Sitzungsberichte

der

mathematisch-physikalischen Klasse

der

K. B. Akademie der Wissenschaften

zu München.

Band XXXVII. Jahrgang 1907.

München
Verlag der K. B. Akademie der Wissenschaften
1908.

In Kommission des G. Franz'schen Verlags (J. Roth).

Digitized by Google

Über die Kettenbruchentwicklung des Quotienten zweier Besselschen Funktionen.

Von **Oskar Perron.**

(*Eingelaufen 7. Dezember 1907.*)

Die Besselsche Funktion definiere ich durch die beständig konvergente Potenzreihe:

$$(1) \qquad J_h(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^h \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}}{s!\,\Gamma(h+s+1)},$$

wobei der Index h auch einen beliebigen komplexen Zahlwert haben darf. Speziell ist:

$$(2) \qquad J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z.$$

Aus unserer Definition ergibt sich leicht die bekannte Beziehung:

$$(3) \qquad J_{h-1}(z) = \frac{2h}{z} J_h(z) - J_{h+1}(z).$$

Mit dieser Differenzengleichung hängt auch die Kettenbruchentwicklung für den Quotienten zweier Besselschen Funktionen zusammen:

$$(4) \qquad \frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2h}{z} - \cfrac{1}{\cfrac{2(h+1)}{z} - \cfrac{1}{\cfrac{2(h+2)}{z} - \cfrac{1}{\cfrac{2(h+3)}{z} - \cdots}}}.$$

Digitized by Google

Diese Formel ist so zu verstehen, daß der unendliche Kettenbruch für jeden endlichen von Null verschiedenen Wert von z, welcher nicht Nullstelle der Funktion $J_h(z)$ ist, konvergiert und den Wert $\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)}$ hat. Für die Nullstellen von $J_h(z)$ dagegen ist der Kettenbruch eigentlich divergent, d. h. die reziproken Werte seiner aufeinander folgenden Näherungsbrüche konvergieren gegen Null.[1]) Statt (4) kann, indem man beiderseits den reziproken Wert nimmt und dann den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt, auch geschrieben werden:

$$(4^a)\qquad \frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{z}{|2h} - \frac{z^2}{|2(h+1)} - \frac{z^2}{|2(h+2)} - \frac{z^2}{|2(h+3)} - \cdots.$$

Diese Entwicklung hat nun auch für $z = 0$ ihren Sinn, und die eigentliche Divergenz tritt jetzt natürlich für die Nullstellen von $J_{h-1}(z)$ ein. Für $h = \frac{1}{2}$ erhält man speziell den Lambertschen Kettenbruch:

$$(5)\qquad \operatorname{tg} z = \frac{z}{|1} - \frac{z^2}{|3} - \frac{z^2}{|5} - \frac{z^2}{|7} - \cdots.$$

Für diese Formeln finden sich in der Literatur neben wenigen einwandfreien auch eine Anzahl ganz unzulänglicher Beweise. Insbesondere ist zu konstatieren, daß, obwohl Formel (4) sehr alt ist, doch erst im Jahre 1895 ein Beweis für sie erbracht worden ist, der allen Anforderungen mathematischer Strenge genügt. Ich will daher, ehe ich selbst einen neuen einfachen Beweis hier mitteile, zunächst einige kurze Bemerkungen über die bisherigen Beweisarten vorausschicken.

Eine Formel, welche sich von (4) nur durch die Bezeich-

[1]) Diese Terminologie weicht von der üblichen etwas ab. „Der Kettenbruch divergiert schlechthin oder im wesentlichen nach ∞^s wäre die Ausdrucksweise des Herrn Pringsheim, während in der Sprache von Stolz und Gmeiner (Einleitung in die Funktionentheorie, XI. Abschnitt) der Divergenzcharakter des Kettenbruches überhaupt nicht ausgedrückt werden kann. Übrigens teilt mir Herr Pringsheim mit, daß er in Vorlesungen ebenfalls die Terminologie des Textes bevorzugt habe.

Digitized by Google

nungsweise unterscheidet, dürfte zum erstenmal im Jahr 1737 in der Literatur vorkommen, und zwar in einer Arbeit von Euler.[1]) Dieser stellt sich nämlich dort in § 31 die Aufgabe, den Wert des unendlichen Kettenbruches

$$s = a + \frac{1}{|(1+n)a} + \frac{1}{|(1+2n)a} + \frac{1}{|(1+3n)a} + \cdots$$

zu berechnen, und er bildet zu diesem Zweck die Reihe der Näherungsbrüche:

$$\frac{a}{1},\ \frac{(1+n)a^2+1}{(1+n)a},\ \frac{(1+n)(1+2n)a^3+(2+2n)a}{(1+n)(1+2n)a^2+1},$$

worauf er in § 32 in deutscher Übersetzung also fortfährt: „Wenn diese Brüche weiter fortgesetzt werden, erkennt man leicht ihr Bildungsgesetz; aus diesem folgt dann, daß der unendliche Bruch, nachdem man Zähler und Nenner durch das erste Glied des Nenners dividiert hat, den Wert erhält:

$$\frac{a+\frac{1}{1\cdot 1\cdot na}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 1(1+n)n^2a^3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1(1+n)(1+2n)n^3a^5}+\cdots}{1+\frac{1}{1\cdot(1+n)na^2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot(1+n)(1+2n)n^2a^4}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(1+n)(1+2n)(1+3n)n^3a^6}+\cdots},$$

welchem also s gleich ist." Die Gleichheit dieses Bruches mit dem obigen Kettenbruch besagt aber in der Tat nichts anderes als Formel (4); man braucht nur

$$a = \frac{2h}{z\sqrt{-1}},\quad n = \frac{1}{h}$$

zu setzen, um vollständige Übereinstimmung zu haben. Indes hat Euler zweifellos unter a und n bloß reelle positive, vielleicht bloß natürliche Zahlen verstehen wollen. Aber auch bei dieser Einschränkung ist seine Darstellung durchaus noch kein exakter Beweis. Denn selbst wenn Euler das recht kom-

[1]) De fractionibus continuis. Commentarii Academiae Petropolitanae, tome IX, 1737.

