Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1926. Heft I
Januar- bis Märzsitzung

München 1926
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über den Zusammenhang der Theorie der absoluten optischen Instrumente mit einem Satze der Variationsrechnung.

Von C. Carathéodory.

Vorgelegt in der Sitzung am 16. Januar 1926.

Inhalt.

§ 1. Einleitung.
§ 2. Historische Übersicht.
§§ 3, 4. Das Maxwell'sche Fischauge.
§§ 5—9. Der allgemeine Abbildungssatz.
§§ 10—15. Die stigmatische Abbildung von Flächen.
§§ 16—18. Die stigmatische Abbildung von isotropen Räumen.
§ 19. Anwendung auf die Variationsrechnung.

1. **Einleitung.** In der folgenden Arbeit wird eine Eigenschaft der absoluten optischen Instrumente, die bisher nur für homogene isotrope Objekträume und ebensolche Bildräume bewiesen worden war, verallgemeinert. Diese Verallgemeinerung, aus der auch der analoge Satz für beliebige symmetrische Variationsprobleme entnommen werden kann, ist sogar viel einfacher und kürzer zu beweisen, als der ursprüngliche Satz selbst.

2. **Historische Übersicht.** Im Jahre 1858 hat J. C. Maxwell mit sehr elementaren Mitteln den Satz bewiesen, daß bei einem „absoluten" optischen Instrument, d. h. bei einem solchen, für welches jeder Punkt des Objektraumes ein scharfes (stigmatisches) Bild im Bildraume erzeugt, das Objekt und das Bild (in Lichtzeit gemessen) gleich groß sein müssen.[1]) Bei dem Beweise

[1]) On the general laws of optical instruments. (Quart. Journ. of pure and applied mathem. 1858, Bd. II, p. 233—244 oder Scientif. Pap. I, p. 271—285), s. bes. Prop. VIII und IX.

hat er allerdings die Größen zweiter Ordnung vernachlässigt, so daß das Resultat zunächst nur für kleine Objekte zu gelten schien. In seiner berühmten Arbeit über das Eikonal[1]) hat später H. Bruns allgemein und streng bewiesen, daß bei absoluter Abbildung das Bild dem Objekt ähnlich oder symmetrisch ist. Dagegen hat aber Bruns nicht hervorgehoben, daß, in Lichtzeit gemessen, Bild und Objekt gleich groß sein müssen, obgleich diese Tatsache eine fast direkte Folge seiner Formeln ist. Diese letzte Konsequenz hat kurz darauf F. Klein gezogen, bei Gelegenheit eines überraschend eleganten Beweises, den er für den betreffenden Satz gegeben hat[2]). Klein benutzt bei seinen Betrachtungen die imaginären „Minimalstrahlen", die, wie er bemerkt, beim Übergang von einem Medium in das andere an der Trennungsfläche nicht gebrochen werden. Einen ebenso einfachen geometrischen Beweis, wie der von Klein, der aber ganz im reellen verläuft, hat endlich H. Liebmann gefunden[3]). Nicht nur dieser letzte Vorzug zeichnet den schönen Beweis von Liebmann aus, sondern vor Allem die Tatsache, daß nur solche Strahlen bei seiner Konstruktion verwendet werden, die wirklich — mag die Öffnung seines Instrumentes noch so eng sein — dieses vollständig durchsetzen. Es ist selbstverständlich, daß eine derartige Beschränkung der Konstruktion durchaus verlangt werden muß[4]).

3. **Das Maxwellsche Fischauge.** Alle diese Beweise setzen wesentlich voraus, daß sowohl der Objektraum wie auch der Bildraum isotrop und homogen sind, so daß nach einem Satze von E. Abbe das betrachtete absolute Instrument eine kollineare Abbildung der beiden Räume aufeinander erzeugt. Nach dem vorhin erwähnten Satz von Maxwell-Bruns-Klein ist dann

[1]) Das Eikonal (Abhandl. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, Bd. 21, 1895, s. bes. p. 370).

[2]) Räumliche Kollineation bei optischen Instrumenten (Ztschr. f. Math. u. Phys. 1901, Bd. 46, p. 376—382 oder Gesamm. Abh., Bd. II, p. 607—612).

[3]) Der allgemeine Malussche Satz und der Brunssche Abbildungssatz (diese Sitzungsber. 1916, p. 183—200).

[4]) Eine sehr gute Zusammenfassung der hier angeführten Ergebnisse hat H. Boegenhold gegeben; man findet sie in der neuen dritten Auflage des Buches von S. Czapski und O. Eppenstein, Grundzüge der optischen Instrumente nach Abbe (Leipzig, J. A. Barth 1924), p. 213—216).

bei einem absoluten Instrument das Bild immer kongruent oder symmetrisch zum Objekt und der ebene Spiegel ist das einzige optische Instrument, das man kennt, welches eine derartige Abbildung hervorruft.

Nun hat Maxwell bemerkt[1]), daß in einem Medium von variierendem Brechungsindex es sehr wohl vorkommen kann, daß alle Strahlen, die durch einen beliebigen Punkt hindurch gehen, sich wieder in einem einzigen Punkte treffen, so daß in einem derartigen Medium jedes hinreichend kleine Objekt wirklich ein stigmatisches Bild besitzt.

