begin{pmatrix} a^2 + 2\gamma^2 & -(\delta^2 + 2\beta'^2)\, b_1 + 4\delta\beta' \\ 2a\gamma & (\delta^2 + 2\beta'^2) - 2\delta\beta' b_1 \end{pmatrix},$$

so findet man $|T| = +1$ und

$$(1, 0, -2) \cdot T = (p_1^2, A_1, P_1).$$

Für die Zahl D folgt deshalb die Darstellung, die man auch unmittelbar durch Einsetzen von 8) in 6) bestätigen kann:

$$10) \qquad \begin{aligned} D = \{(a^2 + 2\gamma^2)\cdot x - (\delta^2 + 2\beta'^2) b_1 + 4\delta\beta'\}^2 - 2\cdot\{2a\gamma x \\ + \delta^2 + 2\beta'^2 - 2\delta\beta'\cdot b_1\}^2. \end{aligned}$$

II. Fall.

Sei $S = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ die Substitution, durch welche die Form $(1, 0, -2)$ übergeht in die Form $(2p_1, a_1, p_2)$.

Dann ist

$$11) \qquad \begin{cases} 2p_1 = a^2 - 2\gamma^2, \\ p_2 = \beta^2 - 2\delta^2, \\ a_1 = a\beta - 2\gamma\delta, \end{cases} \quad \text{oder wegen } a = 2a': \quad 12) \qquad \begin{cases} p_1 = 2a'^2 - \gamma^2, \\ p_2 = \beta_2 - 2\delta^2, \\ b_1 = a'\beta - \gamma\delta. \end{cases}$$

Man erhält jetzt

$$12) \qquad T = \begin{pmatrix} \gamma^2 + 2a'^2 & -(\beta^2 + 2\delta^2) b_1 + 4\beta\delta \\ 2a'\gamma & \beta^2 + 2\delta^2 - 2\delta\beta b_1 \end{pmatrix}; \quad |T| = +1$$

und

$$(1, 0, -2) \cdot T = (p_1^2, A_1, P_1),$$

$$13) \qquad \begin{aligned} D = [(\gamma^2 + 2a'^2)\, x - (\beta^2 + 2\delta^2)\cdot b_1 + 4\beta\delta]^2 - 2[2a'\gamma x \\ + \beta^2 + 2\delta^2 - \beta\delta b_1]^2. \end{aligned}$$

§ 6.

Kettenbrüche mit fastkulminierender Periode.

Wir untersuchen die Kongruenz

1) $$\mathfrak{a}_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1},$$

wo $\mathfrak{a}_1$ eine ungerade, positive Zahl kleiner als p_1 sein soll. Sei

2) $$\frac{p_1}{\mathfrak{a}_1} = \frac{A_n}{B_n} = [\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}, \varrho_n] \quad (n \text{ gerade}).$$

Wir setzen:

3) $$\begin{aligned} A_n &= p_1, & A_{n-1} &= b_1, \\ B_n &= \mathfrak{a}_1, & B_{n-1} &= \mathfrak{m}_1. \end{aligned}$$

Dann ist

4) $$p_1 \cdot \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{a}_1 \cdot b_1 = -1.$$

Aus 1) folgt eine Gleichung

5) $$\mathfrak{a}_1^2 = 2 + p_1 \cdot \mathfrak{p}_2,$$

welche die quadratische Form festlegt:

$$(p_1, +\mathfrak{a}_1, \mathfrak{p}_2).$$

$\mathfrak{p}_2$ muß eine ungerade Zahl sein, die wir aus den Gleichungen 3) bestimmen wollen.