Digitized by Google

plizierte Bildungsgesetz der Näherungsbrüche wirklich erkannt haben sollte und nicht bloß durch eine unvollständige Induktion erraten, so ließe doch sein unvermittelter Übergang vom Endlichen zum Unendlichen nach heutigen Begriffen noch viel zu wünschen übrig.

Gewissermaßen den umgekehrten Weg wie Euler verfolgt Legendre in der vierten Note seiner „Éléments de géométrie". Während nämlich Euler von dem Kettenbruch ausgeht und diesen durch den Quotienten zweier Reihen ausdrückt, geht Legendre umgekehrt von den Reihen aus und endet bei dem Kettenbruch. Seine noch viel weniger befriedigende Darstellung findet sich fast ohne Änderung auch in Herrn Bachmanns „Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen" (Leipzig 1892).

Setzt man mit Legendre-Bachmann:

$$\varphi(z) = 1 + \frac{1}{z}y^2 + \frac{1}{z(z+1)}\frac{y^4}{1\cdot 2} + \frac{1}{z(z+1)(z+2)}\frac{y^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots,$$

so ist offenbar:

$$\varphi(z) = \frac{\Gamma(z)\,J_{z-1}(2\,i\,y)}{(i\,y)^{z-1}},$$

und entsprechend der Formel (3) hat man jetzt:

$$\varphi(z) = \varphi(z+1) + \frac{y^2}{z(z+1)}\varphi(z+2).$$

Führt man dann die Abkürzung

$$\frac{y^2}{z}\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = \psi(z)$$

ein, so geht die vorige Formel über in:

$$\psi(z) = \frac{y^2}{z + \psi(z+1)}.$$

Indem dann im Nenner auch wieder

$$\psi(z+1) = \frac{y^2}{z+1 + \psi(z+2)}$$

gesetzt werden kann etc., soll hieraus ohne weiteres der unendliche Kettenbruch

Digitized by Google

$$\psi(z) = \frac{y^2}{z} + \frac{y^2}{z+1} + \frac{y^2}{z+2} + \cdots$$

hervorgehen, welcher im wesentlichen mit (4ª) gleichbedeutend ist. Aber diese rein formale Behandlung entspricht den Anforderungen mathematischer Strenge nur sehr wenig, und wir werden im nächsten Paragraphen sogar sehen, wie man durch einen derartigen Schluß mit Leichtigkeit beweisen kann, daß jeder Kettenbruch einer beliebig angenommenen Zahl gleich ist.

Die Legendresche φ-Funktion findet sich auch in einem Aufsatz von Stern,[1]) der indes den unendlichen Kettenbruch nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung gelten läßt, „daß man das weggelassene Glied ohne Nachteil für das Resultat vernachlässigen darf". Da aber Stern nicht untersucht, ob oder wann diese Voraussetzung erfüllt ist, kommt seine Darstellung hier eigentlich nicht in Betracht. Nur den Spezialfall des Lambertschen Kettenbruches glaubte er vollständig erledigen zu können; doch ist sein diesbezüglicher Beweis noch in mehr als einer Hinsicht mangelhaft.[2])

Der gleiche Fehler wie bei Legendre-Bachmann findet sich bei Bessel,[3]) der indes nur ganzzahlige Indices betrachtet. Jedoch gewinnt seine Darstellung dadurch erhöhte Bedeutung, daß die dabei auftretenden unendlichen Reihen als selbständige Transzendenten in die Analysis eingeführt sind, und daher hier zum erstenmal ein zu (4ª) äquivalenter Kettenbruch in Verbindung mit dem Besselschen Funktionszeichen J erscheint. Bessel schreibt die Formel (3) in der Gestalt:

[1]) Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung. Crelles Journal für Mathematik, Bd. 11 (1834).

[2]) Bekanntlich hat Lambert selbst diesen Spezialfall schon 1767 sehr viel besser behandelt, worüber der Aufsatz des Herrn Pringsheim zu vergleichen ist: Über die ersten Beweise der Irrationalität von e und π. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28, 1898.

[3]) Untersuchungen des Teils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht, § 11. Mathematische Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1824.

Digitized by Google

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \cfrac{\frac{z}{2h}}{1 - \frac{z}{2h}\frac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)}};$$

indem er dann im Nenner für $\frac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)}$ wieder den entsprechenden Wert

$$\frac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)} = \cfrac{\frac{z}{2h+2}}{1 - \frac{z}{2h+2}\frac{J_{h+2}(z)}{J_{h+1}(z)}}$$

substituiert und in der gleichen Weise unbegrenzt fortfährt, schließt Bessel unbedenklich:

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \cfrac{\frac{z}{2h}}{1} - \cfrac{\frac{z^2}{2h(2h+2)}}{1} - \cfrac{\frac{z^2}{(2h+2)(2h+4)}}{1} - \cdots.$$

Dies ist also ganz der gleiche Fehler wie bei Legendre. Übrigens benutzt Bessel die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche dieses Kettenbruches in einwandfreier Weise, um J_h linear durch J_0 und J_1 auszudrücken, während der unendliche Kettenbruch als solcher nur eine untergeordnete Rolle spielt.

Eine ganz interessante Variante des gleichen Fehlschlusses möchte ich nicht unerwähnt lassen, obwohl sie sich nur auf den Spezialfall des Lambertschen Kettenbruches bezieht. Sie findet sich in einer Note des Herrn J. W. L. Glaisher,[1]) welcher die Formel (5) auf folgende Art „beweist“:

Die Funktion $y = A\cos(\sqrt{2x} + B)$, wo A, B Konstante sind, ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y + y' + 2xy'' = 0.$$

Aus dieser findet man durch s-malige Differentiation:

[1]) On Lambert's proof of the irrationality of π, and on the irrationality of certain other quantities. Report of the forty-first meeting of the British association for the advancement of science, held at Edinburgh 1871.