Maxwell hat diese Entdeckung bei Gelegenheit des Studiums der kugelförmigen Linse des Auges eines Fisches gemacht, deren Brechungsvermögen er durch folgende Formel bestimmte: bezeichnet man mit r die Entfernung eines Punktes der Augenlinse von ihrem Mittelpunkt, und mit n den Brechungsindex im betreffenden Punkt, so gilt die Gleichung

$$(1) \qquad n = \frac{2ab}{b^2 + r^2},$$

in der a und b positive Konstanten bedeuten. In den 80er Jahren des vorigen Jahrhunderts hat L. Mathiessen durch Messungen an der Augenlinse des Dorsches und anderer Fische gefunden, daß die Maxwellsche Formel (1) recht gut stimmt[2]).

Nun hat Maxwell mit Hilfe von ziemlich eleganten geometrischen Betrachtungen gefunden, daß, wenn man den ganzen Raum mit einem Medium ausfüllt, dessen Brechungsindex dem Gesetze (1) folgt, die Lichtstrahlen alle kreisförmig oder geradlinig werden und daß diejenigen unter ihnen, die von einem Punkte A des Raumes ausgehen, der vom Zentrum O des „Fischauges" verschieden ist, sämtlich wieder in einen zweiten Punkt A_1 des Raumes zusammenlaufen. Hierbei liegt O stets auf der Strecke AA_1 und zerlegt diese Strecke in zwei Intervalle, für welche die Relation

$$(2) \qquad AO \times OA_1 = b^2$$

[1]) Solution of problems, Cambr. and Dubl. math. journ., Vol. 8, 1854, p. 188—193 oder Scient. Pap. I, p. 74—79.

[2]) L. Mathiessen, Über ein merkwürdiges optisches Problem von Maxwell (F. Exners Repert. d. Phys., Bd. 24, 1888, p. 401—407).

gilt. Diese Bedingungen genügen, um sämtliche Lichtstrahlen vollständig zu charakterisieren.

4. Dieses Resultat von Maxwell folgt nun mit einem Schlage aus der Bemerkung, daß in der Gleichung

$$
(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\sigma &= \frac{2ab}{b^2 + r^2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned} \right.
$$

das Differential $d\sigma$, das die optische Länge eines Linienelements im Inneren des Maxwellschen Fischauges definiert, auch als das Linienelement der dreidimensionalen Begrenzung einer vierdimensionalen Kugel gedeutet werden kann, die stereographisch auf den Raum der x, y, z projiziert worden ist. Hierbei muß der Durchmesser der Kugel gleich $2a$ genommen werden und die Entfernung des Raumes der x, y, z vom Projektionszentrum gleich b. Die Extremalen des Variationsproblems, das dem Linienintegral über (3) entspricht, fallen mit den Bildern der Großkreise unserer vierdimensionalen Kugel zusammen. Diese Bilder sind aber die Kreise des Raumes der x, y, z, die zwei diametral entgegengesetzte Punkte der Kugel

$$
x^2 + y^2 + z^2 = b^2
$$

enthalten. Sie sind dadurch charakterisiert, daß ihre Ebene den Anfangspunkt O der Koordinaten enthält und daß die Potenz des Punktes O in Bezug auf jeden einzelnen dieser Kreise stets gleich $-b^2$ ist.

Jedes Paar A, A_1 von konjugierten Punkten, für welches die Beziehung (2) gilt, entspricht einem Paar von diametral entgegengesetzten Punkten unserer vierdimensionalen Kugel. Und da die Entfernung von zwei Punkten der Kugel gleich der Entfernung ihrer Gegenpunkte ist — beide Entfernungen auf der Oberfläche der vierdimensionalen Kugel gemessen, — so folgt für das Variationsproblem (3), daß die extremale Entfernung von zwei Punkten A, B des Raumes der x, y, z gleich der extremalen Entfernung der konjugierten Punkte A_1 und B_1 sein muß.

Hieraus folgt, daß bei der stigmatischen Abbildung, die das „Maxwellsche Fischauge" liefert, jeder Kurve, die auf dem Objekte gezeichnet ist, eine Kurve des Bildes von genau derselben optischen Länge entspricht. Die Abbildung ist zwar nicht mehr kollinear, sie ist aber, wie es der im § 2 erwähnte Satz verlangt, maßstäblich. Wir werden sehen, daß dies eine ganz allgemeine Erscheinung ist, und daß der Satz von Maxwell-Bruns-Klein gar nicht an kollineare Abbildungen gebunden ist.

5. **Der allgemeine Abbildungssatz.** Es sei J ein beliebiges optisches Instrument, das von einem Lichtstrahl ABA_1B_1 durchsetzt wird.

Wir setzen nicht voraus, daß der Objektraum, in dem das Stück AB unseres Lichtstrahls oder der Bildraum, in dem A_1B_1 liegt, homogen sind, so daß unser Lichtstrahl in seinem ganzen Verlauf eine doppelt gekrümmte Kurve sein kann.

Die Linienelemente des Objektraumes, die weder in ihrer Lage noch in ihrer Richtung sehr stark von einem der Linienelemente des Teiles AB unseres Lichtstrahles abweichen, d. h. diejenigen, die, wie man in der Variationsrechnung sagt, einer „engeren Nachbarschaft“ von AB gehören, haben die Eigenschaft, daß jeder Lichtstrahl, der eins dieser Linienelemente enthält, ebenso wie ABA_1B_1 durch beide Pupillen des Instrumentes hindurchgeht und bis in den Bildraum gelangt; wir sagen dann, daß der Lichtstrahl im Felde des Instrumentes liegt.