Die diophantische Gleichung

$$\mathfrak{a}_1 \cdot \xi - p_1 \cdot \eta = 1$$

hat nach 4) die Lösungen:

$$\begin{aligned} \xi &= b_1 + k \cdot p_1, \\ \eta &= \mathfrak{m}_1 + k \cdot \mathfrak{a}_1, \end{aligned} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Die Lösungen der Gleichung

$$\mathfrak{a}_1 x - p_1 \cdot y = 2 \text{ sind dann}$$

6) $$\begin{aligned} y &= 2\,\mathfrak{m}_1 + k \cdot \mathfrak{a}_1, \\ x &= 2\,b_1 + k \cdot p_1, \end{aligned} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Der Vergleich mit Gleichung 5) ergibt, daß ein ganzzahliger Wert k vorhanden sein muß, für welchen gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 &= 2\,b_1 + k \cdot p_1, \\ \mathfrak{p}_2 &= 2\,\mathfrak{m}_1 + k \cdot \mathfrak{a}_1. \end{aligned}$$

Da a_1 positiv und kleiner als p_1 angenommen ist, so kann nicht $k > 1$ sein. Auch $k = 0$ ist unmöglich, da sonst a_1 gerade wäre. Es bleibt nur der Wert

$$k = -1,$$

und damit erhalten wir die beiden Gleichungen:

7) $$a_1 + p_1 = 2 b_1,$$

8) $$p_2 = 2 m_1 - a_1.$$

Gleichung 7) ist nichts anderes als die Bedingungsgleichung, welche nach § 1; 4) zu dem Satz II von Muir gehört.

Jede Kette

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1}, \varrho_n], \quad a_1 \qquad 1 \pmod 2,$$

welche zur Kongruenz gehört:

$$a_1^2 \equiv 2 \pmod{p_1},$$

erfüllt demnach die Muirsche Bedingung

$$2 A_{n-1} = B_n + A_n$$

und liefert daher einen Kettenbruch mit fastkulminierender Periode.

In § 3 sind diese Ketten aufgestellt worden, für welche a_1 ungerade ist und zwar für gerades n. Die Ketten für ungerades n erhält man in ganz entsprechender Weise, wie die Beispiele am Ende des § 3 zeigen.

Damit ist die Aufgabe gelöst, alle Kettenbrüche mit fastkulminierenden Perioden zu finden.

Die Zahlen D, deren Quadratwurzeln eine fastkulminierende Periode besitzen, erhält man nach § 1 aus den beiden Gleichungen:

9) $$\lambda = \frac{1 + (2x + 1) A_n}{2} - (-1)^n A_{n-1} \cdot B_{n-1},$$

10) $$D = \lambda^2 + (2x + 1) B_n - (-1)^n \cdot 2 \cdot B_{n-1}^2.$$

Benützt man die Bezeichnungen nach Gl. 3) und ersetzt in 10) die Zahl λ durch ihren Wert aus 9), so erhält man:

11) $$D = p_1^2 x^2 + x \cdot \{p_1^2 + p_1 - 2 (-1)^n b_1 \cdot m_1 \cdot p_1 + 2 a_1\} + \\ + \left(\frac{1 + p_1}{2}\right)^2 - (-1)^n b_1 \cdot m_1 \cdot p_1 - (-1)^n b_1 \cdot m_1 + \\ + b_1^2 m_1^2 - (-1)^n \cdot 2 m_1^2 + a_1.$$

Es wird D dargestellt durch eine quadratische Form, in der $y = 1$ gesetzt ist, und es gelten folgende zwei Sätze:

I. Die quadratische Form für D hat die Determinante

$$A = (-1)^n \cdot 2.$$

II. Die quadratische Form für D entsteht durch Komposition der quadratischen Form $(p_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{p}_2)$ mit sich selbst.

Der Beweis soll hier übergangen werden.

Zum Schlusse sollen noch die Formeln zur Darstellung der Zahlen D in der Form $(x^2 - 2y^2)$ gegeben werden.

Wir schreiben zur Abkürzung

$$D = p_1^2 x^2 + 2\mathfrak{N}_1 x + \mathfrak{P}_1.$$

Aus jeder Kette

$$\frac{p_1}{a_1} = [\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n] \text{ mit geradem } a_1$$

erhält man eine Kette

$$\frac{p_1}{p_1 - a_1} = \frac{p_1}{\mathfrak{a}_1} = [\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{m-1}, \varrho_m] \text{ mit ungeradem } \mathfrak{a}_1.$$

Der ersten Kette war die quadratische Form $(p_1, a_1, 2p_2)$ zugeordnet worden, durch deren Komposition mit sich selbst die quadratische Form (p_1^2, A_1, P_1) entsteht, wie in § 5 ausgeführt wurde.