Digitized by Google

$$y^{(s)} + (2s+1)\,y^{(s+1)} + 2x\,y^{(s+2)} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{y^{(s+1)}}{y^{(s)}} = \frac{-1}{2s+1+2x\dfrac{y^{(s+2)}}{y^{(s+1)}}}. \tag{6}$$

Hieraus soll nun wieder folgen, daß

$$-\frac{1}{\sqrt{2x}}\operatorname{tg}(\sqrt{2x}+B) = \frac{y'}{y} = \frac{-1}{|1} - \frac{2x}{|3} - \frac{2x}{|5} - \cdots$$

ist. Die Integrationskonstante B bestimmt Herr Glaisher nachträglich noch dadurch, daß er für x den Spezialwert $x=0$ einsetzt; es kommt so $B=0$. Aber hier ist es natürlich wieder durchaus unstatthaft, aus (6) ohne weiteres einen unendlichen Kettenbruch hervorgehen zu lassen, und durch die nachträgliche Berechnung einer Integrationskonstanten, wodurch die Sache offenbar besonders glaubhaft gemacht werden soll, wird hieran nicht das geringste gebessert.

Viel korrekter ist schon die Methode von Schlömilch,[1]) der sich aber auch auf ganzzahlige Indices beschränkt. Hier wird die Rekursionsformel (3) in der Form geschrieben:

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\dfrac{z}{2}}{h - \dfrac{z}{2}\dfrac{J_{h+1}(z)}{J_h(z)}},$$

woraus zunächst der endliche Kettenbruch

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\dfrac{z}{2}}{|h} - \frac{\left(\dfrac{z}{2}\right)^2}{|h+1} - \frac{\left(\dfrac{z}{2}\right)^2}{|h+2} - \cdots - \frac{\left(\dfrac{z}{2}\right)^2}{|h+k - \dfrac{z}{2}\dfrac{J_{h+k+1}(z)}{J_{h+k}(z)}}$$

hervorgeht. Hiegegen ist, solange z keine Nullstelle von

$$J_{h-1}(z),\ J_h(z),\ \ldots\ J_{h+k}(z)$$

[1]) Über die Besselsche Funktion. Zeitschrift für Mathematik und Physik, 2. Jahrg., 1857. Man vergleiche auch: Über den Kettenbruch für tan z. Gleiche Zeitschrift, 16. Jahrg., 1871.

Digitized by Google

ist, nichts einzuwenden. Nun beweist Schlömilch weiter ganz richtig, daß der „Rest“ $\frac{z}{2}\frac{J_{h+k+1}(z)}{J_{h+k}(z)}$ mit wachsendem k gegen Null konvergiert. Hiedurch wird es ja allerdings recht plausibel gemacht, daß

$$\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)} = \frac{\frac{z}{2}}{|\,h} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{|\,h+1} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{|\,h+2} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{|\,h+3} - \cdots$$

gesetzt werden darf; aber nichtsdestoweniger bedarf doch dieser Schluß immer noch dringend der Rechtfertigung. Denn in der Reihenlehre gilt ja allerdings der leicht zu beweisende und sehr häufig benutzte Satz: „Wenn für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$u = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + R_n$$

ist, so besteht die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Größe u gleich der unendlichen Reihe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

gesetzt werden darf, darin, daß der absolute Wert des Restes R_n mit wachsendem n unter jede Grenze herabsinkt.“ Wenn dagegen eine Kettenbruchentwicklung der Form

$$u = b_0 + \frac{a_1}{|\,b_1} + \frac{a_2}{|\,b_2} + \cdots + \frac{a_n}{|\,b_n + R_n}$$

vorliegt, so ist die Bezeichnung der Zahl R_n als Rest des Kettenbruches insofern recht irreführend, als die Bedingung $\lim R_n = 0$ jetzt weder notwendig noch hinreichend dafür ist, daß

$$u = b_0 + \frac{a_1}{|\,b_1} + \frac{a_2}{|\,b_2} + \cdots$$

gesetzt werden kann. Dies hat später Schlömilch selbst in seinem Handbuch der algebraischen Analysis hervorgehoben, und er hat dort zugleich einige besondere Fälle entwickelt, in denen die Bedingung wenigstens hinreichend ist.[1]) Diese be-

[1]) Auch in dem oben zitierten Aufsatz von Stern wird die Frage berührt, wann der Rest eines Kettenbruches vernachlässigt werden darf. Doch sind die dortigen Angaben sehr unvollständig und unrichtig.

Digitized by Google

ziehen sich aber nur auf reelle Kettenbrüche und können in der Tat, wenn nicht nur h sondern auch z^2 reell ist, für die vorliegende Frage nutzbar gemacht werden, sodaß für diesen Spezialfall, aber auch nur für diesen die Mittel zu einem exakten Beweis von Schlömilch im wesentlichen geliefert sind.[1]) Trotzdem ist der ursprüngliche Schlömilchsche Beweis, bei dem das schließliche Verschwinden des Restes ohne weiteres als ausreichend erachtet wird, nie angefochten worden, er scheint vielmehr noch heute für einwandfrei gehalten zu werden und wird sogar für beliebige Indices in Anspruch genommen. So ist er in die Monographie von Lommel[2]) übergegangen und findet sich sogar auch in dem neuen Handbuch des Herrn Nielsen.[3]) In letzterem ist auf pag. 38 zu lesen: „Sucht man nun die Bedingung dafür, daß der Kettenbruch unbegrenzt fortgesetzt werden darf, so ist offenbar, daß $\lim R_n = 0$ sein muß, eine Bedingung, die sowohl notwendig als hinreichend ist." Demgegenüber zeigt aber doch die einfachste Überlegung, daß die Bedingung gewiß nicht notwendig sein kann; jeder regelmäßige Kettenbruch, dessen Teilnenner endlich bleiben, ist ein Beispiel dafür. Dagegen erweist sich hier die Bedingung allerdings, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, bis zu einem gewissen Grad als hinreichend. Aber mit der Wendung „Es ist offenbar, daß ..." ist dies natürlich keineswegs bewiesen. Vielmehr ließe sich die Konvergenz des Kettenbruches noch mit triftigen Gründen bezweifeln. Denn wenn der Kettenbruch wirklich die Funktion $\frac{J_h(z)}{J_{h-1}(z)}$ darstellen soll, so wird man Konvergenz wohl nicht erwarten, sobald z eine Nullstelle von $J_{h-1}(z)$ ist. Nachdem dann aber für eine gewisse unendliche Menge von z-Werten die mögliche Divergenz des Ketten-

[1]) Eine an Schlömilch anschließende, in jeder Hinsicht mustergiltige Durchführung dieses Spezialfalles findet sich bei Stolz und Gmeiner: Einleitung in die Funktionentheorie. Leipzig 1905, pag. 579 ff.