Es sei γ ein sonst willkürliches Kurvenstück mit stetig variierender Tangente, durch dessen Linienelemente lauter Lichtstrahlen hindurchgehen, die im Felde unseres Instrumentes liegen. Wir wollen dann sagen, daß die Kurve γ tangential im Felde von J liegt. Es ist klar, daß jedes in γ eingeschriebene Lichtpolygon, falls nur seine Seiten hinreichend klein gewählt werden, aus lauter Lichtstrahlen besteht, die im Felde von J liegen.

6. Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen, die uneingeschränkt gelten, nehmen wir an, daß wir ein absolutes Instrument vor uns haben. D. h. wir setzen voraus, daß alle von uns betrachteten Lichtstrahlen, wenn sie von einem Punkte A des Objektraumes ausgehen, sich in einem Punkte A_1 des Bildraumes kreuzen müssen.

Alle unser Instrument durchsetzenden Strahlen, die zwei auf diese Weise einander entsprechende Punkte A und A_1 verbinden, haben dann gleiche optische Länge zwischen diesen Punkten, wie aus einem sehr elementaren und sehr bekannten Satz der Variationsrechnung hervorgeht. Diese optische Entfernung zwischen einem beliebigen Punkte A des Objektraumes und seinem Bildpunkte A_1, die also von der Richtung, die der A mit A_1 verbindende Strahl im Punkte A besitzt, unabhängig ist, wollen wir mit $\varphi(A)$ bezeichnen. Wir werden gleich sehen, daß alles darauf hinauskommt, zu zeigen, daß der Wert dieser Funktion $\varphi(A)$ von der Wahl des Punktes A unabhängig ist.

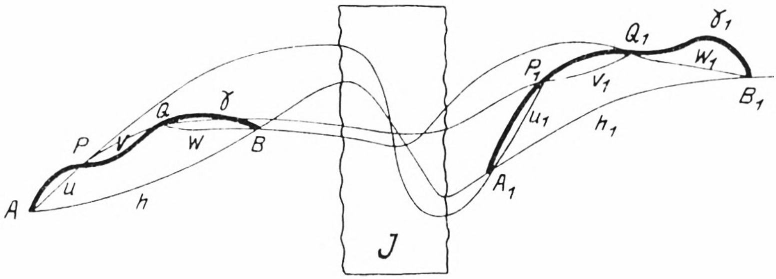
7. Bezeichnen wir mit h die optische Entfernung zwischen A und B und mit h_1 die optische Entfernung zwischen A_1 und B_1, so haben wir nach der unten stehenden Figur

$$h + \varphi(B) = \varphi(A) + h_1$$

oder

$$h_1 = h + \varphi(B) - \varphi(A). \tag{4}$$

Wir betrachten nun eine Kurve γ, die tangential im Felde des optischen Instrumentes liegt (§ 5) und die die Punkte A und B verbindet, und bezeichnen mit γ_1 das Bild von γ.



Es sei $APQB$ ein beliebiges in γ eingeschriebenes Lichtpolygon, dessen Seiten im Felde des Instrumentes liegen, und $A_1P_1Q_1B_1$ sein in γ_1 eingeschriebenes Bild. Dann haben wir, wenn wir mit u, v, w die optischen Längen der Seiten des in γ eingeschriebenen Polygons bezeichnen und mit u_1, v_1, w_1 die optischen Längen der Bilder dieser Seiten, folgende Gleichungen, die ebenso wie die Gleichung (4) gewonnen werden:

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= u + \varphi(P) - \varphi(A), \\ v_1 &= v + \varphi(Q) - \varphi(P), \\ w_1 &= w + \varphi(B) - \varphi(Q). \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, daß, da die beiden Lichtstrahlen ABA_1 und APA_1 dieselbe optische Länge haben, $\varphi(A)$ dieselbe Bedeutung in (4) und in der ersten der Gleichungen (5) hat; genau ebenso sieht man ein, daß die Werte von $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$, $\varphi(B)$ in jeder der beiden Gleichungen (4) oder (5), in der sie vorkommen, dieselbe Zahl darstellen. Durch Addition der Gleichungen (5) erhält man also

$$u_1 + v_1 + w_1 = u + v + w + \varphi(B) - \varphi(A), \tag{6}$$

eine Relation, die besagt, daß die Differenz der optischen Längen des in γ eingeschriebenen Lichtpolygones und seines Bildes gleich $\varphi(B) - \varphi(A)$ ist. Diese Eigenschaft, die unabhängig von der Seitenzahl der eingeschriebenen Polygone ist, kann durch Grenzübergang auf die optischen Längen der Kurven γ und γ_1 übertragen werden und wir erhalten auf diese Weise den

Satz 1. *Für jedes absolute optische Instrument, das die Punkte eines Objektraumes $\mathfrak{R}$ scharf auf die Punkte eines Bildraumes $\mathfrak{R}_1$ abbildet, besteht zwischen den optischen Längen L und L_1 einer beliebigen tangential im Felde des Instruments liegenden Kurve γ und ihres Bildes γ_1 die Relation*

$$L_1 = L + \varphi(B) - \varphi(A); \tag{7}$$

hierbei bedeuten $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ die optischen Entfernungen der Endpunkte A und B von γ von den Endpunkten A_1 und B_1 von γ_1.

8. Der Satz, den wir im Auge haben, wird also bewiesen sein, wenn es gelingt, zu zeigen, daß $\varphi(A) = \varphi(B)$ ist.