Der zweiten Kette wird eine quadratische Form $(p_1, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{p}_2)$ zugeordnet, durch deren Komposition mit sich selbst die quadratische Form entsteht: $(p_1^2, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1)$.

Die Werte für $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{P}_1$ sind der Gl. 11) dieses Paragraphen zu entnehmen.

Es kann nun gezeigt werden, daß für die quadratischen Formen (p_1^2, A_1, P_1) und $(p_1^2, \mathfrak{N}_1, \mathfrak{P}_1)$ die Beziehung besteht:

12) $$A_1 + \mathfrak{N}_1 = -p_1^2 \cdot \left(\mathfrak{p}_2 + \frac{p_2 - 1}{2}\right).$$

Der Beweis soll hier übergangen werden.

Diese Gleichung sagt aus, daß die beiden obigen quadratischen Formen als benachbarte Formen äquivalent sind.

Setzt man $\mathfrak{p}_2 + \frac{p_2 - 1}{2} = \sigma$, so geht die Form (P_1, A_1, p_1^2) durch die Substitution $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma \end{pmatrix}$ über in die Form $(p_1^2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{P}_1)$.

Im § 5 war eine Substitution T aufgestellt worden, durch welche die Form $(1, 0, -2)$ übergeht in die Form (p_1^2, A_1, P_1):

$$(1, 0, -2) \sim T \sim (p_1^2, A_1, P_1).$$

Dann folgt

$$(1, 0, -2) \sim T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim (P_1, A_1, p_1^2) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma \end{pmatrix} \sim (p_1^2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{P}_1),$$

oder $$(1, 0, -2) \sim T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma \end{pmatrix} \sim (p_1^2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{P}_1).$$

Setzt man $$T \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \sigma \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} -1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = T \cdot U,$$

so ist schließlich

$$(1, 0, -2) \sim T \cdot U \sim (p_1^2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{P}_1).$$

Entsprechend den beiden Fällen des § 5 erhalten wir für die Zahlen D, deren Quadratwurzeln fastkulminierende Perioden liefern, die folgenden Darstellungen durch die Form $(1, 0, -2)$.

I. Fall.

Sei $$p_1 = \alpha^2 - 2\gamma^2, \qquad 2p_2 = \beta^2 - 2\delta^2, \qquad \beta = 2\beta'.$$

Dann ist

$$T \cdot U = \begin{pmatrix} -(\alpha^2 + 2\gamma^2) & (\alpha^2 + 2\gamma^2)\sigma - (\delta^2 + 2\beta'^2)b_1 + 4\delta\beta' \\ -2\alpha\gamma & 2\alpha\gamma\sigma + (\delta^2 + 2\beta'^2) - 2\delta\beta' b_1 \end{pmatrix},$$

$$D = [(\alpha^2 + 2\gamma^2)x - (\alpha^2 + 2\gamma^2)\sigma + (\delta^2 + 2\beta'^2)b_1 - 4\delta\beta']^2 - 2 \cdot [2\alpha\gamma x - 2\alpha\gamma\sigma - (\delta^2 + 2\beta'^2) + 2\delta\beta' b_1]^2.$$

II. Fall.

Sei $$2p_1 = \alpha^2 - 2\gamma^2, \qquad p_2 = \beta^2 - 2\delta^2, \qquad \alpha = 2\alpha'.$$

Dann ist

$$T \cdot U = \begin{pmatrix} -(\gamma^2 + 2\alpha'^2) & (\gamma^2 + 2\alpha'^2)\sigma - (\beta^2 + 2\delta^2)b_1 + 4\beta\delta \\ -2\alpha'\gamma & 2\alpha'\gamma\sigma + (\beta^2 + 2\delta^2) - 2\delta\beta b \end{pmatrix},$$

$$D = [(\gamma^2 + 2\alpha'^2)x - (\gamma^2 + 2\alpha'^2)\sigma + (\beta^2 + 2\delta^2)b_1 - 4\beta\delta]^2 - 2 \cdot [2\alpha'\gamma x - 2\alpha'\gamma\sigma - (\beta^2 + 2\delta^2)b_1 + 2\delta\beta b_1]^2.$$