[2]) Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868.

[3]) Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen. Leipzig 1904.

Digitized by Google

bruches einmal zugegeben wird, fällt es doch schwer, seine Konvergenz für alle anderen Werte von x auf Grund einer so zweifelhaften Beweisführung auch nur für wahrscheinlich zu halten.

Schlömilch hat noch einen weiteren Beweis gegeben. In seinem Handbuch der algebraischen Analysis führt er in § 71 die beiden Reihen ein:[1])

$$U = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot \gamma} + \frac{x^4}{1 \cdot 2\,\gamma(\gamma+1)} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3\,\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \cdots,$$

$$V = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot (1+\gamma)} + \frac{x^4}{1 \cdot 2(\gamma+1)(\gamma+2)} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)} + \cdots,$$

welche wieder auf die Legendresche φ-Funktion hinauskommen. Man kann

$$U = \lim_{a=\infty} F\left(a, a, \gamma, \frac{x^2}{a^2}\right), \quad V = \lim_{a=\infty} F\left(a, a+1, \gamma+1, \frac{x^2}{a^2}\right)$$

setzen, wo F die Gaußsche hypergeometrische Reihe bedeutet. Schlömilch gewinnt nun den Kettenbruch

$$\frac{V}{U} = \frac{\gamma}{\gamma} + \frac{x^2}{|\gamma+1} + \frac{x^2}{|\gamma+2} + \cdots$$

einfach durch Grenzübergang aus dem bekannten Gaußschen Kettenbruch für den Quotienten:

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}.$$

Aber abgesehen davon, daß der Schlömilchsche Beweis für den Gaußschen Kettenbruch nur in ganz speziellen Fällen bindend ist, während später Schlömilch die Sache sehr wohl auch für andere Fälle in Anspruch nimmt, weist diese Methode noch einen weiteren Fehler auf. Um nämlich $\frac{V}{U}$ zu erhalten, müßte man von dem den Quotienten

$$\frac{F\left(a, a+1, \gamma+1, \frac{x^2}{a^2}\right)}{F\left(a, a, \gamma, \frac{x^2}{a^2}\right)}$$

[1]) Ich zitiere nach der 6. Auflage, zweiter Druck. Stuttgart 1889.

Digitized by Google

darstellenden Kettenbruch, nachdem er ins Unendliche fortgesetzt ist, hinterher den Grenzwert für $a = \infty$ berechnen. Schlömilch aber geht in den einzelnen Gliedern des Kettenbruches zur Grenze $a = \infty$ über und macht sich dadurch einer ungerechtfertigten Vertauschung zweier Grenzprozesse schuldig.

Das Verdienst, die Formel (4) zum erstenmal in ihrem vollen Umfang einwandfrei bewiesen zu haben, gebührt Herrn J. H. Graf,[1]) der allerdings die Mängel der anderen Methoden selbst nicht erkannt zu haben scheint. Sein eleganter Beweis baut sich auf ganz anderer Grundlage auf als die früheren Versuche. Bezeichnet man den Zähler des n^{ten} Näherungsbruches des Kettenbruches

$$a + \frac{1}{|a+b} + \frac{1}{|a+2b} + \frac{1}{|a+3b} + \cdots$$

mit $f_{n+1}(a, b)$, so ist der Nenner des gleichen Näherungsbruches gleich $f_n(a+b, b)$, wobei $f_1(a, b) = 1$ gesetzt wird. Der Kettenbruch ist also konvergent, wenn der Grenzwert

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}(a, b)}{f_n(a+b, b)}$$

existiert, und er ist dann diesem Grenzwert gleich. Herr Graf stellt nun einen expliziten Ausdruck für die Funktion $f_n(a, b)$ her und gewinnt daraus die Grenzbeziehung:[2])

$$(7) \quad \lim_{n=\infty} \frac{f_n\left(\frac{2c+2}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)} \left(\frac{ix}{2}\right)^n \left(\frac{x}{2}\right)^c = J_c(x) \qquad (i = \sqrt{-1}).$$

Ersetzt man hier n durch $n+1$, und c durch $c-1$, so kommt auch:

[1]) Relations entre la fonction Besselienne de première espèce et une fraction continue. Annali di matematica, Reihe 2, Bd. 23 (1895).

[2]) Eine Formel, die sich von dieser nur durch die Bezeichnungsweise unterscheidet, hat schon etwas früher auf anderem Weg Herr Hurwitz abgeleitet (Über die Nullstellen der Besselschen Funktion. Mathematische Annalen 33 (1889)). In dem Beweis von Herrn Graf kommt allerdings eine Vertauschung von zwei Grenzprozessen vor; doch ist deren Rechtfertigung so leicht, daß sie ohne weiteres dem Leser überlassen werden konnte.

Digitized by Google

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}\left(\frac{2c}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{\Gamma(c+1+n)} \left(\frac{ix}{2}\right)^{n+1} \binom{x}{2}^{c-1} = J_{c-1}(x). \tag{8}$$

Durch Division der zwei letzten Gleichungen folgt, wenn x keine Nullstelle von $J_c(x)$ ist:

$$\lim_{n=\infty} \frac{f_{n+1}\left(\frac{2c}{ix}, \frac{2}{ix}\right)}{f_n\left(\frac{2c}{ix} + \frac{2}{ix}, \frac{2}{ix}\right)} = \frac{J_{c-1}(x)}{iJ_c(x)}.$$

Mit Rücksicht auf die Definition der Funktion f_n ist diese Gleichung aber völlig gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\frac{J_{c-1}(x)}{iJ_c(x)} = \frac{2c}{ix} + \cfrac{1}{\left|\frac{2(c+1)}{ix}\right.} + \cfrac{1}{\left|\frac{2(c+2)}{ix}\right.} + \cfrac{1}{\left|\frac{2(c+3)}{ix}\right.} + \cdots,$$

oder, was das selbe ist:

$$\frac{J_{c-1}(x)}{J_c(x)} = \frac{2c}{x} - \cfrac{1}{\left|\frac{2(c+1)}{x}\right.} - \cfrac{1}{\left|\frac{2(c+2)}{x}\right.} - \cfrac{1}{\left|\frac{2(c+3)}{x}\right.} - \cdots.$$