Dazu bemerken wir, daß die optischen Längen L und L_1 von γ bzw. γ_1 durch Integrale längs dieser Kurven dargestellt werden können; man kann schreiben:

$$L = \int_\gamma F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt, \tag{8}$$

$$L_1 = \int_{\gamma_1} F_1(x_1, y_1, z_1, \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1)\, dt. \tag{9}$$

Hierbei sind die beiden Kurven γ und γ_1 mit Hilfe eines Parameters t dargestellt und die Funktionen F und F_1 sind homogen erster Ordnung in $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ bzw. in $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$. Diese letzte Bedingung hat bekanntlich zur Folge, daß der Wert der Integrale (8) und (9) unabhängig von der Wahl des Parameters t ist. Die beiden Funktionen F und F_1 können dabei ganz verschieden voneinander sein; nach unseren Voraussetzungen kann z. B. sehr wohl der Objektraum $\mathfrak{R}$ kristallinisch, der Bildraum $\mathfrak{R}_1$ isotrop sein.

Die (stigmatische) Abbildung der beiden Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ aufeinander werde nun durch die Beziehungen

$$x_1 = \xi(x, y, z), \quad y_1 = \eta(x, y, z), \quad z_1 = \zeta(x, y, z) \tag{10}$$

dargestellt. Setzt man

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \xi}{\partial z}\dot{z} \tag{11}$$

und ähnliche Gleichungen für $\frac{d\eta}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$, und führt die Bezeichnung ein

$$\Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = F_1\left(\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}\right), \tag{12}$$

so kann man das Kurvenintegral (9) über γ_1 durch ein Kurvenintegral über γ ersetzen und statt (9) schreiben:

$$L_1 = \int_\gamma \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt. \tag{13}$$

Mit Hilfe von (8) und (13) nimmt also die Gleichung (7) die Gestalt an:

$$\int_\gamma (\Phi - F)\, dt = \varphi(B) - \varphi(A).$$

Diese letzte Gleichung bedeutet aber, daß der Wert eines Kurvenintegrals über $(\Phi - F)$ nur von den Endpunkten A, B, nicht aber von der Gestalt der Kurve γ abhängt. Die Kurve γ ist zwar nicht ganz willkürlich: sie muß tangential im Felde des Instrumentes liegen. Dies hindert uns aber keineswegs, zu schließen, daß die erste Variation des Kurvenintegrals über $(\Phi - F)$ identisch verschwinden muß und daß daher der Ausdruck $(\Phi - F)$ selbst das vollständige Differential einer Funktion $\varphi(x, y, z)$ ist. Wir können also schreiben

$$\Phi - F = \varphi_x \dot{x} + \varphi_y \dot{y} + \varphi_z \dot{z}. \tag{14}$$

9. Ist das Medium des Objektraumes $\mathfrak{R}$ isotrop, so besitzt die Funktion F die Gestalt

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = f(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}; \tag{15}$$

in diesem Falle stellt für feste x, y, z die Gleichung $F = 1$ im Raume der $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ eine Kugel dar. Ist $\mathfrak{R}$ kristallinisch, so muß man die Funktion (15) durch eine kompliziertere ersetzen, derart, daß im Raume der $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ durch die Gleichung $F = 1$ eine Fresnelsche Strahlenfläche dargestellt wird[1]). In allen Fällen haben wir aber die Relation

$$F(x, y, z, -\dot{x}, -\dot{y}, -\dot{z}) = F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \tag{16}$$

(Die Relation (16) würde nur dann nicht mehr gelten, wenn der Objektraum $\mathfrak{R}$ sich unter dem Einflusse eines merkbaren Magnetfeldes befindet.)

Genau ebenso können wir annehmen, daß dieselbe Identität auch für die Funktion F_1 stattfindet; nach den Gleichungen (10), (11) und (12) können wir aber dann schreiben:

$$\Phi(x, y, z, -\dot{x}, -\dot{y}, -\dot{z}) = \Phi(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \tag{17}$$

Ersetzen wir also in (14) die Größen $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ durch $-\dot{x}$, $-\dot{y}$, $-\dot{z}$, so erhalten wir, wegen (16) und (17)

$$\Phi - F = -(\varphi'_x \dot{x} + \varphi'_y \dot{y} + \varphi'_z \dot{z})$$

und durch die Vergleichung dieser letzten Gleichung mit (14)

$$\Phi = F. \tag{18}$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt nun nicht nur für die tangential im Felde liegenden Kurven γ, sondern für jede Kurve C überhaupt, die ein Bild C_1 besitzt, daß die optischen Längen der beiden Kurven einander gleich sind:

Satz 2. Für jedes absolute optische Instrument ist die optische Länge einer Kurve C, deren Punkte im Felde des Instrumentes liegen, gleich der ihres Bildes.

Dies ist aber die Verallgemeinerung des Satzes von Hamilton-Bruns-Klein, die wir im Auge hatten.

10. **Die stigmatische Abbildung von Flächen.** Von einem zweidimensionalen Flächenstück S wollen wir sagen, daß es

---

[1]) Siehe z. B. P. Drude, Lehrbuch der Optik (Leipzig, Hirzel, 1900), p. 303.

tangential im Felde eines Instrumentes J liegt, wenn man durch jeden Punkt P von S mindestens einen Lichtstrahl hindurchlegen kann, der erstens die Fläche S berührt und zweitens das Instrument J durchsetzt.