Dies ist aber genau die Gleichung (4), und für die Nullstellen von $J_c(x)$ gilt offenbar auch das dort Gesagte, wie man erkennt, wenn man nicht Gleichung (8) durch (7), sondern umgekehrt (7) durch (8) dividiert.[1])

Ein von dem Grafschen ganz verschiedenes Beweisverfahren besteht darin, daß man aus irgendeinem allgemeinen Theorem die Tatsache entnimmt, der Kettenbruch (4) stellt eine im Endlichen überall meromorphe analytische Funktion von z dar (wobei in den Polen eigentliche Divergenz stattfindet). Nachdem dies feststeht, läßt sich dann hinterher leicht zeigen,

[1]) Diese Division ist sicher erlaubt, weil $J_c(x)$ und $J_{c-1}(x)$ außer allenfalls $x = 0$ keine gemeinsame Nullstelle haben können. Für eine solche müßten ja, wie man aus der Rekursionsformel (3) erschließt, auch die Funktionen $J_{c+1}(x)$, $J_{c+2}(x)$, $J_{c+3}(x)$ ... alle verschwinden. Bei $J_{c+\nu}(x)$ ist dies aber gewiß nicht möglich, wenn ν sehr groß ist, wie sich leicht aus der Definitionsgleichung (1) ergibt.

Digitized by Google

daß diese Funktion von $\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)}$ nicht verschieden sein kann. Dies ist die Methode des Herrn E. B. van Vleck.[1])

Ich will nun in den folgenden Zeilen ein ganz einfaches direktes Verfahren angeben, indem ich die Schlömilchsche Methode etwas modifiziere und ihren wunden Punkt beseitige. Dazu bedarf es eines einfachen, wohl auch zu anderen Zwecken brauchbaren Hilfssatzes aus der Theorie der Kettenbrüche, aus welchem dann die Formel (4) selbst fast ohne jede Rechnung gefolgert werden kann.

§ 2.

Wo immer man in der Analysis auf ein System von unendlich vielen Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} x_0 &= b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 &= b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ &- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ x_\nu &= b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \\ &- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \end{aligned} \tag{9}$$

geführt wird, ist man versucht, die Zahl $\frac{x_0}{x_1}$ als unendlichen Kettenbruch darzustellen:

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots, \tag{10}$$

und es wird manchmal nicht beachtet, daß eine solche Darstellung durchaus nicht ohne weiteres erlaubt ist. Und doch dürfen die Fälle, in denen die Gleichung (10) falsch ist, nicht als eine besonders merkwürdige Ausnahme gelten, für deren Auftreten man erst künstlich Beispiele konstruieren muß, sondern sie bilden die Regel. Denn sei

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots.$$

[1]) On the convergence of the continued fraction of Gauß and other continued fractions. Annals of mathematics, Reihe 2, Bd. 3 (1901).

Digitized by Google

ein beliebiger Kettenbruch, bei welchem selbstverständlich sämtliche a_ν als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Wählt man dann ganz willkürlich zwei Zahlen x_0 und x_1, deren letztere von Null verschieden ist, so kann man aus dem System (9) wegen $a_\nu \neq 0$ eine unbegrenzte Folge von Zahlen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ der Reihe nach berechnen. Die so gefundenen Zahlen genügen natürlich dem System (9), und wenn es erlaubt wäre, hieraus die Gleichung (10) zu folgern, so hätten wir damit wegen der Willkürlichkeit von x_0 und x_1 das absurde Resultat gewonnen, daß jeder Kettenbruch jeder Zahl gleich ist. Auch ist hienach klar, daß, selbst wenn für die Konvergenz des Kettenbruches (10) ein eigener Beweis erbracht werden kann, dies durchaus noch nicht ausreicht, um die Gleichung (10) aus dem System (9) zu folgern.

Dagegen lassen sich sehr wohl gewisse zusätzliche Bedingungen für die Zahlen a_ν, b_ν, x_ν angeben, deren Erfülltsein dafür ausreicht, daß das System (9) die Gleichung (10) nach sich zieht. Ich will nur ein derartiges Kriterium beweisen, welches uns für den gegenwärtigen Zweck gute Dienste leisten wird. Es lautet:

Wenn die (komplexen) Zahlen $a_\nu (\neq 0)$, b_ν, x_ν das Gleichungssystem (9) befriedigen und außerdem von einer gewissen Stelle $\nu > N$ ab den Ungleichungen

$$|x_\nu| \geq (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1}\,x_{\nu+2}| > 0$$

genügen, so besteht auch die Gleichung (10), sofern nur $x_1 \neq 0$ ist. Für $x_1 = 0$ aber ist notwendig $x_0 \neq 0$ und der Kettenbruch (10) ist eigentlich divergent.

Vermöge (9) kann man x_0 und x_1 linear durch x_ν und $x_{\nu+1}$ ausdrücken, und zwar geschieht dies durch die Formeln:

$$\begin{aligned} x_0 &= A_{\nu-1}x_\nu + a_\nu A_{\nu-2}x_{\nu+1} \\ x_1 &= B_{\nu-1}x_\nu + a_\nu B_{\nu-2}x_{\nu+1}, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei die Koeffizienten A_ν, B_ν den Gleichungen genügen:

Digitized by Google

$$(12)\qquad \begin{array}{llll} A_0 = b_0, & A_1 = b_0 b_1 + a_1, & A_\nu = b_\nu A_{\nu-1} + a_\nu A_{\nu-2}, \\ B_0 = 1\ , & B_1 = b_1 \qquad\ , & B_\nu = b_\nu B_{\nu-1} + a_\nu B_{\nu-2}; \end{array}$$

$$(13)\qquad A_{\nu-1} B_\nu - A_\nu B_{\nu-1} = (-1)^\nu a_1 a_2 \ldots a_\nu .$$