Wir wollen nun annehmen, daß zwar J kein absolutes Instrument ist, daß aber jeder Punkt des Flächenstückes S ein scharfes punktförmiges Bild besitzt. Es sei jetzt γ ein beliebiges Kurvenstück, das erstens auf S und zweitens tangential im Felde unseres Instrumentes liegt; man bezeichne mit A, B die Endpunkte von γ, mit L die optische Länge dieses Kurvenstückes und mit L_1 die optische Länge seines Bildes. Dann kann man genau wie im § 7 beweisen, daß die Gleichung

$$L_1 = L + \varphi(B) - \varphi(A)$$

besteht.

Die Abbildung zwischen S und seinem Bilde S_1 kann man ausdrücken, indem man S und S_1 mit Hilfe von zwei Parametern u, v derart darstellt, daß ein Punkt P von S und sein Bild P_1 auf S_1 demselben Punkte der Parameterebene der u, v entsprechen. Dann werden die Kurvenstücke γ und γ_1 derselben Kurve C in der uv-Ebene entsprechen und die optischen Längen dieser Kurvenstücke können durch Kurvenintegrale längs C dargestellt werden. Wir werden also schreiben können:

$$L = \int_C \Phi(u, v, \dot{u}, \dot{v})\, dt, \qquad L_1 = \int_C \Phi_1(u, v, \dot{u}, \dot{v})\, dt.$$

Wir können jetzt ähnlich wie im § 8 schließen, daß $(\Phi - \Phi_1)$ ein vollständiges Differential, also von der Form $(\chi_u \dot{u} + \chi_v \dot{v})$ ist; dann folgt wieder aus

$$\begin{cases} \Phi(u, v, -\dot{u}, -\dot{v}) = \Phi(u, v, \dot{u}, \dot{v}), \\ \Phi_1(u, v, -\dot{u}, -\dot{v}) = \Phi_1(u, v, \dot{u}, \dot{v}), \end{cases}$$

daß $\Phi = \Phi_1$ ist. Wir haben m. a. W. den

Satz 3. *Wird ein Flächenstück S, das tangential im Felde eines Instrumentes J liegt, Punkt für Punkt auf ein Flächenstück S_1 des Bildraumes stigmatisch abgebildet, so hat jede beliebige Kurve auf S dieselbe optische Länge wie ihr Bild auf S_1. Die beiden Flächenstücke S und S_1 können also (optisch) aufeinander abgewickelt werden.*

11. Dieses letzte Resultat, das neu zu sein scheint, ist um so merkwürdiger, als es durchaus an die Bedingung gebunden ist, daß S tangential im Felde von J liegt. Es ist nämlich seit langem bekannt[1]), daß man die Strahlen des Objektraumes derart mit den Strahlen des Bildraumes verbinden kann, daß erstens die Bedingung von Malus besteht und daß zweitens zwei gegebene Flächen (die aber nicht tangential im Felde liegen) ganz willkürlich aber stigmatisch aufeinander abgebildet werden. Es ist daher notwendig, den Grund dieser scheinbaren Diskrepanz zu untersuchen. Wir wollen dabei wegen der größeren Übersichtlichkeit voraussetzen, daß Bild- und Objektraum homogen und isotrop sind.

Wir bezeichnen wieder mit S und S_1 die beiden Flächen, die stigmatisch aufeinander abgebildet werden sollen, und definieren diese Abbildung selbst, indem wir wiederum festsetzen, daß durch die Gleichungen

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v), \tag{19}$$

$$x_1 = x_1(u, v), \qquad y_1 = y_1(u, v), \qquad z_1 = z_1(u, v), \tag{20}$$

jedem Punkte der uv-Ebene, innerhalb eines gewissen Gebietes, zwei entsprechende Punkte von S und S_1 zugeordnet worden sind.

Nach Voraussetzung soll also ein Lichtstrahl, der durch den Punkt (19) des Objektraumes hindurchgeht und die Richtungskosinus p, q, r mit den positiven Achsen bildet, nach seinem Durchgang durch das Instrument in einen Strahl des Bildraumes übergehen, der den Punkt (20) enthält und die Richtungskosinus p_1, q_1, r_1 mit den positiven Achsen eines Achsenkreuzes des Bildraumes einschließt. Hierbei sind die Größen p_1, q_1, r_1 Funktionen von p, q, r, u, v, die man, wie schon längst bekannt, mit Hilfe des Malusschen Satzes explizite berechnen kann.

12. Zu diesem Zwecke bezeichnen wir mit $\varphi(u, v)$ die optische Entfernung des Punktes (19) von S von seinem Bild-

[1]) Siehe z. B. Bruns, a. a. O., p. 371—75. Zwar hat E. Abbe gelegentlich behauptet, daß eine stigmatische Abbildung von zwei Flächenstücken aufeinander nur angenähert möglich ist (Ges. Abh., Bd. I, p. 216), aber schon 1890 hat M. Thiesen treffend bemerkt, daß die Behauptung Abbes, aus der Verwechselung von zwei verschiedenen Winkeln entstanden ist (Berl. Sitzungsber. 1890, 2, p. 812).