Es gilt dann die Beziehung:

$$(14)\qquad b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \cdots + \frac{a_\nu|}{|b_\nu} = \frac{A_\nu}{B_\nu}.$$

Setzt man analog zu (11) auch:

$$(15)\qquad \begin{array}{l} x_\lambda = A_{\nu-1,\lambda}\, x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda} A_{\nu-2,\lambda}\, x_{\nu+\lambda+1} \\ x_{\lambda+1} = B_{\nu-1,\lambda}\, x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda} B_{\nu-2,\lambda}\, x_{\nu+\lambda+1}, \end{array}$$ [1])

so ist ebenso:

$$(16)\qquad b_\lambda + \frac{a_{\lambda+1}|}{|b_{\lambda+1}} + \frac{a_{\lambda+2}|}{|b_{\lambda+2}} + \cdots + \frac{a_{\lambda+\nu}|}{|b_{\lambda+\nu}} = \frac{A_{\nu,\lambda}}{B_{\nu,\lambda}}.$$

Wenn man in (11) den Index ν durch λ ersetzt, sodann für $x_\lambda, x_{\lambda+1}$ ihre Werte aus (15) substituiert, so werden x_0 und x_1 linear durch $x_{\nu+\lambda}, x_{\nu+\lambda+1}$ ausgedrückt. Das gleiche erreicht man aber auch direkt, wenn man in (11) $\nu + \lambda$ an Stelle von ν setzt. Indem man dann die beiden so entstehenden Ausdrücke miteinander vergleicht, findet man die bekannten Relationen:

$$(17)\qquad \begin{array}{l} A_{\nu+\lambda-1} = A_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda A_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda} \\ B_{\nu+\lambda-1} = B_{\lambda-1} A_{\nu-1,\lambda} + a_\lambda B_{\lambda-2} B_{\nu-1,\lambda}. \end{array}$$

Wir nehmen nun zunächst an, die geforderten Bedingungen

$$(18)\qquad |x_\nu| \geqq (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}| > 0$$

seien bereits von $\nu = 1$ ab erfüllt, also insbesondere auch $|x_1| > 0$. Dann ist wegen

$$x_\nu = b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2}$$

a fortiori:

$$|b_\nu x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}| \geqq (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}| + |a_{\nu+1} x_{\nu+2}|;$$

oder auch, da $|x_{\nu+1}| > 0$ gefordert ist:

[1]) Man könnte hierbei den Buchstaben B vermeiden, indem offenbar $B_{\nu,\lambda} = A_{\nu-1,\lambda+1}$ ist; indessen ist es doch zweckmäßig, auch B beizubehalten.

Digitized by Google

$$|b_\nu| > 1 + |a_\nu| \quad (\nu = 1, 2, \ldots \infty). \tag{19}$$

Hieraus folgt bereits nach einem bekannten Satz des Herrn Pringsheim[1]) die Konvergenz des Kettenbruches; doch ist es nicht nötig, dieses Resultat, welches uns an sich noch gar nichts nützt, hier als bekannt vorauszusetzen. Aus der letzten der Gleichungen (12) schließt man:

$$|B_\nu| \geq |b_\nu B_{\nu-1}| - |a_\nu B_{\nu-2}|,$$

also mit Rücksicht auf (19):

$$\begin{aligned} |B_\nu| - |B_{\nu-1}| &\geq (|b_\nu| - 1)\ |B_{\nu-1}| - |a_\nu B_{\nu-2}| \\ &> |a_\nu|\,(|B_{\nu-1}| - |B_{\nu-2}|). \end{aligned}$$

Daher auch:

$$\begin{aligned} |B_\nu| - |B_{\nu-1}| &> |a_\nu a_{\nu-1}|\,(|B_{\nu-2}| - |B_{\nu-3}|) \geq \ldots \\ &\geq |a_\nu a_{\nu-1} \ldots a_2|\,(|b_1| - 1) > |a_1 a_2 \ldots a_\nu|; \end{aligned}$$

hieraus folgt endlich:

$$|B_\nu| > 1 + |a_1| + |a_1 a_2| + \cdots + |a_1 a_2 \ldots a_\nu|. \tag{20}$$

Ferner ist nach Voraussetzung (18):

$$|x_\nu| > (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}|,$$

also auch:

$$|x_1| > (1 + |a_1|)(1 + |a_2|) \ldots (1 + |a_\nu|)\,|x_{\nu+1}|. \tag{21}$$

Es ist nun zu beweisen, daß der Bruch $\frac{A_\nu}{B_\nu}$, dessen Nenner nach Ungleichung (20) stets von Null verschieden ist, mit wachsendem ν der Grenze $\frac{x_0}{x_1}$ zustrebt. Es ist aber nach (11):

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{x_1} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} &= \frac{A_{\nu-1}\,x_\nu + a_\nu A_{\nu-2}\,x_{\nu+1}}{B_{\nu-1}\,x_\nu + a_\nu B_{\nu-2}\,x_{\nu+1}} - \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} \\ &= \frac{a_\nu (A_{\nu-2}\,B_{\nu-1} - A_{\nu-1}\,B_{\nu-2})\,x_{\nu+1}}{(B_{\nu-1}\,x_\nu + a_\nu B_{\nu-2}\,x_{\nu+1})\,B_{\nu-1}} \\ &= (-1)^{\nu-1}\,\frac{a_1 a_2 \ldots a_\nu\,x_{\nu+1}}{x_1\,B_{\nu-1}}, \end{aligned}$$

[1]) Über die Konvergenz unendlicher Kettenbrüche. Diese Sitzungsberichte, Bd. 28 (1898).

Digitized by Google

und hieraus folgt unter Berücksichtigung der Ungleichungen (20) und (21):

$$\left|\frac{x_0}{x_1}-\frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}}\right|<\frac{|a_1a_2\ldots a_\nu|}{(1+|a_1|)(1+|a_2|)\ldots(1+|a_\nu|)|B_{\nu-1}|}\begin{cases}<|a_1a_2\ldots a_\nu|\\ <\dfrac{1}{|B_{\nu-1}|}.\end{cases}$$

Von den zwei Ausdrücken auf der rechten Seite hat aber wegen (20) mindestens einer den Grenzwert Null; daher ist in der Tat:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{A_\nu}{B_\nu}=\frac{x_0}{x_1};\quad \text{w. z. b. w.}$$

Nehmen wir jetzt an, die Bedingung (18) sei erst von dem Wert $\nu=N+1$ ab erfüllt, also gewiß $|x_{N+1}|>0$. Dann ist nach dem soeben Bewiesenen doch jedenfalls $B_{\nu,N}\neq 0$, und außerdem:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{A_{\nu,N}}{B_{\nu,N}}=\frac{x_N}{x_{N+1}}.$$

Wenn man dann in (17) für λ speziell die Zahl N wählt und die entstehenden Gleichungen durch $B_{\nu-1,N}$ dividiert, so kommt:

$$\frac{A_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}}=A_{N-1}\frac{A_{\nu-1,N}}{B_{\nu-1,N}}+a_NA_{N-2}$$

$$\frac{B_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}}=B_{N-1}\frac{A_{\nu-1,N}}{B_{\nu-1,N}}+a_NB_{N-2}.$$

Hieraus folgt, wenn ν unbegrenzt wächst:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{A_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}}=A_{N-1}\frac{x_N}{x_{N+1}}+a_NA_{N-2}=\frac{x_0}{x_{N+1}},\tag{22}$$

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{B_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}}=B_{N-1}\frac{x_N}{x_{N+1}}+a_NB_{N-2}=\frac{x_1}{x_{N+1}}.\tag{23}$$

Ist nun $x_1\neq 0$, so kann man Gleichung (22) durch (23) dividieren und erhält:

$$\lim_{\nu=\infty}\frac{A_\nu}{B_\nu}=\frac{x_0}{x_1}.$$

Ist aber etwa $x_1=0$, so ist jedenfalls $x_0\neq 0$; denn sonst würde aus (9) der Reihe nach auch $x_2=0$, $x_3=0$, ... folgen,

Digitized by Google

während doch $x_{\nu+1} \neq 0$ vorausgesetzt ist. Daher ist jetzt, indem man umgekehrt (23) durch (22) dividiert:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_\nu}{A_\nu} = \frac{x_1}{x_0} = 0.$$

Hiemit ist aber unser Satz vollständig bewiesen.

Schreibt man die Ungleichung (18) in der Gestalt:

$$\left|\frac{x_\nu}{x_{\nu+1}}\right| \geq 1 + |a_\nu| + |a_{\nu+1}| \left|\frac{x_{\nu+2}}{x_{\nu+1}}\right|,$$

so erkennt man augenblicklich, daß sie sicher von einem gewissen ν ab erfüllt ist, wenn die Zahlen $|a_\nu|$ unter einer endlichen Schranke bleiben, und außerdem die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = 0$$

besteht. Wir finden also speziell:

Wenn die Zahlen $|a_\nu| (> 0)$ unter einer von ν unabhängigen Schranke bleiben, und wenn außerdem

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{x_{\nu+1}}{x_\nu} = 0$$

ist, so folgt aus dem System (9) allemal die Gleichung (10), sofern nur $x_1 \neq 0$ ist. Für $x_1 = 0$ aber ist notwendig $x_0 \neq 0$ und der Kettenbruch (10) ist eigentlich divergent.

§ 3.

Wenden wir uns jetzt wieder zu den Besselschen Funktionen, so ist leicht zu sehen, daß durch den letzten Satz der Schlömilchsche Beweis legalisiert wird. In der Tat ist nach Gleichung (3), sobald z von Null verschieden ist:

$$J_{h-1}(z) = \frac{2h}{z} J_h(z) - J_{h+1}(z)$$

$$J_h(z) = \frac{2(h+1)}{z} J_{h+1}(z) - J_{h+2}(z) \tag{24}$$

$$J_{h+1}(z) = \frac{2(h+2)}{z} J_{h+2}(z) - J_{h+3}(z)$$

— — — — — — — —.

Digitized by Google

Diese Gleichungen haben die Form des Systems (9), und zwar ist durchweg $a_\nu = -1$. Wenn wir also noch zeigen können, daß für jedes von Null verschiedene endliche z die Beziehung

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu}(z)}{J_{h+\nu-1}(z)} = 0 \tag{25}$$

statthat, so sind die Voraussetzungen des obigen Satzes erfüllt, und wir können daher aus (24) schließen:

$$\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2h}{z} - \cfrac{1}{\cfrac{2(h+1)}{z}} - \cfrac{1}{\cfrac{2(h+2)}{z}} - \cfrac{1}{\cfrac{2(h+3)}{z}} - \cdots,$$

mit dem Zusatz, daß der Kettenbruch für die Nullstellen von $J_h(z)$ eigentlich divergent ist. Daß aber die Gleichung (25) in der Tat richtig ist, ergibt sich sehr einfach aus der Definition (1). Setzt man dort $h + \nu$ an Stelle von h, so kommt:

$$\frac{J_{h+\nu}(z) \cdot \Gamma(h+\nu+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu}}$$

$$= 1 - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{(h+\nu+1)\,1!} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^4}{(h+\nu+1)(h+\nu+2)\cdot 2!} - \cdots,$$

also wenn man $\nu > |h|$ wählt:

$$\left| \frac{J_{h+\nu}(z)\,\Gamma(h+\nu+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu}} - 1 \right| < \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^2}{(\nu-|h|)\,1!} + \frac{\left|\frac{z}{2}\right|^4}{(\nu-|h|)^2\,2!} + \cdots$$

$$= e^{\frac{|z|^2}{4(\nu-|h|)}} - 1.^1)$$

Hier konvergiert aber die rechte Seite für jeden endlichen Wert von z mit wachsendem ν gegen Null; also folgt:

[1]) Die von Herrn Nielsen angegebene Abschätzungsformel (Handbuch, pag. 7 Formel (3)) ist nicht allgemein richtig.