punkte (20) und mit n bzw. n_1 die Brechungsindizes der beiden Räume $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$. Ferner betrachten wir auf einem Lichtstrahl, der durch das Instrument hindurchgeht, die beiden Punkte

$$(21)\qquad X = x + \lambda \cdot p, \qquad Y = y + \lambda q, \qquad Z = z + \lambda r,$$

$$(22)\qquad X_1 = x_1 + \lambda_1 p_1, \quad Y_1 = y_1 + \lambda_1 q_1, \quad Z_1 = z_1 + \lambda_1 r_1,$$

wobei λ und λ_1 zwei Parameter bedeuten. Die optische Entfernung ϱ der beiden Punkte (21) und (22), von denen der erste im Objekt-, der zweite im Bildraume liegt, ist nun gegeben durch die Gleichung

$$(23)\qquad \varrho = \varphi(u, v) + n_1 \lambda_1 - n \lambda.$$

Wir setzen nun für p, q, r, λ beliebige Funktionen von u und v ein und bestimmen λ_1 durch die Bedingung, daß die Größe ϱ in (23) eine Konstante sein soll. Dann werden die Koordinaten der Punkte (21) und (22) bestimmte Funktionen von u, v sein und diese Punkte selbst bestimmte Flächen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ beschreiben. Der Malussche Satz besagt nun, daß jedesmal, wo die Funktionen von u, v, die wir für p, q, r, λ eingesetzt haben, die Eigenschaft haben, daß die Normalen von $\mathfrak{F}$ in jedem Punkte die Komponenten p, q, r besitzen, gleichzeitig die Normalen von $\mathfrak{F}_1$ die Komponenten p_1, q_1, r_1 haben müssen. Es soll m. a. W. aus $\Sigma p\, dX = 0$ die Relation $\Sigma p_1\, dX_1 = 0$ folgen.

Nun erhält man aus der Differentiation von (21), wenn man die Relationen

$$(24)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = 1 \quad \text{und} \quad p\,dp + q\,dq + r\,dr = 0$$

berücksichtigt,

$$\Sigma p\, dX = \Sigma p\, dx + \lambda \Sigma p\, dp + d\lambda \Sigma p^2 = \Sigma p\, dx + d\lambda.$$

Die Bedingung $\Sigma p\, dX = 0$ ist also gleichwertig mit der Relation

$$d\lambda = -(p\,dx + q\,dy + r\,dz)$$

und ebenso findet man, daß die Bedingung $\Sigma p_1\, dX_1 = 0$ äquivalent ist mit der Relation

$$d\lambda_1 = -(p_1\,dx_1 + q_1\,dy_1 + r_1\,dz_1)$$

Endlich folgt aus (23), wenn man $\varrho =$ konst setzt,

$$d\varphi + n_1\, d\lambda_1 - n\, d\lambda = 0.$$

Der Malussche Satz ist daher äquivalent mit folgender Relation:

$$n_1(p_1\,dx_1 + q_1\,dy_1 + r_1\,dz_1) = n(p\,dx + q\,dy + r\,dz) + d\varphi.$$

Diese Gleichung ist aber nur eine Abkürzung für die zwei folgenden

$$(25)\quad \begin{cases} n_1\left(p_1\dfrac{\partial x_1}{\partial u} + q_1\dfrac{\partial y_1}{\partial u} + r_1\dfrac{\partial z_1}{\partial u}\right) = n\left(p\dfrac{\partial x}{\partial u} + q\dfrac{\partial y}{\partial u} + r\dfrac{\partial z}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}, \\ n_1\left(p_1\dfrac{\partial x_1}{\partial v} + q_1\dfrac{\partial y_1}{\partial v} + r_1\dfrac{\partial z_1}{\partial v}\right) = n\left(p\dfrac{\partial x}{\partial v} + q\dfrac{\partial y}{\partial v} + r\dfrac{\partial z}{\partial v}\right) + \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}, \end{cases}$$

die zusammen mit

$$(26)\qquad p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = 1$$

uns erlauben, die Größen p_1, q_1, r_1 als Funktionen von p, q, r, u, v auszurechnen.

13. Um die geometrischen Folgen der Gleichungen (25) zu erfassen, wollen wir die Parameter u, v und die beiden Achsenkreuze der x, y, z und der x_1, y_1, z_1 so wählen, daß diese Gleichungen für ein bestimmtes Paar entsprechender Punkte eine möglichst einfache Gestalt erhalten. Dazu bemerken wir, daß bekanntlich in jedem Punkte A von S mindestens zwei aufeinander senkrecht liegende Linienelemente gefunden werden können, die in zueinander orthogonalen Linienelementen von S_1 abgebildet werden. Wir können also ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit von vornherein voraussetzen, daß die Parameterkurven u = konst und v = konst sich auf beiden Flächen S und S_1 senkrecht schneiden. Hierauf können wir die x- und die y-Achse parallel zu den Richtungen der beiden Parameterkurven in einem Punkte A von S wählen und eine entsprechende Lage für das Achsenkreuz der x_1 y_1 z_1 gegenüber den Parametern von S_1 im Bildpunkte A_1 von A annehmen. Dann verschwinden in (25) die acht Größen

$$\frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial y_1}{\partial u},\ \frac{\partial z_1}{\partial u},\ \frac{\partial x_1}{\partial v},\ \frac{\partial z_1}{\partial v}$$

und diese Gleichungen nehmen die einfache Gestalt an

$$(27)\qquad \alpha p_1 = p + a, \qquad \beta q_1 = q + b.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Parameter α, β das Vergrößerungsverhältnis der beiden Flächen (in Lichtzeit gemessen) in der Richtung der Kurven $v =$ konst bzw. $u =$ konst bedeuten und daß a und b den ersten Ableitungen von $\varphi(u, v)$ proportional sind.

14. Die Gleichungen (27) erlauben sehr leicht die Bedingungen dafür aufzustellen, daß die Strahlen im Objekt- und im Bildraume, die einander entsprechen, beide reell seien. Dafür nämlich, daß der Strahl mit den Richtungskomponenten p_1, q_1, r_1 reell sei, muß die Gleichung (26) erfüllt sein, woraus folgt $p_1^2 + q_1^2 < 1$, oder wegen (27)

$$\frac{(p+a)^2}{\alpha^2} + \frac{(q+b)^2}{\beta^2} < 1; \tag{28}$$

ebenso findet man, daß

$$p^2 + q^2 < 1 \tag{29}$$

sein muß.

Das betrachtete Instrument läßt also höchstens dann Lichtstrahlen durch, wenn in der pq-Ebene die Ellipse, deren Fläche durch (28) definiert wird, mit dem Kreise (29) innere Punkte gemeinsam hat.

Die Lichtstrahlen, die durch das Instrument hindurchgehen und gleichzeitig beide Flächen S und S_1 in den einander entsprechenden Punkten A und A_1 berühren, sind Punkten der pq-Ebene zugeordnet, die gleichzeitig auf den Rändern der Flächenstücke (28) und (29) liegen. Falls also nicht $a = b = 0$ und gleichzeitig $\alpha = \beta = 1$ ist, gibt es nur höchstens vier derartige Strahlen. Es kann aber vorkommen, daß kein einziger reeller Strahl dieser Art existiert.

Für ein Paar konjugierter aplanatischer Punkte auf der Achse eines rotationssymmetrischen Instrumentes müssen z. B. wegen der Symmetrie die beiden Ovale (28) und (29) konzentrische Kreise sein, die also keinen reellen Schnittpunkt besitzen; man muß in diesem Falle haben: $a = b = 0$ und $\alpha = \beta \neq 1$. Statt der Gleichungen (27) hat man dann

$$\alpha p_1 = p, \qquad \alpha q_1 = q, \tag{30}$$

d. h. Gleichungen, aus denen das berühmte Sinusgesetz von E. Abbe unmittelbar folgt.

15. Wir sind jetzt im Stande, den Zusammenhang unseres Satzes 3 mit den bekannten Resultaten über die stigmatische Abbildung zweier Flächen S und S_1 aufeinander vollkommen zu übersehen. Liegt nämlich S tangential im Felde des Instruments (§ 9), so gibt es durch jeden Punkt A von S unendlich viele Strahlen, die gleichzeitig S und S_1 berühren. Nach dem vorigen Paragraphen muß dann die Ellipse (28) identisch mit dem Einheitskreise (29) sein, woraus $a = b = 0$ und $\alpha = \beta = 1$ folgt.

Aus der ersten Bedingung entnimmt man in Übereinstimmung mit unserem Resultat des § 10, daß die Ableitungen φ_u und φ_v verschwinden und daß $\varphi(u, v) = \varphi(A)$ konstant ist. Die zweite Bedingung $\alpha = \beta = 1$ besagt aber, daß das Vergrößerungsverhältnis in Lichtzeit gemessen für zwei aufeinander senkrechte Richtungen und daher für jede mögliche Richtung gleich Eins ist. Hiermit haben wir aber den Satz 3 für isotrope und homogene Objekt- und Bildräume mit Hilfe der Theorie des Eikonals nochmals bewiesen.

16. **Die stigmatische Abbildung von isotropen Räumen.** Der Satz 2 des § 9 führt unter der Voraussetzung, daß die beiden Medien im Objektraum $\mathfrak{R}$ und im Bildraume $\mathfrak{R}_1$ isotrop — aber nicht notwendig homogen — sind, zu einigen bemerkenswerten Folgerungen. Bezeichnet man nämlich, wie im § 9 mit $f(x, y, z)$ und $f_1(x_1, y_1, z_1)$ die Brechungsindizes der beiden Räume in zwei mittelst der stigmatischen Abbildung einander entsprechenden Punkten und mit ds und ds_1 zwei entsprechende Linienelemente von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_1$ durch diese selben Punkte, so folgt aus unserem Abbildungssatze

$$f_1(x_1, y_1, z_1)\, ds_1 = f(x, y, z)\, ds.$$

Das Verhältnis $ds_1 : ds$ der aufeinander abgebildeten Linienelemente ist mithin in jedem Punkte unabhängig von ihrer Richtung, woraus ohne weiteres folgt, daß die stigmatische Abbildung der beiden Räume aufeinander konform sein muß.

Nun gibt es einen bekannten Satz der Differentialgeometrie, den Liouville zuerst gefunden und bewiesen hat[1]), nach welchem

[1]) Note VI der von Liouville herausgegebenen 5. Auflage von Monge „Feuilles d'Analyse appliquées à la géométrie" (Paris 1850) s. auch F. Klein, Einleit. in die höhere Geometrie (autogr. Vorles., Göttingen 1892—93), p. 378 ff.

jede konforme Abbildung von dreidimensionalen Gebieten aufeinander entweder mit einer Kollineation identisch ist, die jede Figur in eine ähnliche transformiert oder mit einer Transformation durch reziproke Radien, oder endlich mit einer Transformation, die aus diesen beiden zusammengesetzt ist. Wir haben demnach den

Satz 4. Jede stigmatische Abbildung von zwei isotropen Räumen aufeinander, die durch ein absolutes optisches Instrument hervorgerufen wird, ist entweder eine Ähnlichkeitstransformation oder eine Transformation durch reziproke Radien oder endlich eine Transformation, die durch eine Transformation durch reziproke Radien und eine darauf folgende Ähnlichkeitstransformation dargestellt werden kann.