Digitized by Google

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu}(z)\,\Gamma(h+\nu+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu}} = 1.$$

Ebenso, wenn $\nu - 1$ an Stelle von ν tritt:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu-1}(z)\,\Gamma(h+\nu)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{h+\nu-1}} = 1.$$

Also durch Division der zwei letzten Gleichungen:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{J_{h+\nu}(z)}{J_{h+\nu-1}(z)}(h+\nu) = \frac{z}{2};$$

hieraus folgt aber augenblicklich Gleichung (25), womit dann alles bewiesen ist.

Ich bemerke, daß die Konvergenz des Kettenbruches (4) nicht immer eine unbedingte ist im Sinne des Herrn Pringsheim; dies ist offenbar nur dann der Fall, wenn wir von z auch die Nullstellen aller Funktionen J_{h+1}, J_{h+2}, J_{h+3}, ... ausschließen.

In der auf pag. 493, Fußnote 2 genannten Arbeit hat Herr Hurwitz die Kettenbruchdarstellung oder vielmehr gewisse Eigenschaften der Näherungsbrüche dazu benutzt, um zu beweisen, daß die Nullstellen der Funktion $J_h(z)$, wenn der Index h reell und größer als -1 ist, alle reell sind. Man kann aber aus der Kettenbruchentwicklung noch eine weitere Eigenschaft dieser Nullstellen entnehmen, die, wie es scheint, noch nicht bemerkt worden ist. Die Nullstellen sind nämlich, wenn der Index h rational ist, stets irrational (abgesehen von der eventuellen Nullstelle $z = 0$). Auch die Funktion

$$p\,J_h(z) + q\,J_{h-1}(z),$$

wo p, q, h irgendwelche rationale Zahlen bedeuten, hat keine von Null verschiedene rationale Nullstelle. Es folgt dies aus dem Legendreschen Irrationalitätssatz, den ich folgendermaßen formuliere:

Wenn in dem unendlichen Kettenbruch

Digitized by Google

$$b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \frac{a_2|}{|b_2} + \frac{a_3|}{|b_3} + \cdots$$

die $a_\nu (\neq 0)$, b_ν ganze rationale Zahlen sind, welche von einer gewissen Stelle $\nu \geqq N+1$ ab der Ungleichung

$$b_\nu \geqq 1 + |a_\nu|$$

genügen, so ist der Kettenbruch konvergent und hat einen irrationalen Wert, es sei denn, daß von einem bestimmten ν an durchweg $a_\nu < 0$, $b_\nu = 1 + |a_\nu|$ ist.

Herr Pringsheim hat zwar den Beweis dieses Satzes in der auf Seite 498 zitierten Arbeit nur für den Fall durchgeführt, daß die Ungleichung $b_\nu \geqq 1 + |a_\nu|$ schon von $\nu = 1$ ab besteht. Es ist aber leicht zu sehen, daß der Satz gleichwohl in diesem weiteren Umfang gilt. Denn es ist jetzt jedenfalls

$$\beta_N = b_N + \frac{a_{N+1}|}{|b_{N+1}} + \frac{a_{N+2}|}{|b_{N+2}} + \cdots$$

eine irrationale Zahl. Indem man dann wieder in (17) $\lambda = N$ setzt, sodann durch $B_{\nu-1,N}$ dividiert und ν unbegrenzt wachsen läßt, erhält man:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}} = A_{N-1}\beta_N + a_N A_{N-2} \tag{26}$$

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{B_{\nu+N-1}}{B_{\nu-1,N}} = B_{N-1}\beta_N + a_N B_{N-2}. \tag{27}$$

Nun ist zu beachten, daß dieser letzte Ausdruck notwendig von Null verschieden ist. Denn da alle a_ν, b_ν rational sind, so gilt das gleiche von B_{N-1}, B_{N-2}. Aber β_N ist irrational; also könnte der Ausdruck nur dann verschwinden, wenn gleichzeitig $B_{N-1} = 0$, $B_{N-2} = 0$ wäre, was bekanntlich nicht möglich ist (wegen Gleichung (13) für $\nu = N-1$). Man kann also (26) durch (27) dividieren und findet so:

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_{N-1}\beta_N + a_N A_{N-2}}{B_{N-1}\beta_N + a_N B_{N-2}}.$$

Daher ist unser Kettenbruch in der Tat konvergent und hat einen irrationalen Wert. Der obige Bruch könnte ja offenbar

Digitized by Google

nur dann rational werden, wenn die Determinante $A_{N-1}\,B_{N-2} - A_{N-2}\,B_{N-1}$ den Wert Null hätte, was wegen (13) nicht der Fall ist.

Um diesen Satz nun anzuwenden, führen wir in Gleichung (4) für h und z beliebige rationale Werte ein; man wird stets

$$h = \frac{e}{g}, \quad z = \frac{f}{g}$$

setzen können, wo e, f, g ganze Zahlen sind und g positiv. Es folgt dann:

$$\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2e}{f} - \frac{1}{\left|2\frac{e+g}{f}\right.} - \frac{1}{\left|2\frac{e+2g}{f}\right.} - \frac{1}{\left|2\frac{e+3g}{f}\right.} - \cdots,$$

oder wenn man den Kettenbruch durch einen äquivalenten ersetzt:[1])

$$\frac{J_{h-1}(z)}{J_h(z)} = \frac{2e}{f} - \frac{f}{|2(e+g)} - \frac{f^2}{|2(e+2g)} - \frac{f^2}{|2(e+3g)} - \cdots.$$

Dieser Kettenbruch erfüllt nun die Voraussetzungen des Irrationalitätssatzes, und der Ausnahmefall tritt offenbar nicht ein. Er ist also zunächst einmal konvergent; daher kann $z = \frac{f}{g}$ keine Nullstelle von $J_h(z)$ sein, sonst müßte ja der Kettenbruch eigentlich divergieren. Aber außerdem ist sein Wert auch irrational; daher ist die Zahl

$$p\,J_h(z) + q\,J_{h-1}(z)$$

für rationale p, q notwendig von Null verschieden. Damit ist aber unsere Behauptung in allen Teilen bewiesen.

---

[1]) Man beachte, daß dadurch Konvergenz oder Divergenz nicht beeinflußt wird, weil bei zwei äquivalenten Kettenbrüchen auch die Reihe der sukzessiven Näherungsbrüche die gleiche ist.

Digitized by Google