17. Das Maxwellsche Fischauge (§§ 3 und 4) ist ein Beispiel einer stigmatischen Abbildung, wie sie aus dem letzten Satze folgt. Man kann leicht zeigen, daß die Abbildung des Raumes auf sich selbst, die durch das Fischauge geleistet wird, die einzige Abbildung ist, bei der jeder Punkt des unendlichen Raumes $\mathfrak{R}$ (mit Ausnahme des Zentrums O) ein einziges scharfes Bild besitzt. Denn unter den Transformationen, die im Satze 4 aufgezählt sind, gibt es keine andere, die involutorisch ist (d. h. bei der das Bild von A_1 wiederum A ist) und keine Doppelpunkte besitzt.

Es wäre aber ein Irrtum, hieraus allein schließen zu wollen, daß das Gesetz für den Brechungsindex, das eine derartige stigmatische Abbildung hervorruft, notwendig der Gleichung (1) des § 3 genügen muß. Aus der Gestalt der Abbildung des Raumes in sich kann man nämlich nur schließen, daß die Lichtstrahlen geschlossene Kurven sein müssen, die durch die besagte Abbildung in sich selbst transformiert werden, nicht aber, daß sie kreisförmig sein müssen. Könnte man letzteres beweisen, so hätte man wohl auch Aussicht, schließen zu können, daß der Brechungsindex (1) des § 3 der einzige ist, bei dem der ganze Raum stigmatisch auf sich selbst abgebildet wird. Das „Problem des Fischauges" ist die Übertragung auf den drei-dimensionalen Raum einer Frage, die Herr W. Blaschke für geschlossene Flächen gestellt hat, die aber noch nicht beantwortet worden ist[1]).

[1]) W. Blaschke, Vorlesung über Differentialgeometrie I (Berlin, Springer 1921), 1. Aufl., § 86, p. 155—158.

18. Wenn man beachtet, daß das Bild eines Lichtstrahls, der im Felde des Instrumentes liegt, mit der Verlängerung des Lichtstrahls selbst zusammenfällt, so sehen wir, wegen des Satzes 4, daß die Lichtstrahlen im Bildraume Kreise oder gerade Linien sein müssen, wenn die Lichtstrahlen des Objektraumes diese Eigenschaft haben. Eine Anwendung dieser Überlegung ist folgende:

Den Objektraum wird man normalerweise als homogen und isotrop annehmen. Man könnte aber versucht sein, eine stigmatische Abbildung dadurch zu erzwingen, daß man den Bildraum isotrop, aber von veränderlichem Brechungsindex annimmt. Wie wenig dabei zu gewinnen ist, zeigt folgender Satz, der aus den vorhergehenden Überlegungen und den Eigenschaften der Transformation durch reziproke Radien unmittelbar folgt:

Satz 5. Ist der Objektraum homogen und isotrop, so muß dafür, daß eine stigmatische Abbildung überhaupt möglich sei, der Bildraum entweder dieselbe Eigenschaft haben, oder eine derartige Verteilung des Brechungsvermögens aufweisen, daß alle Lichtstrahlen, die ihn durchsetzen, die Gestalt von Kreisen haben, die sämtlich durch einen und denselben Punkt des Raumes hindurchgehen.

19. **Anwendung auf die Variationsrechnung.** Es ist fast selbstverständlich, daß die Beweise der §§ 7—10 sofort auf beliebige symmetrische Variationsprobleme in Räumen von beliebig vielen Dimensionen übertragen werden können. Hierbei nennen wir ein Variationsproblem symmetrisch, wenn der Wert des Kurvenintegrals

$$\int F(x_i, \dot{x}_i)\, dt$$

unabhängig ist vom Sinne, in dem man die Integration über die gegebene Kurve ausführt, was dann und nur dann stattfindet, wenn die Relation

$$F(x_i, -\dot{x}_i) = F(x_i, \dot{x}_i)$$

identisch besteht.

Um unsere Sätze zu übertragen, müssen wir voraussetzen, daß wir zwei „miteinander gekoppelte“ Variationsprobleme haben, d. h. daß wir eine kanonische Transformation zwischen den kanonischen Veränderlichen der beiden Variationsprobleme kennen, durch welche das eine dieser Variationsprobleme in das andere übergeführt wird[1]).

Durch diese Koppelung werden bekanntlich die Extremalen der beiden Variationsprobleme eindeutig aufeinander bezogen. Wenn nun die Extremalen des ersten Problems, die durch einen Punkt A des Raumes $\mathfrak{R}$ hindurchgehen, durch diese Zuordnung übergeführt werden in Extremalen des zweiten Problems, die sich alle in einem und demselben Punkt A_1 des Raumes $\mathfrak{R}_1$ kreuzen, und wenn dies immer der Fall ist, sobald A sich auf einer zweidimensionalen Fläche S befindet, die „tangential im Felde der Koppelung" liegt, so sind alle Voraussetzungen erfüllt, um einen Satz zu beweisen, der unserem Satze 3 des § 10 so vollständig analog ist, daß wir ihn nicht einmal auszusprechen brauchen.

Ähnliche Sätze scheinen sogar zu gelten, wenn man gekoppelte symmetrische Variationsproble mit Differentialgleichungen als Nebenbedingungen betrachtet; die Verhältnisse sind aber in diesem letzten Falle komplizierter und ich begnüge mich deshalb mit einer Andeutung dieser Möglichkeit.

---

[1]) S. z. B. Riemann-Weber, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik (7. Auflage, Braunschweig, Vieweg 1925, p. 198).